GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIV

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1938

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedaţi.
3. Petru Pipoş (1859—1913) . . . . . *Victor Marian.*
4. Concursul „Gazetei Matematice" din 1939.
5. Premii, burse şi publicaţii, din fondurile speciale ale Societăţii „Gazeta Matematică".
6. Note Matematice: 1.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 280.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2682, 4406, 4527, 4556, 4681, 4761, 4803, 4860, 4939, 4943.
11. Exerciţii: 1.
12. Probleme propuse: 4999 — 5013.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1938

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stan**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijă în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 270, 71, 97, 99, 310, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 64, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 77, 577, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3069, 81, 127, 61, 208, 55, 98, 304, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 522, 23, 33, 42, 45, 72, 73, 608, 27, 35, 47, 57, 65, 81, 99, 700, 33, 36, 93, 802, 29, 36, 44, 53, 64, 96, 909, 13, 16, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 85, 102, 11, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 203, 06, 10, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 89, 90, 303, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 42, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 26, 45, 49, 52, 64, 68, 73, 74, 79, 80, 81, 86, 87, 89, 90, 92, 511, 13, 16, 33, 34, 47, 58, 61, 87, 92, 96, 98, 601, 02, 03, 05, 15, 28, 30, 36, 41, 47, 50, 57, 67, 70, 72, 75, 80, 83, 85, 86, 90, 93, 98, 710, 34, 42, 49, 61, 70, 72, 81, 91, 804, 05, 07, 12, 38, 39, 40, 49, 53, 54, 59, 71, 79, 88, 89, 90, 94, 901, 05, 12, 13, 14, 15, 20, 27, 29, 37, 38, 44, 49, 55, 62, 63, 65, 67, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 81, 82, 84, 86, 88, 92, 93, 95, 97, 98, 99, 5000, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

In Biblioteca «Gazetei Matematice» au apărut:

CULEGERE DE PROBLEME DE ALGEBRĂ

INTOCMITĂ DE

D-l Inginer Profesor A. G. IOACHIMESCU
Licențiat în Matematici

PARTEA I. EDIȚIA IV-a

REVĂZUTĂ ȘI MĂRITĂ

188 pagini

Prețul: 120 lei

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

PARTEA II-a (Trigonometria plană)

DE

V. CRISTESCU

EDIȚIA II-a REVĂZUTĂ ȘI ADĂOGITĂ

DE

GH. TH. GHEORGHIU

Prețul: 125 lei

DE VÂNZARE LA LIBRĂRII, SE POT COMANDA ȘI LA «GAZETA MATEMATICĂ», BUCUREȘTI. CALEA GRIVIȚEI Nr. 158, TRIMIȚÂNDU-SE COSTUL PLUS 15 LEI PENTRU TRANSPORT DE FIECARE VOLUM SAU CONTRA RAMBURS.

BURSE ŞI PREMII DIN FONDURILE SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“

REGULAMENTUL FONDULUI « ANGHEL SALIGNY »

Art. 1.—Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind donaţiunea D-lui *I. Ionescu*, constitue — în conformitate cu dorinţa donatorului — un fond denumit fondul „*Anghel Saligny*“ al cărui venit să servească la publicarea de cărţi tehnice conform art. 6 din actul de donaţie şi în consecinţă înfiinţează o „*Bibliotecă tehnică a Gazetei Matematice*“.

Art. 2. — Toate cărţile tipărite din acest fond vor purta pe copertă în frunte următoarea titulatură: „*Biblioteca tehnică a Gazetei Matematice*“ (tipărită din fondul „*Anghel Saligny*“).

Art. 3. — Biblioteca va avea formatul 120×185 sau 175×260 mm., după felul şi întinderea manuscriselor. Dimensiunile se înţeleg pentru cărţile broşate şi tăiate.

Art. 4. — Volumele se vor da în comerţ legate în pânză de culoare cenuşiu închis şi vor avea imprimate în auriu, inscripţiunile ce se vor stabili pentru fiecare publicaţiune în parte.

Art. 5. — Manuscrisele se adresează delegaţiunii, care convoacă o Adunare generală extraordinară pentru a alege o Comisiune de 3 membri, care se completează cu casierul şi care dă în mod definitiv avizul dacă lucrarea poate să fie tipărită din fondul „*Anghel Saligny*“; aceasta atât din punct de vedere financiar cât şi din punct de vedere al valorii ştiinţifice a lucrării.

Art. 6. — Comisiunea nu ia în considerare decât lucrările complete de matematici aplicate sau cuprins tehnic în legătură cu aceste ştiinţe.

Art. 7. — Dacă la prezentarea manuscrisului nu sunt sume disponibile din venitul fondului „*Anghel Saligy*“ pentru tipărire şi dacă Comisiunea însărcinată cu cercetarea lui opinează că e bine să fie tipărit, atunci delegaţiunea Societăţii va putea împrumuta cu dobândă de 5% cu aprobarea unei Adunări generale suma necesară tipăririi, din numerarul disponibil al „*Gazetei Matematice*“.

Art. 8. — Odată cu depunerea manuscrisului, autorul este obligat să declare în scris că se va supune dispoziţiilor acestui regulament şi ale actului de donaţie al fondului şi că nu va tipări

o a doua ediţie înainte de epuizarea ediţiei tipărită în această bibliotecă.

Art. 9. — In regulă generală se preferă lucrările membrilor Societăţii „*Gazeta Matematică*".

Art. 10. — Comisiunea pentru cercetarea lucrării, hotărăşte pentru fiecare ediţiune tipărită conform acestui regulament numărul volumelor, formatul (conform art. 3), inscripţiunile (conform art. 4) şi preţul. De asemenea Comisia va urmări tipărirea şi va lua la timp dispoziţii speciale necesare.

Art. 11. — (art. 4 din actul de donaţie al fondului „*Anghel Saligny*"). — Sumele ce se încasează din vânzarea cărţilor după ce se scot din ele cheltuelile de cost, comision şi expediţie, se distribue în modul următor:

a) 10% autorului respectiv;

b) 20% Societăţii „*Gazeta Matematică*" pentru sporirea capitalului ei;

c) 20% fondului „*Anghel Saligny*" pentru sporirea lui continuă, şi

d) 50% drept venit al fondului „*Anghel Saligny*", întrebuinţându-se prin urmare pentru noui publicaţiuni.

Art. 12. — Autorul primeşte gratuit câte 10 volume din lucrările lui, la fiecare ediţie.

REGULAMENTUL FONDULUI BURSEI «PROFESOR ION IONESCU»

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*" primeşte să administreze fondul instituit de un grup de foşti elevi ai D-lui Profesor *Ion Ionescu*, reprezentat prin D-nii *Gh. Em. Filipescu, A. Ioanovici, H. Theodoru* şi *D. Stan*, membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*, din venitul căruia să se acorde o bursă anuală elevilor Şcoalei Politehnice Regele Carol II.

Bursa va purta numele: *Bursa Profesor Ion Ionescu* şi este menită, în conformitate cu dorinţa donatorilor, să perpetueze tradiţia muncii şi disciplinei introduse de D-nul Prof. *Ion Ionescu* în vechea Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele şi continuate în Şcoala Politehnică.

Art. 2. — Fondul iniţial este constituit din efecte publice 3% (Renta consolidării) în valoare nominală de 1.000.000 lei.

Art. 3. — Venitul acestui fond, micşorat cu cotele prevăzute la art. 7 din Regulamentul general al Administrării Fondurilor *Gazetei Matematice,* se acordă sub formă de bursă, plătită lunar, în rate egale, timp de 9 luni, unuia din elevii cei mai merituoşi ai Secţiei de Construcţii dela Şcoala Politehnică Regele Carol II, care satisface următoarele condiţii:

a) Să fie român.

b) Să fi fost cel puţin 2 ani corespondent al *Gazetei Matematice.*

c) Să fie elev în anul III sau IV al Şcoalei.

d) Să fi promovat anii anteriori în timpul minim regulamentar.

Art. 4. — Bursa este unică şi indivizibilă.

Art. 5. — Dacă într'un an nu se poate acorda bursa, ea se va acorda în anii următori elevilor care urmează în îndeplinirea condiţiilor dela art. 3. In nici un caz venitul fondului nu se capitalizează.

Art. 6. — In cazul când elevul care a avut bursa în anul III, termină toate îndatoririle din programul Şcoalei înainte de începerea cursurilor anului IV, el va continua să primească bursa, în mod automat, şi în anul IV.

Bursa poate fi suprimată în cursul anului, dacă elevul căruia i s'a atribuit, dă vădite dovezi că nu-şi mai îndeplineşte toate îndatoririle şcolare. In acest caz bursa poate fi acordată altui elev pentru restul anului.

Art. 7. — Bursa se acordă de o Comisiune, compusă din: 2 membri ai *Gazetei Matematice* dintre care unul trebue să facă parte din Delegaţie, desemnaţi de prima Adunare generală anuală; toţi profesorii şi conferenţiarii Şcoalei Politehnice dela Secţia Construcţiilor, activi şi onorari, care sunt membri ai *Gazetei Matematice.*

Aceeaşi Comisiune va hotărî şi asupra cazurilor de retragere a bursei, prevăzute la art. 6.

Art. 8. — Bursa se achită de Casierul *Gazetei Matematice* direct elevului, la 15 a fiecărei luni, începând cu 15 Octomvrie şi terminând cu 15 Iunie.

Art. 9. — Fondul iniţial poate fi mărit prin donaţiuni ulterioare, acceptate de Societatea *Gazeta Matematică,* conform cu prevederile ei statutare. Veniturile produse de aceste sporiri, se vor capitaliza

până ce vor permite acordarea unei burse de valoare egală, în condiţiunile acestui Regulament.

Art. 10. — In caz de disolvare a Societăţii *Gazeta Matematică*, fondul se va trece în Administrarea Şcolii Politehnice „Regele Carol II", din Bucureşti, cu acelaşi regulament.

REGULAMENTUL PREMIULUI DE ARITMETICĂ

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*" acordă un premiu anual de aritmetică în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unor lucrări referitoare la aritmetică dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 7 al „*Gazetei Matematice*", care apare în luna Martie.

REGULAMENTUL PREMIULUI DE GEOMETRIE ELEMENTARĂ

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*" acordă un premiu anual de geometrie elementară în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unor lucrări referitoare la geometrie elementară, dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 11 al *„Gazetei Matematice“*, care apare în luna Iulie.

REGULAMENTUL PREMIULUI DE ALGEBRĂ

Art. 1. — Societatea *„Gazeta Matematică“* acordă un premiu anual de algebră în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unor lucrări referitoare la algebră, dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebuie să fie român, elev de liceu din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 9 al *„Gazetei Matematice“*, care apare în luna Mai.

REGULAMENTUL PREMIULUI « VASILE CONTA »

Art. 1. — In dorinţa de a permanetiza acordarea unui premiu anual pentru lucrări de filosofia matematicilor, în memoria ilustrului

filosof român *Vasile Conta,* premiu instituit de către *Ana Conta Kernbach,* sora ilustrului filosof, în timpul vieţii ei, prin o contribuţie viageră anuală la Societatea „*Gazeta Matematică*“, aceasta va acorda în continuare, în fiecare an, un premiu denumit „*Vasile Conta*“ în valoare de 4.000 (patru mii) lei.

Art. 2. — Premiul se acordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filosofia matematicilor, adusă la cunoştinţa Societăţii în cursul fiecărui an până la 1 Iulie.

Dacă până la acea dată nu se prezintă nicio lucrare, se va aştepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta o asemenea lucrare.

Art. 3. — Prima Adunare generală anuală alege o Comisiune compusă din doi membri şi un delegat, care examinează lucrările; mandatul acestei Comisiuni este limitat la un an, chiar dacă nu se acordă premiul.

Art. 4. — Comisiunea prezintă celei de-a doua Adunări generale din acel an, un raport prin care propune spre premiere una din lucrările prezentate, justificând alegerea.

Art. 5. — In cazul neacordării premiului într'un an sau în mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se, după propunerea Comisiunii şi aprobarea Adunării generale, unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 6. — Autorii lucrărilor trebuie să fie români şi să-şi fi făcut studiile secundare în ţară.

Art. 7. — Raportul Comisiunii se publică în numărul din Noemvrie al „*Gazetei Matematice*“.

REGULAMENTUL PREMIULUI « SPIRU HARET »

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria marelui profesor şi reformator al învăţământului, *Spiru Haret,* primul român doctor în ştiinţele matematice, Societatea „*Gazeta Matematică*“ acordă în fiecare an un premiu denumit „*Spiru Haret*“, în valoare de 5.000 (cinci mii) lei.

Acest premiu va fi constituit din venitul sumelor adunate pentru fondul „*Spiru Haret*“, completat eventual de noi donaţii sau de Societatea „*Gazeta Matematică*“ din venitul fondului său general de premii, până la suma de mai sus.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unei lucrări de mecanică sau astronomie, dintre cele publicate în „*Gazeta Matematică*“, în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu, de Şcoală Militară, de Şcoală Politehnică sau student la o Facultate de ştiinţe din ţară.

Art. 4. — In cazul când într'unul sau mai mulţi ani de-a-rândul premiul n'ar putea fi decernat, valoarea lui pe acel an sau pe acei ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisiune, compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiei se publică în Nr. 12 al „*Gazetei Matematice*“, care apare în luna August.

REGULAMENTUL PREMIULUI « V. CRISTESCU »

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria Inginerului *V. Cristescu,* membru fondator al „*Gazetei Matematice*“, în jurul căreia a animat şi activat intens şi neîntrerupt peste 33 ani, Societatea „*Gazeta Matematică*“ acordă un premiu anual denumit „*Vasile Cristescu*“ în valoare de 5.000 (cinci mii) lei.

Acest premiu va fi constituit din venitul sumelor donate de D-nii *Gheorghe, Miron* şi *Alexandru Niculescu* şi din venitul altor eventuale donaţiuni, completate până la suma de mai sus, din venitul fondului general de premii al Societăţii „*Gazeta Matematică*“.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unei lucrări referitoare la trigonometrie dintre cele publicate în „*Gazeta Matematică*“ în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu, de Şcoală Militară, de Şcoală Politehnică, sau student la o Facultate de ştiinţe din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor raportul indicând lucrarea ce se propune spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiei se publică în Nr. 10 al „*Gazetei Matematice*“ care apare în luna naşterii Inginerului *V. Cristescu.*

Art. 7. — In cazul când Societatea nu şi-ar mai putea îndeplini obligaţiunea acordării premiului de mai sus, atunci sumele donate de D-nii *Alexandru, Miron* şi *Gheorghe Niculescu* şi alţi eventuali donatori, se vor remite Liceului Naţional din Iaşi, care a avut pe *V. Cristescu* ca elev, iar dacă acest liceu n'ar mai exista, Liceului celui mai vechi din Iaşi, în funcţiune. In acest caz, din venitul sumelor acestea se va acorda un premiu anual, celui mai bun elev la matematici al liceului.

REGULAMENTUL PREMIULUI « INGINER H. CAPRIEL »

Art 1.—Societatea „*Gazeta Matematică*“ acordă un premiu în valoare de 1000 lei, din venitul fondului „*Inginer H. Capriel*“, adunat în urma propunerii dela 2 Iunie 1912 a *Inginerului Ştefan Mirea* şi din venitul fondului general de premii.

Art. 2. — Premiul se acordă din 5 în 5 ani celei mai bune lucrări de matematici superioare, pure sau aplicate, ce se va prezenta Societăţii de către studenţii Universităţilor, de către elevii Şcolilor Politehnice, sau de către elevii Şcolilor Militare pregătitoare şi de aplicaţie din ţară.

Art. 3. — Lucrarea se propune de o Comisiune aleasă în acest scop şi va consta dintr'o chestiune de matematici pure sau de matematici aplicate, din programele Facultăţilor de Ştiinţe şi Şcolilor speciale de Ingineri şi Ofiţeri.

Art. 4.—Comisiunea se compune din doi membri şi un delegat şi se alege de către prima Adunare generală din anul în care începe o perioadă de 5 ani. Această Comisiune pregăteşte chestiunile până în luna Mai a anului următor când se vor publica în „*Gazeta Matematică*“.

Aceleaşi chestiuni se vor publica în fiecare an în numărul „*Gazetei Matematice*“ din luna Mai, până la expirarea anului al 4-lea din perioada de 5 ani pentru care au fost propuse.

Art. 5. — Lucrările — semnate de autor — se trimit Societăţii cel mai târziu până la 1 Mai al anului care precede decernarea premiului. Decernarea se face de a doua Adunare generală a celui al 5-lea an, în urma raportului Comisiunii dela art. 4, publicându-se rezultatul în numărul din Octomvrie următor.

Art. 6. — Premiul este indivizibil, iar în cazul când nu se acordă, valoarea lui se adaugă la premiul perioadei sau perioadelor următoare de 5 ani, până la decernare.

REGULAMENTUL
FONDULUI «GENERAL SC. PANAITESCU»

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind donaţiunea *Generalului Scarlat Panaitescu*, înfiinţează un fond denumit fondul „*General Scarlat Panaitescu*“, din venitul căruia, şi în conformitate cu dorinţa donatorului, să se acorde un premiu celei mai bune lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare, publicată *în decurs de 5 ani.*

Art. 2. — Studiile în manuscris care se aduc la cunoştinţa Societăţii pe orice cale, se iau şi ele în consideraţie la acordarea premiului.

Art. 3. — Premiul poartă numele: „*Premiu pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare*“.

Art. 4. — Autorii publicaţiilor prezentate trebuie să fie români şi să-şi fi făcut cultura matematică în ţară.

Art. 5. — Premiul este indivizibil şi se acordă neapărat la fiecare 5 ani. In cazul când nu se găseşte nicio lucrare de premiat sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voieşte a primi suma fixată, ea se dă uneia din revistele militare în care se publică şi chestiuni de matematică aplicată la ştiinţele militare.

Art. 6. — Prima Adunare generală din fiecare an alege o Comisiune compusă dintr'un delegat al Societăţii şi doi membri, între care cel puţin un ofiţer, Comisiune cari examinează lucrările apărute în cursul anului. Mandatul acestei Comisiuni este limitat la un an chiar când premiul nu se decerne.

Art. 7. — Comisiunea prezintă celei de a doua Adunări generale un raport asupra lucrărilor publicate în cursul anului expirat sau asupra manuscriselor aduse la cunoştinţa Societăţii în acelaşi

timp. Comisiunea anului în care se face decernarea premiului, trebue să propună în raportul său, spre premiare, lucrarea cea mai meritoasă ajunsă la cunoştinţa Societăţii în cursul ultimilor 5 ani; această Comisiune va avea deci să ţină seamă de cele patru rapoarte anterioare.

Art. 8. — Raportul Comisiunii din anul în care se face decernarea premiului, se publică în numărul *„Gazetei Matematice“* din Septemvrie următor Adunării generale care a aprobat decernarea.

REGULAMENTUL
FONDULUI « LT.-COLONEL GH. A. TĂNĂSESCU »

Art. 1. — Societatea *„Gazeta Matematică“* primind legatul decedatului *Al. Tănăsescu,* înfiinţează un fond denumit fondul *„Lt.-Colonel G. A. Tănăsescu“*, în memoria fiului său.

Art. 2. — Din venitul acestui fond se vor da cărţi de matematici celui clasificat întâiul la concursurile anuale ale *Gazetei Matematice.*

Art. 3. — In anii când aceste concursuri nu au loc, veniturile vor mări fondul.

REGULAMENTUL PREMIULUI « NICOLAE G. BOTEA »

Art. 1.—Societatea *„Gazeta Matematică“* primind donaţiunea D-lui Profesor *G. Botea,* pentru a cinsti memoria fiului său *Nicolae G. Botea,* fost distins corespondent al *Gazetei* şi membru al Societăţii, constitue un fond denumit fondul *„Nicolae G. Botea“*, din al cărui venit să se acorde un premiu anual, constând din cărţi de ştiinţă, autorului celei mai bune lucrări (articol, notă, problemă rezolvată) de *geometria triunghiului şi a tetraedrului,* dintre cele publicate în *Gazeta Matematică,* în ultimul volum apărut.

Art. 2. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu, de şcoală militară, de Politehnică sau student de Facultate din ţară.

Art. 3. — Fondul se poate mări atât de donator cât şi de alte persoane. Toate sumele atribuite fondului se transformă în rente de Stat sau efecte garantate de Stat.

Art. 4. — Premiul se va acorda în orice caz în fiecare an.

Art. 5. — Prima Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă celei de-a doua Adunări generale din acelaşi an raportul indicând autorul şi lucrarea ce se propune spre premiare. In acelaşi raport se vor specifica şi cărţile ce vor constitui premiul.

Art. 6. — Raportul Comisiei, aprobat de Adunarea generală se publică în Nr. 5 al *Gazetei Matematice*, care apare în luna Ianuarie.

Art. 7. — In cazul când Societetea nu s'ar mai putea obliga cu realizarea dorinţei donatorului, atunci fondul adunat până în acel moment, va fi trecut Comitetului şcolar al Colegiului Naţional Sft. Sava din Bucureşti, pentru ca din venit să se dea la finele fiecărui an şcolar, cărţi de ştiinţă, celui mai silitor elev din clasa III-a A a acelui colegiu.

REGULAMENTUL PREMIULUI « INGINER ALEXANDRU ROŞU »

Art. 1.—Societatea „*Gazeta Matematică*“, primind donaţiunea D-lui *Alexandru A. Roşu,* pentru a cinsti memoria tatălui său Inginer *Alexandru Roşu,* fost corespondent neobosit şi fost membru activ al *Gazetei Matematice,* constitue un fond denumit fondul „*Inginer Al. Roşu*“ din al cărui venit să se acorde un premiu anual, în numerar.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne *celui mai harnic corespondent* al *Gazetei Matematice,* elev de liceu, pentru activitatea depusă în cursul ultimului volum apărut.

Art. 3. — Premiul se va acorda în orice caz în fiecare an.

Art. 4. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisiune compusă din 2 membri şi un delegat care prezintă primei Adunări generale a anului următor raportul indicând elevul premiat.

Art. 5. — Raportul Comisiunei se publică în Nr. 8 al *Gazetei Matematice,* care apare în luna decesului Inginerului *Alexandru Roşu.*

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XLIV

15 SEPTEMVRIE 1938 — 15 AUGUST 1939

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1938

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

DELEGAȚIUNEA SOCIETĂȚII PENTRU ANUL 1938 *)

D. STAN, CPT. COMANDOR GR. ZAPAN, AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACȚIUNII „GAZETA MATEMATICĂ"

GENERAL GH. BUICLIU și I. IONESCU. Membri delegați pentru: cereri, diverse și suplimente.

G. ȚIȚEICA ajutat de G. T. GHEORGHIU și C. IONESCU-BUJOR. Raportori.

LT. C. IONESCU-ȚIU și CPT. COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru: schimburi de reviste și primirea lor, recreațiuni, reclamațiuni privitoare la tipărire, primirea și repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare.

I. ALEXIU, GH. ILIESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ȚIU. Membri delegați pentru corecturi și imprimarea revistei.

GENERAL GH. BUICLIU, O. ȚINO și CPT. COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru aritmetică elementară.

D. BARBILIAN, U. FLORESCU, ADR. GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU și G. D. SIMIONESCU. Membri delegați pentru geometrie elementară.

G. DUMITRESCU, G. T. GHEORGHIU, GENERAL GH. LITEANU și O. ȚINO. Membri delegați pentru trigonometrie.

I. ALEXIU, TH. ANGHELUȚĂ, G. T. GHEORGHIU, V. GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR și A. A. ROȘU. Membri delegați pentru algebră elementară.

I. ALEXIU, I. CHIȚULESCU și C. ORĂȘANU. Membri delegați pentru geometrie descriptivă.

U. FLORESCU, CPT. COMANDOR I. LINTEȘ și CR. MATEESCU. Membri delegați pentru mecanică elementară.

E. ARGHIRIADE, GENERAL GH. BUICLIU, CĂP. M. FOCȘENEANU, G. T. GHEORGHIU și O. ȚINO. Membri delegați pentru geometrie analitică.

CĂP. M. FOCȘENEANU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU și C. ORĂȘANU. Membri delegați pentru cosmografie.

TH. ANGHELUȚĂ, N. CIORĂNESCU, G. T. GHEORGHIU și M. GHERMĂNESCU. Membri delegați pentru articole și note de matematici superioare.

I. IONESCU, O. ONICESCU, P. SERGESCU și GH. ZAPAN. Membri delegați pentru istoria și filosofia matematicei.

TH. ANGHELUȚĂ, G. T. GHEORGHIU, D. V. IONESCU și P. SERGESCU. Membri delegați pentru probleme propuse de matematici superioare.

---

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri și un cassier. (Art. 14 din Statute).

O. ŢINO. Membru delegat pentru clasarea problemelor propuse.
I. ALEXIU şi C. IONESCU-BUJOR. Membri delegaţi pentru exerciţii.
N. ABRAMESCU, V. ALACI, G. T. GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR, MIRON NICULESCU, T. POPOVICIU, M. SARIAN, P. SERGESCU, O. ŢINO şi CPT. COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru chestiuni de examen.
I. ALEXIU, GENERAL GH. BUICLIU şi C. IONESCU-BUJOR. Membri delegaţi pentru alcătuirea tablei de materii.
CĂP. M. FOCŞENEANU, C. IONESCU-BUJOR, Lt. C. D. IONESCU-ŢIU şi AL. AL. ROŞU. Membri delegaţi pentru cercetarea prealabilă a soluţiilor primite dela corespondenţi.
LT. C. IONESCU-ŢIU. Bibliotecar.
I. ALEXIU, I. S. ANTONIU, GENERAL GH. BUICLIU, N. CIORĂNESCU, GH. I. DUMITRESCU, U. FLORESCU, CĂP. M. FOCŞENEANU, ADR. GHEORGHIU, G. T. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, V. GHIŢESCU, H. P. IONESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ŢIU, CPT. COMANDOR I. LINTEŞ, GENERAL GH. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, O. ORĂNESCU, AL. PANTAZI, A. PÂRVU, AL. ROŞU, M. SARIAN, GH. D. SIMIONESCU, O. ŢINO şi CPT. COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru cercetarea şi redactarea problemelor rezolvate.

PERSONALUL REDACŢIUNII «SUPLIMENTULUI CU EXERCIŢII»

O. N. ŢINO. Membru delegat pentru coordonarea exerciţiilor propuse.
C. IONESCU-BUJOR. Membru delegat pentru soluţiunile de publicat, imprimarea revistei şi corecturi.
LT. C. IONESCU-ŢIU. Membru delegat pentru repartizarea exerciţiilor rezolvate.
N. N. MIHĂILEANU. Membru delegat pentru alcătuirea tabloului de rezolvitori al fiecărui număr.
I. ALEXIU, E. ARGHIRIADE, GENERAL GH. BUICLIU, G. DUMITRESCU, G. T. GHEORGHIU, V. GHIŢESCU, C. IONESCU-BUJOR, LT. C. IONESCU-ŢIU, CPT. COMANDOR I. LINTEŞ, N. N. MIHĂILEANU, AL. AL. ROŞU, GH. D. SIMIONESCU, O. N. ŢINO, CPT. COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegaţi pentru exerciţii propuse.

MEMBRII

1	1922, Mart. 1*	ABASON ERNEST. Inginer-Şef. — Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Doctor în Matematici. — Profesor şi Subdirector de studii la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Matei Voevod, 25. Bucureşti 4.
2	1907, Iulie 1	ABRAMESCU N. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. V. Alecsandri, 3. Cluj.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Traian Lalescu, 1. Timişoara.

*) Data admiterii.

4	1937, Aug. 27	ALDEA N. N. Licenţiat în Matematici. — Str. Matei Voevod, 65. Bucureşti 4.
5	1938, Febr. 17	ALEXIU IULIAN. Inginer constructor. Licenţiat în Ştiinţe Matematice. Inginer în Direcţiunea de poduri, Lucrări noui, Studii şi Construcţii. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Str. Mihail Cornea 41. — Bucureşti 2.
6	1921, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj
7	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer-Şef. — Şef de serviciu tehnic. Direcţiunea Generală a Drumurilor M. L. P. — Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. C. Dissescu, 17. Bucureşti 2.
8	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Electromecanic, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer Electrician, Diplomat al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi de Electricitate din Bucureşti. — Căsuţa Poştală Nr. 272.
9	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Licenţiat în Matematici. — Profesor Gimnaziul Comercial Regele Ferdinand I. Bucureşti.
10	1935, Febr. 13	ARMEANCA IOAN. Doctor în Matematici. — Astronom la Observatorul Astronomic Cluj. Profesor la Liceul Gh. Barițiu Cluj. — Cluj, Universitate.
11	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Şeful Serviciului judeţean de Drumuri Teleorman. — T. Măgurele.
12	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Director tehnic al Societăţii Comunale a Tramvaelor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — B-dul Gh. Buzdugan, 38. Bucureşti 2.
13	1936, Febr. 27	BĂDESCU RADU. Doctor în Matematici şi Docent al Universităţii din Geneva. — Asistent al Seminarului de Matematici dela Universitatea din Cluj. Profesor Suplinitor la Academia de Agricultură din Cluj. — Cluj.
14	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Avenida de Abayo 560. Republica Argentina.
15	1911, Febr. 20	BANCIU I. Licenţiat în Matematici. — Directorul General al Casei de Depuneri şi Consemnaţiuni. — Str. Lucaci, 95. Bucureşti 3.
16	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Str. Carol Davila, 8. Bucureşti 6
17	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Academia de Arhitectură. Director General al Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 49, Bucureşti 2.
18	1938, Febr. 17	BOTEA G. EMIL-PETRE. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Secţia construcţii. — Şef de secţie în Administraţia Comercială a Porturilor şi Comunicaţiilor pe Apă. — B-dul Căp Av. Craiu 46. Bucureşti III.
19	1935, Aug. 22	BOTEZ ST. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Profesor Liceul „Petru Rareş" din Piatra-Neamţ. — Str. I. Gh. Duca, 15. Piatra-Neamţ.

20	1920, Aug. 15	BRATU GH. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Profesor de Astronomie şi de Calcul diferenţial şi integral la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. Directorul Observatorului Astronomic din Cluj. — Str. Observatorului, 4. Cluj.
21	1926, Iunie 28	BRENER M. AVRAM. Inginer. — Str. Viitorului, 22. Bucureşti 3.
22	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Director Superior C. F. R. — Str. Ing. Pandele Ţăruşeanu, 7 Bucureşti 2.
23	1935, Noem. 7	BUCURESCU I. Lt. Licenţiat în Matematici. — Absolvent al Secţii de Radio-Comunicaţii dela Şcoala Politehnică Bucureşti. — Str. Tache Ionescu, 2. Cluj.
24	1920, Ian. 10	BUDEANU I. C. Inginer dela Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din Bucureşti, Şcoala Superioară de Electricitate din Paris. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Washington, 32. Parcul Bonaparte. Bucureşti 3.
25	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. General de Artilerie în rezervă. — Fost Secretar general al Ministerului Apărării Naţionale. Însărcinat cu conferinţe de balistică exterioară la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Str. M. Cogălniceanu, 10. Bucureşti 2. Telefon 2-3550.
26	1928, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer Inspector General. — Inspector conducător la C. F. R — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
27	1924, Ian. 30	BUNESCU D. AL. Inginer S. N. P. S. — Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6. (Telefon 3-6033).
28	1930, Aug. 31	BUNGESCU ION. Maior de Artilerie. Absolvent al Şcoalei de Artilerie antiaeriană din Metz (Franţa . Brevetat de Stat Major al Şcoalei Superioare de Război din Paris. Membru corespondent al Academiei de Ştiinţe. Profesor la Şcoala Superioară de Război. — Aleea Suter, 21. Bucureşti 2.
29	1938, Febr. 17	BUNGEŢIANU D. PREDUŢA. Licenţiată în Matematici. — Profesoară. — Str. Stupinei, 11. Bucureşti 4.
30	1920, Ian. 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer-Şef cl. I. Subdirectorul Mişcării C. F. R. — Str. Lăzureanu, 48. Bucureşti 6.
31	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer. — Inginer în Direcţiunea Întreţinerii şi Lucrărilor Noui C. F. R. — Str. Vaselor, 40 B. Bucureşti 4.
32	1910, Oct. 25	BUŞILĂ D. C. Inginer. Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Aleea Modrogan, 1. Bucureşti 3. (Telefon 2-4661).
33	1921, Mai 4	BUŞILĂ I. Inginer Inspector General. — Inginer în Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Dr. Lueger, 6 bis, Bucureşti 2.
34	1926, Iulie 28	CAMBUREANU V. D. Inginer. — Inginer la Casa Autonomă a Drumurilor de Stat. — Str. Virgiliu, 15. Bucureşti 2.
35	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. Inginer Inspector General. — Subdirector General al Casei Muncii C. F. R. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2.
36	1921, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-Delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti 3.

37	1936, Noem. 7	CARAFOLI ELIE. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat şi Doctor în Ştiinţe dela Sorbona. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Str. Popa Savu, 42. Bucureşti 2.
38	1920, Mart. 1	CARAMAN E. Licenţiat in Matematici. — Profesor la Liceul „V. Alecsandri" din Galaţi. — Str. Lascăr Catargi, 40. Galaţi.
39	1936, Febr. 27	CARTIANU GH. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". Antreprenor. — Str. Popa Tatu, 81. Bucureşti 2.
40	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. Colonel de Artilerie. — Comandantul Reg. 40 Artilerie Tg. Mureş. — Str. Ecaterina Teodoroiu 6. Tg. Mureş.
41	1920, Ian. 10	CAZACU N. C. Inginer-Şef. — Şef de serviciu C. F. R. — Str. Apolodor 2. Bucureşti.
42	1935, Apr. 10	CHIRICESCU V. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Regia Autonomă C. F. R. — Str. Italiană, 30. Bucureşti 1.
43	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A. Inginer Inspector General. — Administraţia Comercială a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă. — Str. Oţetari, 8. Bucureşti 1.
44	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer-Şef. — Str. I. Căpitanu, 44. Bucureşti 4.
45	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer — Administrator Industrial. Antreprenor de lucrări publice şi particulare. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.
46	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Pomul Verde, 12. Bucureşti 2.
47	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GH. Inginer, Administrator delegat al Soc. „Sarotec" S. A. R. — Str. B. Mussolini, 22/II. Bucureşti 3.
48	1938, Aug. 31	CONSTANTINESCU G. G. Licenţiat în Matematici. Profesor Secundar. — Str. Isvor 47. Bucureşti 2.
49	1895, Sep. 15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General.—Senator. Fost Ministru.—Aleea Vulpache, 7. (Parcul Filipescu) Bucureşti 3.
50	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer, Diplomat dela Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Inginer ordinar cl. II. Conducătorul Imprimeriei C. F. R. Asistent suplinitor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". — Imprimeria C. F. R. Bucureşti-Sud.
51	1936, Febr. 27	COŞEREANU ION. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politechnice din Timişoara. — Inginer în Biroul de studii Avioane al Uzinei I. A. R. din Braşov. — Fabrica de avioane I. A. R. Braşov.
52	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer. — Director General al Fabricei de Hârtie „Letea". — Fabrica de hârtie „Letea". Bacău.
53	1936, Aug. 25	DĂSCĂLESCU HR. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Dogărie, 38. Focşani.
54	1936, Febr. 27	DROSESCU GH. ION. Inginer mecanic. Director al uzinelor Astra şi Unio. Str. Belgrad, 2. Bucureşti 3.

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

55	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef. — Inspector tehnic C. F. R. — Str. Principele Nicolae, 32. Craiova.
56	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti. — Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti 6.
57	1936 Febr. 27	DUMITRESCU C. I. Inginer Electromecanic dela S. P. B. — Asistent la „Rezistenţa Materialelor" la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Inginer la Direcţiunea Economatului C. F. R. – Str. Temişana, 42/II. Bucureşti 2.
58	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Str. G. D. Palade, 72. Bucureşti 3.
59	1935, Apr. 10	FLORESCU M. ULPIU. Inginer constructor (S. P. B.) Inginer în Direcţia de Poduri C. F. R. — Şeful Secţiei de Construcţii a Ferry-boat-ului, Giurgiu. — Str. Regele Carol II, 20. Giurgiu.
60	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Căpitan de Artilerie Licenţiat în Matematici. Brevetat al Şcoalei Superioare de Război. — Str. G-ral Angelescu, 2. Bucureşti 2.
61	1928, Mai 9	FUNDĂŢEANU C. ION. Inginer, Diplomat E. P. Z. — Director General al Oficiului Central de Licitaţii din Ministerul Finanţelor. — Aleea N. Ionescu, 3 (Parcul Delavrancea). Bucureşti 2.
62	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Str. Dionisie, 19. Bucureşti 1.
63	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer. Fost Secretar General al Ministerului de Lucrări Publice şi Comunicaţii. Fost Preşedintele Regiei P. C. A.— Profesor la Şcoala Superioară de Războiu. — Str. Wilson, 13. etaj II, apart. 7. Bucureşti 1.
64	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General Directorul General al Serviciului de Indiguiri şi Desecări. — Str. G. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
65	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. N. Inginer. — B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
66	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului superior de Statistică din Paris. — Secretar al Institutului de Statistică Generală a Statului. Profesor la Şcoala de Statistică. — Str. Pescari, 1 bis. Bucureşti 4.
67	1934, Dec. 19	GEORGESCU-VAL. N. ION. Căpitan de Artilerie. Inginer Electro-Mecanic, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara.—Membru în Comisia de recepţie la Uzinele „Schneider". — Rue de Fécamp, 18. Le Havre. France.
68	1938, Aug. 31	GHEORGHIEŞ AL. General de Artilerie. — Str. Mocsony 11. Cluj.
69	1936, Febr. 27	GHEORGHIU C. ADR. Licenţiat în Matematici.—Str. G-ral Magheru, 32. Bucureşti 2.
70	1932, Apr. 20	GHEORGHIU TH. GH. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala de ofiţeri de Geniu. — Parcul Iancului. Şos. Vatra Luminoasă, 55. Bucureşti 4.
71	1914, Ian. 8	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3.

72	1913, Aug. 30	GHEORGHIU A. MIRCEA. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Subdirectorul Navigaţiei Fluviale Române. — Str. Vasile Lascăr, 111. Bucureşti 3.
73	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Ştiinţele Matematice. Diplomat al Institutului de Statistică al Universităţii din Paris.—Director în Ministerul de Finanţe. — Str. Robert de Flers, 3. Bucureşti 3.
74	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Coferenţiar la Şcoala Politehnică din Timişoara. Dirigintele Oficiului Învăţământului P. T. T. — Palatul P. T. T. Timişoara.
75	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. A. Maior. Inginer Radio-electrician. E. S. E. — Str. Chişinău, 12. Bucureşti 2. Telefon 5-4547.
76	1936, Aug. 25	GHIŞOIU I. PETRE. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice „Regele Carol II" din Bucureşti. Inginer la Uzinele de fier şi domeniile din Reşiţa S. A. — Str. Răspântiilor, 17. Bucureşti 3.
77	1931, Mart. 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor titular definitiv la Liceul „Dr. Ioan Meşotă" din Braşov, — Str. Carmen Sylva, 7. Braşov.
78	1910, Iunie 21	GRIGORESCU C. Inginer. — Antreprenor de lucrări publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4.
79	1936, Febr. 27	GUŢU AL. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti, Secţia Electricitate şi Mecanică. — Inginer la Societatea Petroşani. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2.
80	1920, Iun. 10	GUTZU VICTOR. Inginer. — Parcul Filipescu. Str. Andrei Mureşanu, 23. Bucureşti 3.
81	1927, Ian. 28	HANGANU D. M. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti şi al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la C. A. M. Asistent la Şc. Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti 6.
82	1924, Ian. 30	IANCULESCU ROMULUS. Inginer-Şef. — Licenţiat în Matematici. — Şeful serviciului M. II Mărfuri din Direcţia Mişcării C. F. R. Str. Petre Poni, 7. Bucureşti 2.
83	1922, Mai 10	ILIESCU GH. Inginer-Şef. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6.
84	1895, Sept. 15 (fondator)	IOACHIMESCU GH. ANDREI. Inginer-Şef. — Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2.
85	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer. — Directorul Fabricei de Timbre. — Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6.
86	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer. — Antreprenor. — Str. Paris, 28. Bucureşti 3.
87	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
88	1936, Febr. 27	IONESCU P. HARALAMBIE. Licenţiat în Matematici. — Str. Popa Nan, 12, Bucureşti 4.

89	1895, Sept 15 (fondator)	IONESCU I. Inginer Inspector General în Retragere. — Profesor onorar al Şcoalei Politehnice „Regele Carol II" din Bucureşti. Membru corespondent al Academiei Române.—Str. Răsuri, 25. Bucureşti.
90	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR C. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Precupeţii Vechi, 40. Bucureşti 3.
91	1936, Febr. 27	IONESCU-ŢIU C. Lt. din Geniu. Licenţiat în Matematici. — Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.
92	1932, Apr. 20	IONESCU-ZANE D. GH. Inginer. — Şeful Serv. Aprovizionărilor din Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — Str. Popovici, 38. Parcul Delavrancea. Bucureşti 3.
93	1936, Febr. 27	ISTRATI CONSTANTIN. Lt.-Comandor-Inginer, Diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică din Paris. — Preşedintele Comisiei Militare M. Aerului şi Marinei în Uzinele I.A.R. din Braşov.— Str. Dr. Baiculescu, 15. Braşov.
94	1912, Iunie 2	JIJIE ADAM. Căpitan-Comandor în rezerva Marinei. Licenţiat în Ştiinţe. Inginer electrician. — Concesionarul luminatului electric şi al alimentării cu apă din Sulina. — Sulina.
95	1924, Ian. 30	KAUFMAN N. Inginer. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Şef de Serviciu în Direcţiunea Generală C. F. R. — Str. G-ral Manu, 26. Bucureşti 2.
96	1936, Febr. 27	LAMOTH PETRU. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Profesor la Liceul „Banaţia". — Piaţa Tebec, 2. Timişoara.
97	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Inginer. — Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer-Şef.—Directorul Monetăriei Naţionale. Asistent la Şcoala Politehnică.—Str. Sf. Elefterie, 19 Bucureşti 6.
98	1934, Dec. 19	LEONIDA D-TRIE. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara.—Str. Salcâmilor, 9. Bucureşti 3.
99	1919, Sept. 12	LINTEŞ ION. Cpt. Comandor în Aeronautică Conferenţiar suplinitor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II". Inginer aeronautic (E. S. N. A. - Paris). Membru corespondent al Academiei de Ştiinţe din România. — Direcţia Generală a Armamentului U. D. R. (Reşiţa). — Str. Epicol, 49. Bucureşti 6.
100	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. General. — Comandantul Brigăzii de Artilerie de Gardă —Str. Spătarului, 54. Telefon 2-0940. Bucureşti 1.
101	1935, Aug. 22	LIVADA F. GRIGORE Licenţiat în Matematici.—Profesor secundar.— Liceul Militar „D. A. Sturdza". Craiova.
102	1934, Dec. 19	MALAXA ELENA. Profesoară de Matematici.—Str. Aurel Vlaicu, 36. Bucureşti 3.
103	1934, Dec. 19	MALAXA N. Inginer. — Industriaş. — Aleea Alexandru, 38. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
104	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3.
105	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer, Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris. — Inginer la Uzinele Reşiţa. — U. D. R. Reşiţa.

106	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Mare industriaş.—Str. Mussolini, 27. Bucureşti 3.
107	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer —Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Imprimeriei Naţionale. — Str. Lânăriei, 80. Vila 26. Bucureşti 6.
108	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef.—Direcţia Generală a Drumurilor. — B-dul Bonaparte, 20 (Alee). Bucureşti 3.
109	1922, Mai 10	MATEESCU CR. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Subdirector la Soc. „Electrica" Bucureşti.—Calea Dorobanţilor, 1. Vila B. Bucureşti 3.
110	1927, Mai 11	MEREUŢĂ V. Inginer. — Subdirector Direcţiunea de Întreţinere C. F. R. — Str. Dan Vodă, 3. Bucureşti 2.
111	1935, Noem. 5	MIHĂILEANU N. N. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Moise Nicoară".—Arad.
112	1929, Ian. 31	MIHĂILESCU P. TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Cantemir-Vodă" din Bucureşti. — Str. Dionisie Eclesiarhul, 15. Bucureşti 2.
113	1921, Febr. 5	MIHALOPOL C. Inginer Inspector General. — Subdirector General al Administraţiei Comerciale a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă.—Splaiul Independenţei, 63. Bucureşti 6.
114	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer.—Inginer-Şef la Societatea „Concordia".—Gura Ocniţei. Jud. Dâmboviţa.
115	1934, Dec. 19	MIRESCU PETRE. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „N. Bălcescu" din Brăila.—Str. Galaţi, 71. Brăila.
116	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti.—Directorul Serviciului Exploatării Fabricelor la Casa Autonomă a Monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
117	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Director de Serviciu în Adm. Centrală a Casei Autonome a Monopolurilor. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
118	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de lucrări publice. — Str. Ciprian Porumbescu, 11. Bucureşti.
119	1932, Febr. 21	NEAMŢU PETRE. Inginer.—Director S. T. B. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Str. Roma, 59. Bucureşti 3.
120	1928, Aug. 29	NEGURĂ ST. Licenţiat în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Profesor definitiv la Liceul „Codreanu" din Bârlad.—Str. Dobranici, 16. Bârlad.
121	1936, Aug. 25	NESTOR D-TRU. Inginer.—Str. V. Stroescu, 10. Bucureşti.
122	1910, Mai 21	NICHIFOR A. G. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti şi la Şcoala de Arhitectură Bucureşti.—Str. Magheru, 62. Bucureşti 2.
123	1934, Dec. 19	NICOLAU AL. Inginer — Profesor. — Şcoala Politehnică Timişoara.
124	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-industrial, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti 1923.—Directorul tehnic al Societăţii „Letea".—Fabrica de hârtie „Letea." Bacău.

125	1921, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Direcţiunii Tehnice din Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. Profesor la Şcoala de Conductori de Lucrări Publice din Bucureşti.—Str. Ecoului, 85. Bucureşti 6.
126	1934, Dec. 19	NICOLESCU IOAN RADU. Comandor de Marină (demisionat). — Profesor în particular de Fizico-Matematici.—Piaţa Washington, 2. Etaj III. Bucureşti.
127	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihail Eminescu" din Bucureşti. — Str. Sabinelor, 119. Bucureşti 6.
128	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Şef.—Preşedintele Comisiei de control C. F. R. — Str. Londra, 35. Bucureşti 3.
129	1929, Ian. 31	NICULESCU MIRON. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Sorbona. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cernăuţi. — Seminarul Matematic Cernăuţi şi Str. Paris, 14. Bucureşti 3.
130	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. Director al Institutului Superior de Educaţie Fizică. Director al Şcoalei de Statistică. — Str. Rozelor, 9. Bucureşti 6.
131	1927, Ian. 28	ORĂNESCU O. Inginer-Şef cl. I. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti, Secţia Electro-Mecanică. — Şef de Serviciu la Navigaţiunea Fluvială Română, Galaţi. — Str. Bolintineanu, 2. Galaţi.
132	1913, Oct. 7	ORĂŞANU D. CEZAR. Inginer.—Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. Inginer Cadastral Şcoala Politehnică. Inginer Hotarnic şi Operator Topometru. Licenţiat în Matematici.—Conferenţiar titular la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti la cursul de Construcţii Generale. Profesor suplinitor la cursul de Topografie şi Geodezie. — Str. Sfinţii Voievozi, 9. Bucureşti 2.
133	1910, Mai 21	ORĂŞEANU GR. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Liceul „Gh. Lazăr" din Bucureşti. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti 4.
134	1929, Ian. 31	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Actuar-Expert. Redactor Statistic.—Profesor la Şcoala de Statistică. Asistent Universitar. Inspector actuar la Ministerul de Industrie şi Comerţ.— Str Al. Lahovary, 9. Bucureşti 3. (Telefon 3-4305).
135	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat în Matematici. — Inginer C. F. R. — Str. Edgar Quinet, 5. Bucureşti 1 (Telefon 4-6329).
136	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Director General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D.—Str. Radu-Vodă, 25. Bucureşti 5.
137	1936, Febr. 27	POPESCU N. CORNELIU. Licenţiat în Matematici. — Ziarist. — Locuinţele Fabricei de Zahăr, 1. Giurgiu.

138	1935, Apr. 10	POPESCU VICTOR. Inginer Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent Şcoala Politehnică „Regele Carol II".—Str. Argentina, 44. Bucureşti 3.
139	1934, Dec 19	POPESCU-BOTOŞANI G. Inginer la Subsecretariatul de Stat al Aerului. Uzinele I. A. R. Braşov. — Str. General Berthelot, 65. Bucureşti 1.
140	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Seminarul de Matematici Cernăuţi.
141	1931, Mart. 11	POPP N. Lt.-Comandor. Inginer. Subsecretariatul de Stat al Aerului.—Str. Alecu Russo, 7. Bucureşti.
142	1927, Mai 11	POPP TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Seminarul Pedagogic Universitar şi la Colegiul Naţional „Sf. Sava". — Parcul Delavrancea. Aleea D, 2. Bucureşti 2.
143	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAIL. Inginer-Antreprenor.—B-dul Basarab (Alee), 9. Bucureşti 2.
144	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. Colonel. Ataşat militar pe lângă legaţia română din Paris.—Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
145	1935, Apr. 10	PRAPORGESCU N. Licenţiat în Matematici. — Director general monopolul alcoolului.—Str. Aviator Sănătescu, 28. Bucureşti 2.
146	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. Colonel de Artilerie. — Str. Ana Davila, 25. Bucureşti 6.
147	1927, Mai 14	RACLIŞ RODOLPHE. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Licenţiat în Ştiinţele Fizice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Inginer Diplomat al Şcolii Superioare de Electricitate din Paris. — Directorul Institutului Matematic Român. Profesor Bucureşti. — Aleea Vulpache, 21 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3. (Telefon 2-2444).
148	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer S. N. P. S. — Inginer-Şef în Direcţia de Poduri C. F. R.—Str. Gr. Cantacuzino, 59. Bucureşti 2.
149	1933, Febr. 22	ROŞU AL. AL. Licenţiat în Matematici. Licenţiat în Drept.—Controlor financiar.—Str. Inginer B. Giulini, 9. Bucureşti 6.
150	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti 1.
151	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer.—Director tehnic la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — Str. I. D. Teodoru, 8. Bucureşti 6.
152	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic, Ministerul Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor.— B-dul Elisabeta, 27. Bucureşti 2.
153	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer de Poduri şi Şosele.—Director General al Societătii „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5. (Parcul Ioanid). Bucureşti 3.
154	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer. — Direcţia de Studii C. F. R. Griviţa. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Columb, 7. Bucureşti 3.
155	1938, Aug. 31	SAVIN C. I. Locotenent. Licenţiat în Matematici.—Str. Dr. Lister, 15. Bucureşti 6.

156	1935, Aug. 22	SCHILERU-DILI C. ION. Inginer-Mecanic-Electrician. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Directorul Şcoalelor P. T. T.—Palatul P. T. T.—Timişoara.
157	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer. — Inginer la Consiliul tehnic Superior.—Str. Paleologu, 3. Bucureşti 4.
158	1928, Aug. 29	SERGESCU BARBU. Inginer dela Şcoala de Mine din Paris. Licenţiat în Matematici al Universităţii din Bucureşti. Licenţiat în Drept al Universităţii din Iaşi.—Director tehnic la Societatea „Steaua Română".—Steaua Română-Câmpina.
159	1919, Sept. 12	SERGESCU PETRE. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie.— Profesor la Universitatea din Cluj. Membru al Academiei Internaţionale de Istoria Ştiinţei (Paris), al Academiei Masaryk (Praga). Corespondent al Societăţii de Ştiinţe din Varşovia şi al Societăţii Regale de Ştiinţe din Liège. Laureat al Academiei de Ştiinţe din Paris şi al Academiei Române.—Str. Verde, 3. Cluj.
160	1921, Febr. 5	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Academia de Arhitectură. Director General Tehnic la Municipiul Bucureşti.—Str. Barbu Delavrancea, 43. Bucureşti 2.
161	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Liceul Spiru-Haret. Splaiul Independenţei, 71. Bucureşti 6.
162	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele.—Inginer Inspector General în Corpul Tehnic al Statului. Subdirector General la Direcţia Generală a Drumurilor. — Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
163	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef.—Subdirector Direcţia de Studii C. F. R.—Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3.
164	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Mateiu Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar.—Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3.
165	1938, Febr. 17	STAN AURELIAN. Locotenent de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Absolvent al Şcoalei de Aplicaţie a Artileriei dela Fontainebleau (Franţa). — Str. Dr. Leonte, 8. Bucureşti 6.
166	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer.—Profesor suplinitor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Inginer la Soc. Anonimă Română de Telefoane.—Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.
167	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer.—Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti.—Directorul Societăţii de locuinţe ieftine Bucureşti.—Str. Veronica Micle, 2. Bucureşti 2.
168	1936, Aug. 25	STOICESCU T. T. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Liceul din Dorohoi.—Dorohoi.
169	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. General de rezervă. — Str. Gr. Cantacuzino, 54. Bucureşti 2.
170	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Inginer.—Licenţiat în Matematici.—Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II".—Director tehnic la Direcţiunea Generală P.T.T.—Calea Victoriei, 68-70. Bucureşti. Telefon 3-4611.
171	1900, Noem. 1	TEODOREANU V. Pensionar.—Str. Zlataust, 7. Iaşi.

172	1934, Mai 2	TEODORESCU C. C. Inginer-Şef. — Profesor şi Rector al Şcoalei Politehnice din Timişoara.
173	1911, Mai 18	TEODORESCU V. N. Inginer Inspector General.—Fost Ministru.— Str. Paris, 53. Bucureşti 1.
174	1937, Ian. 28	THEODORU H. Inginer-Antreprenor. — Str. Donici, 27. Bucureşti. Telefon 2-3789.
175	1910, Mai 21	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici.—Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin".—Str. Scaune, 33. Bucureşti 1.
176	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara.—Str. Ismail, 16. Bucureşti 4.
177	1929, Oct. 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Asistentă la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
178	1895, Noem. 1	ŢIŢEICA GH. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Secretar General al Academiei Române. Profesor la Facultatea de Ştiinţe şi la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Profesor agreat la Sorbona.—Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
179	1836, Febr. 27	TOMESCU ST. IOAN. Inginer.—Intrarea Geneva, 4. Bucureşti.
180	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Directorul Uzinelor I. A. R. — Str. M. Eminescu, 4. Braşov.
181	1935, Noem. 5	VÂLCOVICI V. Doctor în Ştiinţele Matematice. Membru corespondent al Academiei Române. — Profesor de Mecanică la Universitatea din Bucureşti. — Str. Londra, 44. Bucureşti 3.
182	1914, Dec. 20	VARDALA I. Inginer Inspector General. Pensionar. Inginer consultant al Comisiunii Europene a Dunării. — Str. Wilson, 13. Bucureşti 1.
183	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer Inspector General.—Profesor şi Subdirector al Liceului Industrial „Regele Carol II". — Str. Polizu, 11. Bucureşti 2.
184	1923, Mart. 26	VASILESCU GR. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti (1919). Doctor al Academiei de Inalte Studii Comerciale şi Industriale din Bucureşti. — Profesor Şcoala Politehnică din Bucureşti. Subdirector în Direcţia Generală a Porturilor şi a Căilor de Comunicaţie pe Apă.—B-dul Pache, 120. Bucureşti.
185	1920, Ian. 10	VASILESCU C. I. Inginer-Şef.—Str. Aviator Ştefan Protopopescu, 36. Bucureşti 2.
186	1932, Apr. 20	VASILIU GH. DAN. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti.—Inginer la Monitorul Oficial.—B-dul Schitu Măgureanu, 47. Bucureşti 1. (Telefon 3-6332).
187	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Inginer de mine şi geodez. — Antreprenor autorizat de Direcţia Cadastrului pentru Geodezie, Cadastru şi Comasare. Asistent supl. la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Cartierul Grant C. F. R. Str. D, 51. Bucureşti 2.

188	1925, Aug. 26	VASILIU M. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 4.
189	1938, Febr. 17	VESCAN T. TEOFIL. Licenţiat în Ştiinţe fizice şi matematice. Profesor-Preparator universitar. — Institutul de Fizică teoretică şi aplicată al Universităţii din Cluj.
190	1936, Febr. 27	VICIU A. A. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Militar din Tg.-Mureş. — Str. Andrei Mureşanu, 30. Tg.-Mureş.
191	1933, Febr. 22	WOINAROSKY R. Licenţiat în Matematici. — Str. Manu Cavafu, 16. Bucureşti 5.
192	1938, Febr. 17	ZAHARIA FLORIAN. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Actuar expert. — Str. Luterană, 19. Bucureşti.
193	1924, Ian. 30	ZAMFIRESCU C. GRIGORE. Inginer, Diplomat S. N. P. S. Bucureşti 1920 şi E. S. A. Paris 1921. — Proprietarul fabricei de avioane „SET". — Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — B-dul Ferdinand, 168. Bucureşti 4. (Telefon 2-3666 domiciliu, 2-5074 birou).
194	1920, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie dela Universitatea din Berlin. — Conferenţiar la Facultatea de Litere şi Filosofie din Bucureşti Str. Maior Ene, 12. (A. N. E. F.) Bucureşti 6.
195	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. Cpt. Comandor Aviator. Inginer diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică şi Construcţii Mecanice din Paris. — Comandant-secund al Şcolii de Ofiţeri de Aviaţie „Regele Carol II". — Str. Sf. Elefterie, 18. Bucureşti.
196	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politehnică din Zürich. — Antreprenor. — B-dul Elisabeta, 57. Bucureşti 2.

†

MEMBRII DECEDAŢI *)

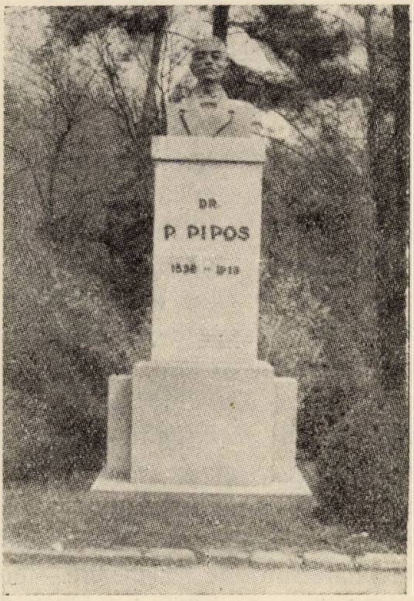
	Data admiterii	Data morţii
1. ANGELESCU A.	1919 Septemvrie 12	1938 Apr. 6
2. BOTEA N.	1932 Aprilie 20	1937 Dec. 18
3. FILIPESCU E. G.	1909 Iulie 1	1937 Noembrie 24
4. MIREA N. ŞT.	1909 Iunie 1	1932 Ian. 15
5. PANAITESCU SC.	1914 Decemvrie 20	1938 Martie 22
6. PATRICIU G. TITUS	1911 Decemvrie 17	1937 Ian. 5
7. POPESCU I.	1922 August 31	1936 Sept. 20

*) Aci sunt trecuţi în ordinea alfabetică numai redactorii şi membrii decedaţi în ultimii 7 ani şi cari au stat la „*Gazeta Matematică*" până la sfârşitul vieţii lor.

PETRU PIPOŞ
(1859 — 1913)

(Cu prilejul împlinirii unui sfert de veac dela moartea sa)

Literatura matematică românească a Ardealului de dinainte de unire este foarte săracă. Ea începe cu primele aritmetici româneşti tipărite în tipografiile din Viena şi Buda, în jumătatea a doua a veacului al XVIII-lea; timp de aproape un secol ele sunt, cu rare excepţii, singurele producţii în acest domeniu. Acestora le urmează, destul de târziu, pe la sfârşitul veacului trecut, primele manuale de matematici de nivelul învăţământului secundar, mai toate traduceri sau prelucrări din germană sau maghiară.



Dată fiind situaţia politică şi culturală de atunci a Românilor din Ardeal, această desvoltare lentă a activităţii în domeniul matematic e aproape normală, în tot cazul explicabilă. Cele mai înalte şcoli româneşti în cari se predau matematicile, în Ardeal, erau liceele, preparandiile (şcoli normale) şi şcoala comercială din Braşov. Numărul acestora laolaltă nu trecea de zece. Lipsa instituţiilor superioare de învăţământ ca Universitatea, Academii, etc. româneşti a fost una din piedecile principale ale desvoltării matematicilor superioare.

Dealtcum învăţământul secundar românesc din Ardeal era un învăţământ clasic, unde se făcea foarte puţină matematică şi ai cărui profesori erau recrutaţi după trebuinţele momentane ale şcoalei, fără a ţine seamă de pregătirea lor. Astfel, de multe ori matematica era predată de profesorul de desemn, istorie etc. Un absolvent de liceu, chiar dacă avea talent pentru matematici, cu o astfel de pregătire cu greu putea urma ingineria sau chiar şi

ştiinţele la vreuna din universităţile străine. Dar şi dintre aceştia o mare parte, desigur nu cei mai puţin talentaţi, treceau peste frontieră în Vechiul Regat, unde puteau spera la un viitor mai sigur decât în provincia de peste munţi.

Viaţa şi activitatea fostului profesor dela preparandia din Arad, PETRU PIPOŞ, primul român ardelean doctor în matematici, dela a cărui moarte se împlineşte un sfert de veac, ilustrează până la evidenţă împrejurările vitrege cu care avea să lupte pe atunci un talent matematic real şi care în alte condiţiuni mai favorabile ar fi putut produce mult. Voiu da în cele de mai jos biografia şi activitatea în domeniul matematicei a acestui dascăl ardelean, care înzestrat de natură cu frumoase calităţi şi cu multă dragoste pentru matematici, silit de împrejurări, a trebuit să părăsească acest domeniu fără să fi putut da măsura adevărată a talentului său, pentru a deveni un ilustru pedagog cunoscut până la marginile cele mai îndepărtate ale românismului.

* * *

PETRU PIPOŞ s'a născut la 29 August 1859 în Alba-Iulia, unde tatăl său era funcţionar de stat. Aici termină şcoala primară, apoi „*în 1867*“ — scrie dânsul în *curriculum vitae* înaintat Facultăţii de ştiinţe din Cluj cu ocazia înscrierii la doctorat — „*mutându-mă cu părinţii la Cluj, am continuat studiile la liceul piarist; încă în clasele inferioare am simţit atracţie spre ştiinţele naturale şi desemnul geometric; înclinarea spre ştiinţele exacte mi s'a desvoltat într'o adevărată pasiune de către admirabilii profesori de matematică ai liceului piarist şi această împrejurare a fost decisivă în alegerea carierii mele*“... La 1875 trece bacalaureatul cu nota „*laudabilis*“ şi se înscrie la Facultatea de ştiinţe a Universităţii maghiare din Cluj, înfiinţată la 1872. A urmat la această Facultate timp de 7 semestre — dela 1876 până la 1880 — cursurile secţiei de matematici şi a celei de fizică, având ca profesori la matematici pe SAMUIL BRASSAI, LUDOVIC MARTIN, AUGUSTIN SCHMID şi MAURIŢIU RHÉTI, iar la fizică pe ANTONIU ABT, întemeietorul şi organizatorul Institutului de Fizică al acelei universităţi.

La data înscrierii lui PIPOŞ la Facultatea de ştiinţe, aceasta împlinea abia al patrulea an de existenţă. Neavând o tradiţie ştiinţifică, cu un corp profesoral în număr redus şi recrutat în

pripă, activitatea ştiinţifică a ei era destul de modestă. Pentru energia lui PIPOŞ prepararea zilnică a lecţiilor ce se predau la Facultate era un domeniu prea îngust, astfel că încearcă toate posibilităţile să-l lărgească. Un prilej bine venit în acest scop era faptul că Universitatea avea obiceiul foarte bun de a stimula aptitudinele studenţilor distribuind anual un număr considerabil de premii pentru cele mai bune lucrări înaintate în decursul anului şcolar asupra subiectelor fixate de către fiecare Facultate. Aceste subiecte se anunţau cu un an înainte şi pentru a asigura imparţialitatea juriului, manuscrisele se înaintau sub pseudonim, numele autorului fiind închis într'un plic, care se desfăcea numai cu ocazia decernării premiului.

Pentru matematici erau fixate de obiceiu două premii de câte 50 de florini, oferite de Municipiul Cluj, şi anume unul pentru o lucrare din domeniul matematicilor elementare, iar al doilea pentru matematicile superioare. In decursul celor patru ani de studii PIPOŞ a prezentat trei lucrări, fiecare din ele fiind premiată.

Pentru anul şcolar 1876/7 problema de matematici era următoare: *„Să se afle curba descrisă de centrul unui cerc cu rază variabilă şi tangent la alte două cercuri date"*. S'au prezentat două manuscrise dintre care cel a lui PIPOŞ avea ca motto: *„In matematică nu există drum regesc.* EUCLID". Comisiunea de examinare a manuscriselor, compusă din profesorii L. MARTIN şi S. BRASSAI constată că lucrarea lui PIPOŞ e scrisă *„atât de ordonat şi logic, având o expunere clară şi naturală, fiecare caz special al rezultatului fiind tratat atât de complet, încât trebue să tragem concluziile cele mai frumoase atât în ceea ce priveşte cunoaşterea materiei cât şi în privinţa talentului didactic şi de expunere al autorului*[1])". Comisiunea hotărăşte deci decernarea premiului lui PIPOŞ, student în anul I al Facultăţii.

In anul următor 1877/8 PIPOŞ prezintă un nou manuscris pentru premiul de matematici elementare având subiectul următor: *„Se va stabili o formulă generală cu ajutorul căreia să se exprime volumul următoarelor poliedre şi anume: al prizmei cu secţiuni paralele sau piezişe, al paralelipipedului, piramidei şi trunchiului*

1) Acta Reg. Scient. Universitatis Claudiopolitanae, anni 1877/8, Cluj, 1877, Fasc. III, p. 95.

de piramidă, conului și trunchiului de con, obeliscului și prismatoidului și care prin înlocuiri corespunzătoare să se poată transforma în formulele singuratice care servesc la calcularea volumelor sus numitelor corpuri geometrice. Formula cerută se va stabili în mod cauzal, adică dedusă din considerații și principii geometrice și se va arăta că se pot transforma în formulele particulare referitoare la fiecare din corpurile enumerate". De astădată comisiunea, aceiași din anul precedent, constată că nu a primit decât o singură lucrare având ca motto „*Formula lui* SIMPSON *se va aplica în așa fel* etc.", care a rezolvat problema pusă atât în general cât și în particular, iar rezolvarea e corectă[1]): Premiul se decerne deci singurului concurent PIPOȘ.

In anul următor PIPOȘ nu prezintă nicio lucrare, dar în anul școlar 1879/80 câștigă din nou premiul de 50 de florini, de astădată cu următoarea lucrare de matematică superioară: „*Se va scrie o monografie despre traectorii*". Se prezintă două manuscrise, cel al lui PIPOȘ având ca motto: „*Adevărul e floarea științei*". Membrii comisiunei, aceeași ca în anii precedenți, constată ce e drept că „*niciuna din lucrări nu are valoare absolută*", dar relevă superioritatea celei a lui PIPOȘ, în care se află și „*un exemplu cu totul nou*", deși greșit. Mai constată că lucrarea lui PIPOȘ e scrisă cu „*îngrijire, inteligență și sârguință*", că „*se exprimă succint și precis*" și că „*face calculele scurt, mărginindu-se a reda formulele dela care pleacă și rezultatul*[2])". Comisiunea obiecționează că lipsește istoricul desvoltării teoriei traectoriilor, face unele observații referitoare la greșeli în ceea ce privește limbajul științific (maghiar) întrebuințat; decide apoi că premiul se acordă lui PIPOȘ.

(Va urma). VICTOR MARIAN.

---

1) Acta Reg. Scient. Universitatis Claudiopolitanae, anni 1878/9, Cluj, 1879, Fasc. II, p. 89.

2) Acta Reg. Scient. Universitatis Claudiopolitanae, anni 1879/80, Cluj 1880, p. 125.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1939

Adunarea generală a Societăţii *Gazeta Matematică* a hotărît, în şedinţa dela 31 August a. c. ţinerea unui concurs de matematici în cursul anului 1939 între elevii liceelor, civile şi militare, din ţară şi între elevii anului preparator a Şcoalei Politehnice „Regele Carol II“.

Concursul va avea loc după Paşti înainte de reînceperea cursurilor, în Bucureşti, unde se va da examen înscris şi oral, dacă Societatea va dispune de mijloace de a aduce candidaţii; dacă vor lipsi aceste mijloace, concursul se va ţine într'o duminică din luna Mai, în diferite centre din ţară, dându-se numai teze.

Deciziunea în această privinţă se va publica în numărul din Februarie 1939.

Fiecare candidat este obligat să se înscrie *la două din materiile clasei sale,* urmând a da, la fiecare, teză, iar în cazul ţinerii concursului în Bucureşti, şi oral.

Pentru unitatea pregătirii, se va publica în numărul din Octomvrie al *Gazetei Matematice* un program, conţinând materia pe care candidatul unei anume clase va trebui să o pregătească pentru obiectul la care e înscris.

Sub niciun motiv candidatul nu va fi scuzat de nepregătirea unor capitole trecute în programul clasei sale, pentru obiectul ales.

Cererile de înscriere se vor trimite direct de candidaţi Societăţii Gazeta Matematică, Calea Griviţei, 158, Bucureşti 2, în plicuri recomandate până cel mai târziu la 31 Decemvrie 1938.

Nu se primesc cereri trimise de părinţi, corespondenţi, profesori sau şcoli.

Cererile vor arăta neapărat, numerotate şi în ordinea arătată aci, următoarele date:

1. Numele şi pronumele, scrise clar.

2. Clasa sau anul pregătitor în care urmează candidatul. Pentru cei pregătiţi în particular se va arăta şcoala la care a urmat anul precedent sau în care a depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă.

3. Adresa în timpul şcoalei şi în timpul vacanţei Paştilor pentru a se putea face comunicările şi înştiinţările necesare.

4. Dacă dispune de mijloace de a veni în Bucureşti, dacă are unde fi găzduit şi întreţinut aci în timpul concursului, sau

dacă unul din aceste mijloace ar urma să fie procurat de Societatea *Gazeta Matematică.*

Dacă are nevoie de bani pentru drum va indica şi gara de unde va lua trenul pentru a veni în Bucureşti şi gara la care se întoarce după concurs.

5. Cele două materii la care se înscrie.

6. Activitatea sa la *Gazeta Matematică, Suplimentul cu exerciţii al Gazetei Matematice,* sau la alte reviste din ţară şi străinătate.

Candidaţii înscrişi la concurs, dacă din diferite motive nu se mai pot prezenta, sunt obligaţi să anunţe din timp.

Părăsirea sălilor de concurs înscris este interzisă înainte de predarea tezelor.

Se atrage atenţiunea că toate condiţiunile, pentru înscriere şi ţinerea concursului, trebuesc respectate cu toată exactitatea inerentă ştiinţelor matematice.

In numărul 6 din Februarie 1939 al *Gazetei Matematice* se va publica modul de ţinere al concursului, localitatea, orele de prezentare şi numele candidaţilor admişi la concurs.

Numărul celor admişi va depinde de sacrificiile materiale ce se vor cere Societăţii *Gazeta Matematică,* pentru transportul, găzduirea şi întreţinerea candidaţilor şi de pregătirea pe care aceştia vor arăta-o în cererile ce vor face.

Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi ulterior diplome, recompense, premii sau menţiuni. Primul care va reuşi la concurs, dintre elevii anului preparator de pe lângă Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti, va primi premiul «ANGHEL SALIGNY» (de 1000 lei) oferit de un membru al Societăţii noastre, iar primul reuşit dintre toţi candidaţii va primi premiul « LT.-COL. G. TĂNĂSESCU» în cărţi, în conformitate cu înştiinţarea făcută în acest număr la articolul: *Premii, burse şi publicaţii, din fondurile speciale ale Societăţii „Gazeta Matematică".*

Comisiunea examinatoare se va compune din membrii Societăţii *Gazeta Matematică,* cari nu vor avea rude printre candidaţii admişi la concurs.

DELEGAŢIA SOCIEŢII.

PREMII, BURSE ŞI PUBLICAŢII, DIN FONDURILE SPECIALE ALE SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“

I. *Premii.*

Din donaţiunile unui mare număr de membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*, în Martie anul acesta a luat fiinţă „Fondul general de premii al *Gazetei Matematice*“, din al cărui venit, adăogat la venitul fondurilor mai vechi, se vor putea acorda, de aci înainte, *în fiecare an*, următoarele premii:

1. *Premiul anual de aritmetică*, în valoare de 5000 lei, indivizibil, destinat să se atribue celei mai bune lucrări de aritmetică (articol, notă, problemă rezolvată) publicată în decursul unui an în *Gazeta Matematică*. Autorul lucrării premiate trebuie să fie român, elev de liceu, de Şcoală militară, de Şcoală Politehnică sau student de Facultate din ţară.

Pentru prima oară, premiul acesta se va referi la lucrările publicate în Volumul 43 al *Gazetei Matematice* (1937 — 1938).

Comisiunea care va decerne premiul îşi va prezenta raportul său Adunării generale a Societăţii *Gazeta Matematică* din Februarie 1939, iar acest raport se va publica în numărul *Gazetei Matematice* din Martie 1939.

2. *Premiul anual de geometrie elementară*, în valoare de 5000 lei, destinat celei mai bune lucrări de geometrie elementară publicată în decursul unui an în *Gazeta Matematică*. Şi acest premiu se va referi pentru prima oară la lucrările publicate în Volumul 43, în aceleaşi condiţii ca mai sus, raportul Comisiunii care va decerne premiul urmând să se publice în numărul *Gazetei Matematice* din Iulie 1939.

3. *Premiul anual de algebră*, în valoare de 5000 lei, cu aceleaşi condiţii ca şi cele două precedente, se va acorda anul acesta pentru prima oară, pe baza lucrărilor din Volumul 43 şi raportul de premiare va apare în numărul *Gazetei Matematice* din Mai 1939.

4. *Premiul anual „Vasile Cristescu“*, în valoare de 5000 lei, destinat celei mai bune lucrări de *trigonometrie*, se va acorda anul acesta, în aceleaşi condiţii ca şi premiile de mai sus, alegându-se dintre lucrările publicate în Volumul 43. Raportul de premiare va apare în numărul *Gazetei Matematice* din Iunie 1939.

Cu acelaşi regulament, însă cu o valoare mai mică, premiul acesta a fost decernat regulat de *Gazeta Matematică*, de mai mulţi ani. Pe anul 1936 — 1937 însă, premiul n'a fost atribuit nimănui, din lipsa unor lucrări de trigonometrie suficient de valoroase, printre cele publicate în Volumul 42.

5. *Premiul anual „Spiru Haret"* în valoare de 5000 lei, se va acorda cu începere din anul acesta, în aceleaşi condiţii ca şi premiile de mai sus, celei mai bune lucrări de *mecanică sau astronomie* dintre cele publicate în decursul unui an în *Gazeta Matematică*.

Aşa dar sub această nouă formă, acest premiu se va acorda pentru prima oară alegându-se între lucrările apărute în Volumul 43 (1937 — 1938). Raportul de premiare va fi publicat în numărul *Gazetei Matematice* din August 1939.

In conformitate cu regulamentul ce acest premiu a avut până acum, pentru anul 1936 — 1937, din venitul fondului *„Spiru Haret"* s'au donat cărţi de matematică liceului de băeţi „Codreanu" din Bârlad.

6. *Premiul anual „Vasile Conta"*, în valoare de 4000 lei, pentru lucrări de *filozofia matematicilor*, urmează să se acorde pe anul 1938—1939 de Adunarea generală a Societăţii *Gazeta Matematică* din August 1939, pentru lucrări originale aduse la cunoştiinţa Societăţii până la 1 Iulie 1939.

Cu prevederile regulamentului ce acest premiu a avut până acum, el a fost decernat pe anul 1936—1937 D-lui T. VESCAN pentru lucrarea sa „Axiomatica numerelor întregi", iar pe anul 1937-1938 n'a fost atribuit nimănui, neprezentându-se nici o lucrare suficient de valoroasă.

7. *Premiul Inginer H. Capriel*, se va decerne de aci înainte, din venitul fondului cu acelaşi nume, *din 5 în 5 ani*, pentru lucrări de *matematici superioare*.

In numărul *Gazetei Matematice* din Mai 1939 vor apare chestiunile ce se vor propune de o Comisiune, pentru acordarea acestui premiu. Aceste chestiuni vor reapare în fiecare an în numărul *Gazetei Matematice* din Mai, până în 1942 inclusiv, iar premiul va fi decernat cu aprobarea Adunării generale a Societăţii *Gazeta Matematică*, în August 1943, publicându-se raportul în Octomvrie 1943.

8. *Premiul General Scarlat Panaitescu*, în conformitate cu prevederile noului regulament, se va decerne de aci înainte, din venitul fondului cu acelaşi nume, *din 5 în 5 ani*, celei mai bune lucrări de *Matematică aplicată la Ştiinţele militare*, ajunsă la cunoştinţa Societăţii *Gazeta Matematică*.

Potrivit vechiului Regulament, *premiul „General Scarlat Panaitescu"* pe anul 1936—1937, a fost decernat D-lor Căpitani BĂNULESCU MIHAIL şi DRAGOMIRESCU BUZNE, pentru lucrarea *„Construcţii de Guri de foc"* litografiată la Şcoala de aplicaţie a Artileriei, Timişoara.

In numărul de faţă al *Gazetei Matematice* apare raportul Comisiunii pentru anul 1937—1938, raport care va servi împreună cu rapoartele anilor următori, la decernarea în 1942 a premiului pentru perioada 1937—1942.

9. *Premiul anual „Lt.-Colonel Gh. A. Tănăsescu"* constă din cărţi de matematici, cuprinzând din venitul anual al fondului cu acelaşi nume, şi care se dau *primului clasificat la Concursul anual al Gazetei.*

Anul acesta cărţile au fost date D-lui ŞTEFĂNESCU D. N., elev la Mânăstirea Dealu.

10. *Premiul anual „N. G. Botea"*, se acordă din venitul fondului cu acelaşi nume, pentru lucrări de *geometria triunghiului şi a tetraedrului.*

Pentru prima oară acest premiu va avea în vedere lucrările de acest fel din Volumul 43. Premiul va fi decernat de către Adunarea generală a *Gazetei Matematice* din August 1939 şi raportul cu premiare va apare în numărul *Gazetei Matematice* din Ianuarie 1940.

11. *Premiul anual „Inginer Al. Roşu"* se acordă din venitul fondului cu acelaşi nume, şi este destinat să distingă pe cel mai activ corespondent al *Gazetei Matematice.* Pentru corespondenţii care şi-au văzut lucrările tipărite în Volumul 43 (1937—1938), premiul va fi decernat de Adunarea generală a Societăţii *Gazeta Matematică* din Februarie 1939, raportul Comisiunii care va recomanda pe premiant urmând să fie publicat în numărul *Gazetei Matematice* din Aprilie 1939.

In baza prevederilor vechiului regulament, acest premiu a fost atribuit pe 1936—1937, pentru o lucrare de geometrie elementară, D-lui FLORESCU L. VICTOR, elev la Mânăstirea Dealu.

Pentru a se da posibilitate corespondenţilor *Gazetei Matematice* să ia cunoştinţă amănunţită de toate condiţiile privitoare la cele 11 premii de mai sus, în numărul de faţă se dau ca supliment, regulamentele lor complete.

Membrii Societăţii *Gazeta Matematică* oferind atâtea premii, întreţin speranţa că prin ele influenţa *Gazetei Matematice* asupra învăţământului matematicilor din ţară va fi sporită încă mai mult, contribuind şi ele la întărirea emulaţiei la muncă susţinută şi originală printre corespondenţii harnici, din ce în ce mai numeroşi, ai *Gazetei.*

II. *Burse.*

Din venitul fondului „*Profesor Ion Ionescu*", Societatea *Gazeta Matematică* are a acorda o bursă anuală, în valoare de 27.000 lei (câte 3000 lei pe 9 luni: Octomvrie — Iunie) unui student din Şcoala Politehnică din Bucureşti, Secţia Construcţii.

In cei doi ani de până acum, dela înfiinţarea acestei burse, ea n'a putut fi acordată, din lipsă de candidaţi care să împlinească condiţiile regulamentului.

III. *Publicaţii.*

In Biblioteca technică a *Gazetei Matematice,* din fondul „*Anghel Saligny*", în cursul anului trecut nu s'a făcut nici o publicaţie.

Din fondurile curente ale *Gazetei Matematice,* s'au tipărit anul acesta următoarele:

1. Culegere de probleme de algebră, Partea I, ediţia IV, de D-l A. G. IOACHIMESCU, sub îngrijirea D-lor Profesori O. N. ŢINO şi C. IONESCU-BUJOR.

2. Culegere de probleme de trigonometrie, partea II, de V. CRISTESCU, revăzută şi adăogită de D-l Profesor GH. TH. GHEORGHIU.

COMISIUNEA ÎNSĂRCINATĂ CU ADMINISTRAREA FONDURILOR SPECIALE ALE „GAZETEI MATEMATICE"

Ing. D. A. STAN şi Ing. D. STOICA.

NOTE MATEMATICE

1. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]). Pentru $n = 3$ şi N_p începând cu 6 am găsit următoarele 146 soluţiuni:

N_p	N	N_p	N
601 579 842	1 804 739 526	625 401 978	1 876 205 934
601 597 842	1 804 793 526	625 417 980	1 876 253 940
601 745 982	1 805 237 946	625 419 780	1 876 259 340
601 974 582	1 805 923 686	640 152 789	1 920 458 367
601 978 254	1 805 934 762	640 152 879	1 920 458 637
602 157 984	1 806 473 952	640 195 782	1 920 587 346
602 159 784	1 806 479 352	640 217 958	1 920 653 874
602 174 598	1 806 523 794	640 219 578	1 920 658 734
602 197 458	1 806 592 374	640 278 915	1 920 836 745
602 489 751	1 807 469 253	640 287 915	1 920 863 745
602 498 751	1 807 496 253	641 502 789	1 924 508 367
602 541 978	1 807 625 934	641 502 879	1 924 508 637
610 249 875	1 830 749 625	641 527 890	1 924 583 670
612 489 750	1 837 469 250	641 528 790	1 924 586 370
612 498 750	1 837 496 250	641 795 802	1 925 387 406
615 798 402	1 847 395 206	641 795 820	1 925 387 460
615 798 420	1 847 395 260	641 957 802	1 925 873 406
617 459 802	1 852 379 406	641 957 820	1 925 873 460
617 459 820	1 852 379 460	642 017 958	1 926 053 874
617 982 540	1 853 947 620	642 019 578	1 926 058 734
619 745 802	1 859 237 406	642 179 580	1 926 538 740
619 745 820	1 859 237 460	642 195 780	1 926 587 340
619 782 540	1 859 347 620	642 789 015	1 928 367 045
619 780 254	1 859 340 762	642 789 150	1 928 367 450
620 157 984	1 860 473 952	642 879 015	1 928 637 045
620 159 784	1 860 479 352	642 879 150	1 928 637 450
620 174 598	1 860 523 794	647 501 289	1 942 503 867
620 197 458	1 860 592 374	647 502 891	1 942 508 673
621 579 840	1 864 739 520	647 512 890	1 942 538 670
621 597 840	1 864 793 520	647 528 901	1 942 586 703
621 974 580	1 865 923 740	648 750 129	1 946 250 387
624 987 501	1 874 962 503	648 750 291	1 946 250 873
624 987 510	1 874 962 530	648 751 029	1 946 253 087
625 401 798	1 876 205 394	648 751 290	1 946 253 870

1) Urmare la Nota cu acelaş titlu dela pag. 581 Vol. XLIII.

N_p	N	N_p	N
648 752 901	1 946 258 703	654 027 918	1 962 083 754
648 752 910	1 946 258 730	654 029 178	1 962 087 534
648 901 275	1 946 703 825	654 178 029	1 962 534 087
648 902 751	1 946 708 253	654 178 290	1 962 534 870
648 910 275	1 946 730 825	654 179 028	1 962 537 084
648 927 501	1 946 782 503	654 179 280	1 962 537 840
648 927 510	1 946 782 530	654 180 279	1 962 540 837
649 012 875	1 947 038 625	654 182 790	1 962 548 370
649 028 751	1 947 086 253	654 190 278	1 962 570 834
649 102 875	1 947 308 625	654 192 780	1 962 578 340
649 128 750	1 947 386 250	654 278 019	1 962 834 057
649 287 501	1 947 862 503	654 278 190	1 962 834 570
650 127 489	1 950 382 467	654 279 018	1 962 837 054
650 128 749	1 950 386 347	654 279 180	1 962 837 540
650 142 789	1 950 428 367	654 280 179	1 962 840 537
650 142 879	1 950 428 637	654 281 790	1 962 845 370
650 274 891	1 950 834 673	654 290 178	1 962 870 534
650 287 491	1 950 862 473	654 291 780	1 962 875 340
650 287 914	1 950 863 742	657 801 942	1 973 405 826
651 027 489	1 953 082 467	657 819 402	1 973 458 206
651 274 890	1 953 824 670	657 819 420	1 973 458 260
651 287 490	1 953 862 470	657 821 940	1 973 465 820
651 402 789	1 954 208 367	657 940 182	1 973 820 546
651 402 879	1 954 208 637	657 941 802	1 973 825 406
651 427 890	1 954 283 670	657 941 820	1 973 825 460
651 428 790	1 954 286 370	657 942 018	1 973 826 054
652 748 901	1 958 246 703	657 942 180	1 973 826 540
652 748 910	1 958 246 730	658 017 942	1 974 053 826
652 789 014	1 958 367 042	658 021 794	1 974 065 382
652 789 140	1 958 367 420	658 179 402	1 974 538 206
652 874 901	1 958 624 703	658 179 420	1 974 538 260
652 874 910	1 958 624 730	658 201 794	1 974 605 382
652 879 014	1 958 637 042	658 217 940	1 974 653 820
652 879 140	1 958 637 420	659 401 782	1 978 205 346
654 017 829	1 962 053 487	659 402 178	1 978 206 534
654 017 928	1 962 053 784	659 417 802	1 978 253 406
654 018 279	1 962 054 837	659 417 820	1 978 253 460
654 019 278	1 962 057 831	659 420 178	1 978 260 534
654 027 819	1 962 083 457	659 421 780	1 978 265 340

(Va urma).

G-L GH. BUICLIU.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Buenos Aires. Tomul CXXV. Nr. 4. Aprilie 1938. DR. NICOLÁS LOZANO. Nota necrólogica.

Idem. Tomul CXXV. Nr. 5. Mai 1938. Sistemele de inecuaţii lineare şi aplicaţiile lor la studiul corpurilor convexe, de F. LA MENZA.

Idem. Tomul CXXV. Nr. 6. Iunie 1938. Asupra seriilor duble asimptotice, de J. C. VIGNAUX.

Mathesis publicată de AD. MINEUR. Tome LII. Nr. 6 — 7. Iunie-Iulie 1938. Note de geometrie elementară, de AD. M. Asupra proprietăţilor infinitesimale ale curbei logaritmice, de R. GOORMAGHTIGH. Asupra triunghiului podar, de V. THÉBAULT. Generalizarea unei teoreme relative la locul ortopolurilor unei drepte în raport cu triunghiurile determinate de punctele de intersecţie ale unor hiperbole, de J. BILO. Asupra puterilor numerelor întregi de forma $m^2+amn+bn^2$, de A. GLODEN. Determinarea tangentelor unghiurilor lui BROCARD şi STABNER în funcţie de segmentele toriceliene, de V. G. CAVALLARO. Asupra sistemelor de ecuaţii diferenţiale lineare, de J. LEEMANS. O limită superioară a rădăcinilor pozitive ale ecuaţiilor algebrice, de E. FRANCKX. Asupra mişcării unei figuri plane variabilă cu păstrarea similitudinii, ale cărei trei drepte trec prin trei puncte fixe sau când trei puncte descriu trei drepte fixe, de N. ABRAMESCU. Observări asupra produselor indefinite de factori, primari, de R. H. GERMAY.

Sphinx. Bruxelles. Anul 8. Nr. 9. Septemvrie 1938.

Formele geometrice în natură, de A. SAINTE-LAGUE. Problema celor RN linii, de T. R. DAWSON. Factorizarea lui $2^n \pm 1$, de M. KRAITCHIK.

T. VESCAN. *The cosmogonical problem of the annihilation of the sun's mass, and the evolution of the planetary orbits.* Tipografia Românească. Timişoara 1938.

T. VESCAN. *Mecanica* şi *Teoria realităţii.* Cluj 1938.

E. ARGHIRIADE. Géométrie axiale différentielle des courbes gauches (Extras din Annales scientifiques de L'Université de Jassy).

ALEXANDRU I. STOENESCU. *Probleme de Mecanică. Statica.* Bucureşti 1938. (Litografiat).

D-l Inginer AL. I. STOENESCU a adunat, în o broşură de 244 pagini, formatul 27×21, un număr de 500 probleme de statică pentru uzul elevilor-ingineri din Şcolile Politehnice, care însă pot fi de folos şi studenţilor Facultăţilor de ştiinţe.

Capitolele pentru care sunt date probleme sunt următoarele: Forţe concurente, compuneri; Echilibrul punctului; Elemente mecanice în plan, forţe paralele, cuple, forţe oarecare; Echilibrul corpurilor supuse la forţe şi legături situate în acelaşi plan; Echilibrul sistemelor de corpuri; Elemente mecanice în spaţiu forţe paralele, cuple, forţe oarecari; Echilibrul corpurilor

supuse la forţe şi legături în spaţiu; Centre de greutate, linii; Centre de greutate, suprafeţe, centre de presiune şi de percursiune; Centre de greutate, corpuri solide; Grinzi; Sisteme articulate plane; Frecarea; Maşini simple.

Broşura are două părţi; una cu *Enunţurile* problemelor şi alta, la urmă, cu *Rezultate şi Indicaţiuni.* Ea este alcătuită în genul *Culegerilor de Probleme* din *Biblioteca Gazetei Matematice.*

Pentru ca aceia care se ocupă de aceste probleme să fie mai interesaţi la studiul lor, autorul a dat nu numai aplicaţiuni de *mecanică raţională* ci a trecut şi în domeniul *mecanicii tecnice.* Cu modul acesta, Culegerea este foarte folositoare elevilor-ingineri şi le-o recomandăm să se folosească de ea pentru consolidarea cunoştinţelor de mecanică în vederea aplicaţiunilor ei la Rezistenţa Materialelor şi Stabilitatea Construcţiunilor.

I. I.

J. REY PASTOR. *Limites de las Funciones Reales en Espacios Abstractos.* Publicată de Institutul matematic Hispano-Americano. Buenos Aires 1937.

J. REY PASTOR. *Métrica e integracion en los espacios abstractos.* Publicată de Institutul matematic Hispano-Americano. Buenos Aires 1937.

JOSE BABINI. *Series cuyos coeficientes contienen factoriales.* Publicată de Institutul matematic Hispano-Americano. Buenos Aires 1937.

SIXTO RIOS. *Hiperconvergencia de las series Dirichlet.* Publicată de Institutul matematic Hispano-Americano. Buenos Aires 1937.

A. GONZALES DOMINGUEZ. *Generalizacion de un teorema de* CANTELLI. Tipărită de Institutul matematic Hispano-Americano. Buenos Aires 1937.

CARLOS BIGGERI. *Singularidades de las funciones analiticas.* Tipărită de Institutul matematic Hispano-Americano. Buenos Aires 1937.

JOSE FAYET. *Sur les équations différentielles linéaires.* Tipărită de Institutul matematic Hispano-Americano. Buenos Aires 1937.

CERERI

280. Cunoscutul bibliograf D-l ANDREI VERESS, într'un articol despre *«Tipografia românească din Buda»*, publicat în revista *«Boabe de Grâu»* din Decemvrie 1932, afirmă că în anul 1780 a apărut în acea tipografie *«o aritmetică românească şi nemţească»*.

Informându-mă la D-l VERESS dacă a avut în mână menţionata aritmetică, dânsul mi-a scris că nu a văzut-o şi a citat-o numai după catalogul cărţilor româneşti ale tipografiei din Buda.

Nu se găseşte oare undeva vre-un exemplar din această aritmetică?

VICTOR MARIAN.

DIVERSE

a) Şedinţele Societăţii „Gazeta Matematică".

La 31 August 1938 a avut loc Adunarea Generală anuală a Societăţii *Gazeta Matematică*, când s'au ales următoarele comisiuni pentru:

a) *Premiul « Spiru Haret »*. D-nii: CEZAR ORĂŞANU, D. STAN şi V. VÂLCOVICI.

b) *Premiul « Vasile Cristescu »*. D-nii: AL. BUNESCU, G. T. GHEORGHIU şi MIRON NICOLESCU.

c) *Premiul « Al. Roşu »*. D-nii: G. DUMITRESCU, AL. AL. ROŞU şi CPT. COMANDOR GR. ZAPAN.

d) *Premiul de Algebră*. D-nii: TH. ANGHELUŢĂ, P. SERGESCU şi D. STAN.

e) *Premiul de Aritmetică*. D-nii: GENERAL GH. BUICLIU, I. IONESCU şi CPT. COMANDOR GR. ZAPAN.

f) *Premiul de Geometrie*. D-nii: AL. BUNESCU, C. IONESCU-BUJOR şi G. ŢIŢEICA.

Se hotărăşte ţinerea concursului anual şi în 1939, cu condiţiunile arătate în cuprinsul acestui număr; de asemenea se arată în acest număr compunerea redacţiei Volumului XLIV astfel cum a fost constituită în şedinţă.

Sunt aleşi membri ai Societăţii D-nii: G. G. CONSTANTINESCU, GENERAL AL. GHEORGHIEŞ, LOCOTENENT I. C. SAVIN.

b) Sporirea Bibliotecii.

Docteur PROMPT. Démonstrations nouvelles de théoremes de FERMAT et de WILSON. Paris 1913.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

Dr. A. KEMPE. Der grosse Fermatsche Satz. Versuch einer Beweisführung. Zweite verbesserte Auflage. Amsterdam 1913.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2682. *Să se determine arcul* a, *astfel ca să avem:*

$$(1) \qquad \sum_{1}^{n} \cos na + \frac{1}{2} = 0$$

$$(2) \qquad \sum_{1}^{n} \sin na - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{a}{2} = 0.$$

L. TEODORIU.

Soluție. Ținând seamă de relațiile cunoscute:

$$\cos a + \cos(a+h) + \ldots + \cos[a+(n-i)h] = \frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(a+\frac{n-i}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

$$\sin a + \sin(a+h) + \ldots + \sin[a+(n-i)h] = \frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\left(a+\frac{n-i}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

relațiile din enunț devin:

$$(1') \qquad 2\cos\frac{n+1}{2}a\sin\frac{na}{2} - \sin\frac{a}{2} = 0$$

$$(2') \qquad 2\sin\frac{n+1}{2}a\sin\frac{na}{2} - \cos\frac{a}{2} = 0$$

care pot fi puse respectiv sub forma:

$$(1'') \qquad \left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)a - \sin\frac{a}{2}\right] + \sin\frac{a}{2} = 0$$

$$(2'') \qquad \left[\cos\frac{a}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a\right] - \cos\frac{a}{2} = 0.$$

De unde rezultă:

$$(1''') \quad \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)a = 0 \quad \text{și} \quad (2''') \quad \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a = 0.$$

Ne putând avea nici un arc, $(n+\frac{1}{2})a$, care să aibă atât sinusul cât și cosinusul deodată nuli, înseamnă că a trebue determinat pentru fiecare din relații în parte, adică nu avem valori ale lui a, care să le satisfacă pe amândouă relațiile.

In consecință, pentru prima relație arcele a sunt date de

$$(A) \quad \begin{cases} a = \dfrac{2k\pi}{n+\frac{1}{2}}; & \text{și} \quad a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n+\frac{1}{2}}; \end{cases}$$

iar pentru relaţia a doua, a e dat de :

$$(B)\quad \left\{ a = \frac{2k\pi \pm \frac{\pi}{2}}{n + \frac{1}{2}} \right. .$$

Exemple: *Pentru prima relaţie,* luând $n = 1$, şi $k = 1$, avem

$a = \frac{4\pi}{3}$, care satisface şi $a = 2\pi$ care nu satisface.

Pentru $n = 1$ şi $k = 2$, avem

$a = \frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$ şi $a = \frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$ ambele satisfăcând.

Pentru relaţia a doua, luând $n = 1$ şi $k = 0$, avem

$a = \pm \frac{\pi}{3}$, ce o satisfac, şi tot aşa pentru $n = 1$ şi $k = 1$ când avem

$$a = \frac{5\pi}{3} \quad \text{şi} \quad a = \pi . \text{ etc...}$$

Observaţii.

1. O foarte bună soluţie, apropiată de cea de mai sus, a fost dată de D-l GH. M. CĂLIN (Caracal), dând exact expresiunea valorilor arcelor a.

2. O soluţie bună s'a primit şi de la D-l H. P. IONESCU-BISS.

3. Expresiunea valorei arcelor a, anume $a = \frac{(2k+1)\pi}{n}$, găsită de D-l G. G. CONSTANTINESCU, după unele transformări trigonometrice şi operaţii algebrice, în scopul de a găsi valori a, care să satisfacă ambele relaţii din enunţ, se vede uşor că nu poate să corespundă.

GENERAL G. I. LITEANU.

PROBLEMA 4406. *Fie* ABCD *un patrulater circumscris cercului cu centrul în* O *şi* A', B', C', D' *puncte situate pe* EF, *a treia diagonală a patrulaterului, astfel ca* AA', BB', CC', DD' *să fie văzute din* O *sub unghiuri drepte. Două diagonale ale patrulaterului, format din dreptele pe care se află aceste segmente, trec prin punctele* E, F.

C. IONESCU-BUJOR.

Soluţie dată de D-l THEODOR G. COCEA:

Fie $A_2B_2C_2D_2$ patrulaterul format de dreptele pe care se află segmentele AA', BB', CC' şi DD'; A_1, B_1, C_1 şi D_1 punctele de contact ale laturilor patrulaterului AB, BC, CD şi DA cu

cercul O, P punctul de intersecție al diagonalelor A_1C_1 și D_1B_1 ale patrulaterului $A_1B_1C_1D_1$, în fine K, L, M și N proecțiile lui P respectiv pe A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 și D_1A_1.

Triunghiurile PLC_1, PD_1N, PMD_1, PKA_1, PNA_1, PLB_1, PKB_1 și PMC_1 sunt două câte două asemenea. Rezultă:

$$\frac{\overline{C_1L}}{\overline{D_1N}} = \frac{\overline{C_1P}}{\overline{D_1P}}, \frac{\overline{D_1M}}{\overline{A_1K}} = \frac{\overline{D_1P}}{\overline{A_1P}}, \frac{\overline{A_1N}}{\overline{B_1L}} = \frac{\overline{A_1P}}{\overline{B_1P}} \text{ și } \frac{\overline{B_1K}}{\overline{C_1M}} = \frac{\overline{B_1P}}{\overline{C_1P}}.$$

Inmulțind între ele aceste relații se obține:

$$(1) \qquad \frac{\overline{C_1L}}{\overline{D_1N}} \cdot \frac{\overline{D_1M}}{\overline{A_1K}} \cdot \frac{\overline{A_1N}}{\overline{B_1L}} \cdot \frac{\overline{B_1K}}{\overline{C_1M}} = 1.$$

Dacă Q este intersecția dreptelor ML și D_1B_1, în triunghiul $B_1C_1D_1$, după teorema lui MENELAUS:

$$(2) \qquad \frac{\overline{B_1L}}{\overline{C_1L}} \cdot \frac{\overline{C_1M}}{\overline{D_1M}} \cdot \frac{\overline{D_1Q}}{\overline{B_1Q}} = 1.$$

Din relațiile (1) și (2) se deduce:

$$\frac{\overline{A_1N}}{\overline{D_1N}} \cdot \frac{\overline{B_1K}}{\overline{A_1K}} \cdot \frac{\overline{D_1Q}}{\overline{B_1Q}} = 1$$

care arată că și punctele N, K și Q depe laturile triunghiului $A_1B_1D_1$ sunt colineare, adică dreptele ML, NK și D_1B_1 sunt concurente.

Insă D_1B_1, NK, ML sunt respectiv polarele punctelor E, A_2, C_2.

(Se observă ușor că A_1B_1 este polara punctului B, PK este polara punctului B', deci K este polul dreptei BB' și la fel N polul dreptei AA' etc.).

Dreptele D_1B_1, NK și ML fiind concurente, polurile lor E, A_2 și C_2 sunt colineare, adică diagonala A_2C_2 a patrulaterului $A_2B_2C_2D_2$ trece prin E. Analog se arată că diagonala D_2B_2 trece prin F.

D-l THEODOR G. COCEA adaugă următoarele:

Observații. Referindu-ne la patrulaterul inscriptibil $A_1B_1C_1D_1$ se găsesc următoarele proprietăți interesante:

1. Relația (1) care se poate pune sub forma:

$$(1') \qquad \overline{A_1N} \cdot \overline{B_1K} \cdot \overline{D_1M} \cdot \overline{C_1L} = \overline{A_1K} \cdot \overline{B_1L} \cdot \overline{C_1M} \cdot \overline{D_1N}$$

arată că:

Proecţiile punctului de întâlnire al diagonalelor unui patrulater inscriptibil pe laturile sale determină pe aceste laturi opt segmente aşa încât produsul a patru din aceste segmente neadiacente este egal cu produsul celorlalte patru.

2. *Diagonalele* AC *şi* BD *ale unui patrulater inscriptibil* ABCD, *trec fiecare prin câte unul din punctele de întâlnire ale laturilor opuse ale patrulaterului* KLMN *format de proecţiile punctului lor de întâlnire* P *pe laturile patrulaterului* ABCD.

Alte proprietăţi ale figurii sunt arătate în articolul „*Câteva proprietăţi ale unei clase de patrulatere*“ de D-l CRISTEA MATEESCU *Gazeta Matematică* Vol. XXXI, pag. 327.

Note. Proprietatea Nr. 2 din Observaţiile D-lui TH. COCEA şi pe care se sprijină demonstraţia D-sale este publicată de autorul prezentei probleme în *Revista Matematică din Timişoara* Vol. XIII, ca problemă propusă sub Nr. 1228. Enunţul este următorul:

« Proectând intersecţia diagonalelor unui patrulater inscriptibil pe laturi, se obţine un patrulater, ale cărui laturi opuse se întâlnesc pe diagonalele patrulaterului de referinţă.

Problema 1228 a apărut în numărul 7 al R. M. T. din 15 Septemvrie 1933.

Problema 4406 a cărei soluţie o dăm aci a apărut în G. M. Vol. XXXIX, Nr. 12 la 15 August 1934 şi a fost obţinută transformând prin polare reciproce proprietatea care face obiectul problemei 1228 R. M. T.

C. I. B.

PROBLEMA 4527. *Se consideră un triunghiu* ABC *înscris într'un cerc de centru* O. *Se mai consideră punctul* D, *simetricul lui* A *în raport cu latura* BC *şi cercurile* (B), (C) *cu centrele în* B, C *şi trecând prin* A *şi* D. *Dreapta* AO *întâlneşte cercurile* (B) *şi* (C) *respectiv în* E, F. *Tangenta în* E *la cercul* (B) *întâlneşte perpendiculara coborîtă din* D *pe* AB *în* L; *iar tangenta în* F *la cercul* (C) *întâlneşte perpendiculara coborîtă din* D *pe* AC, *în punctul* K. *Să se arate că dreptele* AO *şi* LK *sunt perpendiculare.*

† N. BOTEA.

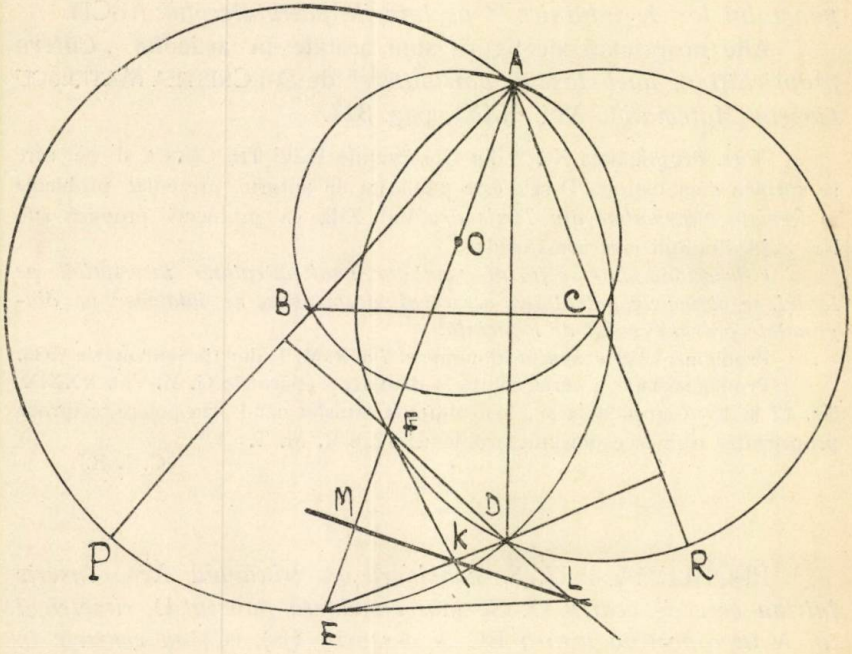
Soluţie dată de D-l M. C. POSTELNICESCU (Liceul militar Mânăstirea Dealu):

Dreptele AD şi AF fiind izogonale în unghiul BAC, măsura unghiului BAD este egală cu a unghiului CAF, deci cu jumătatea arcului FDR al cercului (C). Astfel avem:

$$\text{măs. } \overset{\frown}{ADF} + \text{măs. } \overset{\frown}{BAD} = \frac{\text{măs. arc . AF}}{2}$$

$$+ \frac{\text{măs. arc . FR}}{2} = \frac{\text{măs. arc . AFR}}{2} = 90^0.$$

Rezultă că dreapta DF este perpendiculară pe AB și deci se confundă cu DL.



Analog, în cercul (B),

$$\text{măs. } \overset{\frown}{CAE} = \text{măs. } \overset{\frown}{BAD} = \frac{\text{măs. arc. PED}}{2},$$

deci

$$\text{măs. } \overset{\frown}{AED} + \text{măs. } \overset{\frown}{CAE} = \frac{\text{măs. arc. AD} + \text{măs. arc. PED}}{2} = 90^0.$$

Și astfel, dreapta ED este perpendiculară pe AC, deci se confundă cu DK. Se vede apoi că:

$$\text{măs. } \overset{\frown}{APE} = \text{măs. } \overset{\frown}{AEL} = \frac{\text{măs. arc. ADE}}{2}$$

$$= 90^0 - \text{măs. } \overset{\frown}{EAP} = \text{măs. } \overset{\frown}{MFL}.$$

Unghiurile FEL şi EFL fiind egale, triunghiul ELF este isoscel $(\overline{LE} = \overline{LF})$.

Analog:

$$\text{măs.}\overset{\frown}{MFK} = \text{măs.}\overset{\frown}{ARF} = \frac{\text{măs. arc. AF}}{2}$$

$$= 90 - \text{măs.}\overset{\frown}{RAF} = \text{măs.}\overset{\frown}{FEK},$$

deci şi triunghiul EFK este isoscel $(\overline{KE} = \overline{KF})$.

Triunghiurile isoscele ELF, EKF având aceeaşi bază, dreapta LK este perpendiculara în mijlocul segmentului FE pe dreapta AO.

Note. 1°. Au mai soluţionat problema arătând în diferite moduri că triunghiurile ELF, EKF sunt isoscele D-nii: RADU V. APOSTOL şi PAUL DOBRESCU (Liceul militar „Nicolae Filipescu"), AL. D. STOICA (Liceul „Marele Voevod Mihai" Bucureşti), S-LT. I. C. PAREPEANU (din Geniu) şi I. I. PETRESCU.

2°. D-l A. POPESCU-ZORICA (Bucureşti) a rezolvat problema analitic.

3°. Triunghiurile ABC, DFE sunt asemenea. Calculând $\overline{FD}$ din triunghiul AFD, se găseşte raportul de asemănare

$$\frac{\overline{FD}}{\overline{AB}} = \frac{2 \sin B \sin (C - B)}{\sin C},$$

raport care rămâne deci constant când triunghiul ABC se deformează conservând unghiurile.

4°. Considerând triunghiul DFE triunghiu de referinţă şi repetând construcţiile problemei, luând simetricul vârfului D faţă de FE etc., obţinem un nou triunghiu D'F'E' asemenea cu DFE, şi după cele precedente, cu acelaşi raport de asemănare.

Deci:

$$\frac{\overline{FD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'D'}}{\overline{FD}},$$

de unde

$$\overline{FD}^2 = \overline{F'D'} \times \overline{AB}.$$

Enunţăm astfel proprietatea:

« Fie un triunghiu ABC, A' *simetricul lui* A *faţă cu* BC, B' *şi* C' *punctele în care perpendicularele din* A' *pe* AB *şi* AC *întâlnesc respectiv cercurile cu centrele în* C, B *şi cu razele* CA, BA; fie A", B", C" *puncte obţinute analog plecând dela triunghiul* A'B'C'. *O latură a triunghiului* A'B'C' *este medie geometrică între laturile corespunzătoare ale triunghiurilor* ABC, A"B"C".

C. I. B.

PROBLEMA 4556. *Să se stabilească că între unghiurile unui triunghiu avem relația:*

$$1-3\,\mathrm{cotg}A.\mathrm{cotg}B.\mathrm{cotg}C.\mathrm{cosec}A.\mathrm{cosec}B.\mathrm{cosec}C=\Sigma\,\mathrm{cotg}^3A\,\mathrm{cotg}^3B.$$

N. DONCIU.

1°. *Soluția I* dată de D-nii: DIMITRIE MAVRODIN, O. S. IANCULESCU (Timișoara), MIRCEA A. NEGREA (Brăila), M. C. POSTELNICESCU, R. V. APOSTOL, M. D. STOENESCU (Liceul militar „N. Filipescu" Târgoviște), C. G. PRODAN, C. V. PANTELIMON, M. D. POPA, A. I. ROHR (Liceul militar Iași), P. P. COJOCARU (Piatra Neamț).

Aplicăm identitatea cunoscută:

$$(1)\quad x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x),$$

unde punem:

$$x=\mathrm{cotg}A\,\mathrm{cotg}B\ ,\quad y=\mathrm{cotg}B\,\mathrm{cotg}C\ ,\quad z=\mathrm{cotg}C\,\mathrm{cotg}A.$$

Dar avem, după o identitate cunoscută:

$$x+y+z=1,$$

iar

$$x+y=\mathrm{cotg}A\,\mathrm{cotg}B+\mathrm{cotg}B\,\mathrm{cotg}C=\mathrm{cotg}B\,(\mathrm{cotg}A+\mathrm{cotg}C)$$
$$=\mathrm{cotg}B.\mathrm{sin}B.\mathrm{cosec}A.\mathrm{cosec}C.$$

Deci:

$$(x+y)(y+z)(z+x)=\mathrm{cotg}A.\mathrm{cotg}B.\mathrm{cotg}C.\mathrm{cosec}A.\mathrm{cosec}B.\mathrm{cosec}C.$$

Identitatea (1) devine:

$$\Sigma\,\mathrm{cot}^3A\,\mathrm{cot}^3B=1-3\,\mathrm{cotg}A.\mathrm{cotg}B.\mathrm{cotg}C.\mathrm{cosec}A.\mathrm{cosec}B.\mathrm{cosec}C.$$

2°. *Soluția II și generalizare* dată de D-l TUDOR STOICESCU:

Din identitatea evidentă:

$$(2)\quad (xy+yz+zx)^3=x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+3xyz(x+y)(y+z)(z+x),$$

prin înlocuirea lui x prin $\mathrm{cotg}m\mathrm{A}$, a lui y prin $\mathrm{cotg}m\mathrm{B}$ și z cu $\mathrm{cotg}m\mathrm{C}$, unde m este un număr întreg impar, ținând seamă de relația cunoscută:

$$\mathrm{cotg}m\mathrm{A}.\mathrm{cotg}m\mathrm{B}+\mathrm{cotg}m\mathrm{B}.\mathrm{cotg}m\mathrm{C}+\mathrm{cotg}m\mathrm{C}.\mathrm{cotg}m\mathrm{A}=1,$$

deducem:

$$\Sigma\,\mathrm{cotg}^3m\mathrm{A}\,\mathrm{cotg}^3m\mathrm{B}$$
$$=1-3\,\mathrm{cotg}m\mathrm{A}.\mathrm{cotg}m\mathrm{B}.\mathrm{cotg}m\mathrm{C}.\Pi(\mathrm{cotg}m\mathrm{A}+\mathrm{cotg}m\mathrm{B})$$
$$=1-3\,\mathrm{cotg}m\mathrm{A}.\mathrm{cotg}m\mathrm{B}.\mathrm{cotg}m\mathrm{C}.\mathrm{cosec}m\mathrm{A}.\mathrm{cosec}m\mathrm{B}.\mathrm{cosec}m\mathrm{C}.$$

Dacă $m = 1$, avem identitatea problemei.

3°. Au soluționat problema pornind dela identitatea (2) și înlocuind $x = \text{cotg}A$ etc., D-nii: M. AMĂRĂȘTEANU (Craiova), N. D. ȘTEFĂNESCU, PAUL DOBRESCU (Liceul militar „N. Filipescu"), și S.-LT. I. C. PAREPEANU (din geniu).

4°. Au soluționat problema pornind dela identitatea:

$$\text{cotg}A \cdot \text{cotg}B + \text{cotg}B \cdot \text{cotg}C + \text{cotg}C \cdot \text{cotg}A = 1$$

și ridicând în ambii membri la cub, D-nii: M. GRUMĂZESCU (Școala ofițeri Artilerie) și P. P. COJOCARU (Piatra Neamț).

5°. Alte soluții au dat D-nii: AURELIAN CĂLINESCU (profesor Roșiori), G. MARTEȘ (elev Școala Navală), V. L. FLORESCU (Lic. militar „N. Filipescu"), CORNEL I. GHIȘOIU (student anul II matematici, București), TR. PREDOIESCU-ȚÂNȚĂRENI (bacalaureat), S. R. TURCU și I. I. BUZINCU (Iași), A. POPESCU-ZORICA (Lic. Sf. Iosif, București).

6°. *Note. a)* Domnul D. MAVRODIN înlocuind A prin $\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$, etc., obține relația:

$$1 - 3\,\text{tg}\frac{A}{2} \cdot \text{tg}\frac{B}{2}\,\text{tg}\frac{C}{2} \cdot \sec\frac{A}{2} \cdot \sec\frac{B}{2} \cdot \sec\frac{C}{2} = \sum \text{tg}^3\frac{A}{2} \cdot \text{tg}^3\frac{B}{2},$$

valabilă pentru orice triunghiu.

b) D-nii TUDOR STOICESCU și O. IANCULESCU observă apropierea între problema 4556 și problema 3554, propusă în Vol. XXXII, pag. 400 de D-l E. ȘTEFĂNESCU.

c) Domnul TUDOR STOICESCU, cu relația

$$\Pi\,\text{cotg}mA - \sum \text{cotg}mA = -\Pi\,\text{cosec}mA$$

introdusă în generalizarea problemei 4556 dată de D-sa, deduce generalizarea problemei 3554.

C. I. B.

PROBLEMA 4681. *Să se rezolve sistemul:*

$$x^2 - yz + xz - zu = a$$
$$y^2 - zu + yu - ux = b$$
$$z^2 - xu + xz - xy = c$$
$$u^2 - xy + yu - yz = d.$$

M. F. AMĂRĂȘTEANU.

1°. *Soluție* dată de D-l DIMITRIE MAVRODIN :

Scriem sistemul sub forma:

$$E_1 \equiv x(x+z) - z(y+u) = a$$
$$F_2 \equiv y(y+u) - u(x+z) = b$$
$$E_3 \equiv z(x+z) - x(y+u) = c$$
$$E_4 \equiv u(y+u) - u(x+z) = d.$$

Inlocuim acest sistem cu următorul:

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = a+b+c+d$$
$$E_1 - E_2 + E_3 - E_4 = a-b+c-d$$
$$E_1 - E_2 - E_3 + E_4 = a-b-c+d$$
$$E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = a+b-c-d,$$

care se mai scrie:

$$\begin{cases} (x-y+z-u)^2 = a+b+c+d \\ (x+y+z+u)\ (x-y+z-u) = a-b+c-d \\ (x+y+z+u)\ (x-y-z+u) = a-b-c+d \\ (x+y+z+u)\ (x+y-z-u) = a+b-c-d. \end{cases} \quad (1)$$

Dacă notăm:

$$\begin{cases} x-y+z-u = A \quad , \quad x+y+z+u = B, \\ x+y-z-u = C \quad , \quad x-y-z+u = D, \end{cases} \quad (2)$$

sistemul (1) se scrie:

$$\begin{cases} A^2 = a+b+c+d \quad , \quad AB = a-b+c-d \\ BD = a-b-c+d \quad , \quad BC = a+b-c-d, \end{cases}$$

de unde,

$$A = \pm \sqrt{a+b+c+d} \quad , \quad B = \frac{a-b+c-d}{\pm \sqrt{a+b+c+d}}$$

$$C = \pm \frac{a+b-c-d}{a-b+c-d} \sqrt{a+b+c+d},$$

$$D = \pm \frac{a-b-c+d}{a-b+c-d} \sqrt{a+b+c+d}.$$

Dar sistemul (2), rezolvat, dă :

$$x = \frac{A+B+C+D}{4}, \quad y = \frac{-A+B+C-D}{4},$$

$$z = \frac{A+B-C-D}{4}, \quad u = \frac{-A+B-C+D}{4},$$

şi înlocuind A, B, C, D cu valorile găsite,

$$x = \frac{a^2-bc+ac-cd}{\pm\sqrt{a+b+c+d}\,(a-b+c-d)}, \; y = \frac{b^2-cd+bd-da}{\pm\sqrt{a+b+c+d}\,(a-b+c-d)}$$

$$z = \frac{c^2-da+ca-ab}{\pm\sqrt{a+b+c+d}\,(a-b+c-d)}, \; u = \frac{d^2-ab+db-bc}{\pm\sqrt{a+b+c+d}\,(a-b+c-d)}$$

2°. Au mai soluţionat bine problema D-nii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila), S.-LT M. GRUMĂZESCU (Iaşi), C. V. PANTELIMON, A. I. CORNĂŢEANU, M. D. POPA, P. P. COJOCARU, S. R. TURCU (Liceul militar Iaşi), T. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI (Bacalaureat) şi E. MARCOVICI (Liceul Naţional Iaşi).

C. I. B.

PROBLEMA 4761. *Se dau şase puncte pe un cerc în ordinea* A, B, C, D, E, F. *Se cere condiţia necesară şi suficientă ca dreptele* $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ să fie concurente.

N. N. ALDEA.

Soluţie dată de D-nii: CONSTANTIN PANTELIMON (Lic. Mil. Iaşi), MIHALCEA N. NICOLAE (Şc. Polit. Buc.), POPA D. M. (Lic. Mil. Iaşi), TURCU R. SANDU (Lic. Mil. Iaşi) şi M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. Mihai Viteazu, Alba-Iulia).

Pentru a găsi condiţia necesară, vom forma triunghiul ACE. Fie A', C', E' picioarele cevienelor $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ şi $\overline{CF}$. Din grupele de triunghiuri asemenea: (ABE' şi ECE') şi (CBE' şi EAE') scoatem relaţiile:

$$\frac{\overline{E'A}}{\overline{E'E}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CE}} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{E'C}}{\overline{E'E}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AE}}.$$

Din aceste două relaţii, deducem:

$$(1) \qquad \frac{\overline{E'A}}{\overline{E'C}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}.$$

In mod analog se găsesc relaţiile:

$$(2)\quad \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'E}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{AE}} \quad \text{şi} \quad (3)\quad \frac{\overline{C'E}}{\overline{C'A}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{CA}}.$$

Inmulţind relaţiile (1), (2) şi (3) obţinem conform teoremei lui CEVA:

$$\frac{\overline{E'A}}{\overline{E'C}} \cdot \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'E}} \cdot \frac{\overline{C'E}}{\overline{C'A}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{FE}}{\overline{FA}} = -1.$$

Deci condiţia necesară este:

$$(\alpha)\qquad \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{FE}}{\overline{FA}} = -1.$$

Condiţia este suficientă. Vom presupune că relaţia (α) fiind îndeplinită cele 3 ceviene nu sunt concurente, adică (α) nu este suficientă. Atunci unim vârful A cu punctul de întâlnire al dreptelor $\overline{BE}$ şi $\overline{CF}$. Această dreaptă taie cercul în punctul D'. Cele 3 drepte $\overline{AD'}$, $\overline{CF}$ şi $\overline{EB}$ fiind concurente, îndeplinesc condiţia necesară (α), deci:

$$(\beta)\qquad \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{D'C}}{\overline{D'E}} \cdot \frac{\overline{FE}}{\overline{FA}} = -1.$$

Comparând (α) cu (β) găsim:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{D'C}}{\overline{D'E}}$$

adică există două puncte pe cerc, D şi D' care împart arcul CE în acelaş raport. Acest lucru este imposibil. Inseamnă că am pornit dela o presupunere greşită. Adică, dacă (α) este îndeplinită cele 3 ceviene sunt concurente. Cu alte cuvinte relaţia (α) este şi suficientă.

Relaţia (α) în care intră şase segmente de dreaptă, se poate înlocui uşor cu o relaţie în care să intre şase segmente de arc, proporţionale cu cele şase segmente de dreaptă:

$$(\gamma)\qquad \frac{\overset{\frown}{BA}}{\overset{\frown}{BC}} \cdot \frac{\overset{\frown}{DC}}{\overset{\frown}{DE}} \cdot \frac{\overset{\frown}{FE}}{\overset{\frown}{FA}} = -1.$$

Această relaţie poate servi la rezolvarea de probleme de concurenţă.

Vom demonstra, ca exemplu, concurența bisectoarelor. Fie triunghiul ABC. Fie A', B', C' punctele unde bisectoarele întâlnesc cercul circumscris triunghiului ABC. Se știe că A' împarte arcul BC în două părți egale. La fel B' și C'. Deci:

$$\frac{\overset{\frown}{C'A}}{\overset{\frown}{C'B}} \cdot \frac{\overset{\frown}{A'B}}{\overset{\frown}{A'C}} \cdot \frac{\overset{\frown}{B'C}}{\overset{\frown}{B'A}} = -1$$

fiecare raport fiind negativ.

Relația (γ) fiind îndeplinită, bisectoarele sunt concurente. Angajăm pe corespondenții noștri să arate, pe această cale, concurența înălțimilor, medianelor, simedianelor, etc...

N. N. A.

PROBLEMA 4803. *Fie* ABC *un triunghiu,* G *centrul de greutate și* G_a, G_b, G_c *simetricele sale în raport cu bisectoarele. Dacă* $a > b > c$, *să se stabilească relațiunile:*

$$\frac{\overline{GG_a}}{\sin\frac{A}{2}} - \frac{\overline{GG_b}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{\overline{GG_c}}{\sin\frac{C}{2}} = 0;$$

$$\overline{GG_a}\cos\frac{A}{2} - \overline{GG_b}\cos\frac{B}{2} + \overline{GG_c}\cos\frac{C}{2} = 0.$$

C. IONESCU-BUJOR.

1°. *Soluție* dată de D-l VICTOR L. FLORESCU (Liceul militar „N. Filipescu"):

Fie D piciorul bisectoarei corespunzătoare vârfului A, iar A' mijlocul laturei BC. Avem:

$$\overline{A'D} = \overline{DC} - \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{ab}{b+c} - \frac{a}{2} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}.$$

Din triunghiul ADC scoatem:

$$\sin\overset{\frown}{ADC} = \frac{b\sin\frac{A}{2}}{\overline{DC}} = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{a},$$

iar din triunghiul AA'D,

$$\sin\overset{\frown}{A'AD} = \frac{\sin\overset{\frown}{ADC}}{\overline{AA'}} \cdot \overline{A'D} = \frac{(b-c)\sin\frac{A}{2}}{2\,\overline{AA'}}.$$

Dacă notăm A_1 intersecția dreptelor AD, GG_a, din triunghiul dreptunghiu AGA_1 extragem,

$$\overline{GG_a} = 2\overline{GA_1} = \frac{4}{3}\overline{AA'}\sin\widehat{A'AD} = \frac{2}{3}(b-c)\sin\frac{A}{2}\cdot$$

Analog se obține:

$$\overline{GG_b} = \frac{2}{3}(a-c)\sin\frac{B}{2}\,,\quad \overline{GG_c} = \frac{2}{3}(a-b)\sin\frac{C}{2}\cdot$$

Deci

$$\frac{\overline{GG_a}}{\sin\frac{A}{2}} - \frac{\overline{GG_b}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{\overline{GG_c}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{2}{3}\Sigma(a-b) = 0$$

și

$$\overline{GG_a}\cos\frac{A}{2} - \overline{GG_b}\cos\frac{B}{2} + \overline{GG_c}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{3}\Sigma(a-b)\sin C = 0,$$

deoarece

$$a\sin C = c\sin A, \text{ etc.}$$

2°. *Soluția II.* Fie C' și B' puncte luate pe AB și AC astfel încât $\overline{AC'} = \overline{AC}$, $\overline{AB'} = \overline{AB}$, — M și M' mijloacele laturilor $\overline{BC}$ și $\overline{B'C'}$. Dreapta AM' este simediana, pe ea se află G_a.

In trapezul isoscel BB'CC', MM' unind mijloacele diagonalelor este paralelă cu BB', deci cu GG_a. Deducem

$$\overline{GG_a} = \frac{2}{3}\overline{MM'} = \frac{1}{3}(\overline{CC'} - \overline{BB'}).$$

Dar din triunghiul ACC',

$$\overline{CC'} = \frac{\overline{AC}\sin A}{\sin\left(90-\frac{A}{2}\right)} = 2b\sin\frac{A}{2}\cdot$$

Analog, din triunghiul ABB', $\overline{BB'} = 2c\sin\frac{A}{2}\cdot$

Deci,

$\overline{GG_a} = \frac{2}{3}(b-c)\sin\frac{A}{2}$ etc., soluția urmează mersul precedentei.

3°. A mai soluționat problema D-l MIREL D. STOENESCU (Liceul militar „N. Filipescu" Târgoviște).

C. I. B.

PROBLEMA 4860. *Pe dreapta indefinită* xy *sunt date patru puncte în ordinea* A, D, C, B. *Se descrie de aceeași parte a lui* xy *semicercurile de diametre* AB, AD, CB. *Se cere:*

1°. *Să se calculeze raza unui cerc* (O) *tangent la toate cele trei cercuri.*

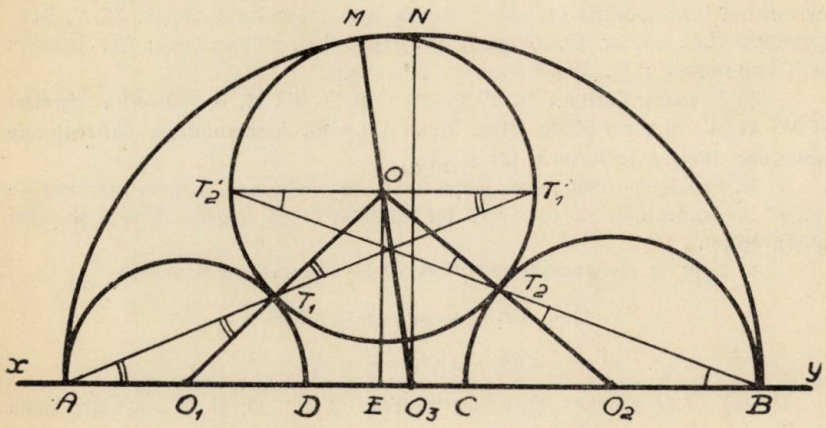
2°. *Să se stabilească relația care există între razele celor trei cercuri pentru ca cercul* (O) *să fie tangent și la dreapta* xy.

V. THÉBAULT.

1°. Fie O_1, O_2, O_3 respectiv centrele cercurilor de diametre AD, CB, AB și r_1, r_2, R razele acestor cercuri, iar ρ raza cercului (O).

Aplicând teorema lui STEWART triunghiului O_1OO_2 și cevienei OO_3 avem:

$$(1)\quad \overline{OO_3}^2 \cdot \overline{O_1O_2} = \overline{OO_2}^2 \cdot \overline{O_1O_3} + \overline{OO_1}^2 \cdot \overline{O_1O_2} - \overline{O_1O_2} \cdot \overline{O_1O_3} \cdot \overline{O_3O_2}.$$



Dar, în condițiile figurei și cu notațiile făcute, avem:

$$\overline{OO_3} = R - \rho \quad ; \quad \overline{O_1O_2} = 2R - r_1 - r_2 \quad ; \quad \overline{OO_2} = \rho + r_2;$$

$$\overline{O_1O_3} = R - r_1 \quad ; \quad \overline{OO_1} = \rho + r_1 \quad ; \quad \overline{O_3O_2} = R - r_2.$$

Ducând aceste valori în (1) și făcând toate calculele se găsește:

$$(2)\qquad \rho = \frac{R(R - r_1)(R - r_2)}{R^2 - r_1 r_2}.$$

2°. Pentru ca (O) să fie tangent la *xy*, este necesar și suficient ca distanța OE dela O la *xy* să fie egală cu ρ, sau ceea ce

este tot una, trebue ca înălțimea OE a triunghiului O_1OO_2 să fie egală cu ρ. Dacă se notează cu p semiperimetrul triunghiului O_1OO_2, trebue și este deci necesar ca

$$(3) \quad \rho = \frac{2}{O_1O_2}\sqrt{p(p-O_1O_2)(p-OO_1)(p-OO_2)}.$$

Dar avem:

$$p = R+\rho \quad ; \quad p-O_1O_2 = \rho + r_1 + r_2 - R;$$
$$p-OO_1 = R-r_1 \quad ; \quad p-OO_2 = R-r_2.$$

Inlocuind în (3), ținând seamă de (2) și făcând toate calculele se găsește:

$$(4) \qquad 3r_1r_2 = R(R-r_1-r_2)$$

care este relația cerută.

Notă. 1°. Au rezolvat problema exact și au pus pe ρ sub forma (2) exprimând însă condiția (4) sub o formă mai complicată D-nii: D. N. ȘTEFĂNESCU (Lic. militar Târgoviște): AL. ROHR (Lic. militar, Iași); AL. ȘAICHIN și I. GOLDBERG (Lic. Matei Basarab, București).

2°. D-șoara VENERA V. TĂNĂSESCU și D-nii: M. A. NEGREA (Brăila) și M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. Mihai Viteazul, Alba Iulia) au dat rezultate bune dar diferite de formele (2) și (4).

3°. Problema 4860 este, după cum se vede, un frumos exercițiu de calcul, ca aplicațiune a teoremei lui STEWART, ea sugerează însă și unele observațiuni.

a) *Cum se construește cercul* (O)? Se observă pe figură că

$$\overline{OO_1} = r_1 + \rho \quad \text{și} \quad \overline{OO_3} = R - \rho$$
$$\therefore \qquad \overline{OO_1} + \overline{OO_3} = R + r_1.$$

Deci O se află pe elipsa cu focarele în O_1, O_3 și cu axa mare egală cu $R + r_1$.

La fel se găsește că O se află și pe elipsa definită de

$$\overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r_2.$$

Poziția geometrică a celor 3 focare arată că elipsele se întâlnesc în totdeauna în 2 puncte simetrice față de xy.

b) *Cum se construesc cercurile* O_1 *și* O_2 *atunci când se dau* O_3 *și* O? Fie T_2 punctul de tangență al cercurilor O și O_2 și T'_2 intersecția lui BT_2 cu O. Egalitatea de unghiuri din triunghiurile isoscele BO_2T_2 și $T_2O_2T'_2$ arată că $O_2T'_2$ este paralel cu O_2B, ceea ce rezultă și din observația că T_2 este un centru de asemănare al celor 2 cercuri. Urmează construcția următoare: Se duce diametrul $T'_2OT'_1$ paralel cu AB și se iau intersecțiile lui O cu T'_2B și T'_1A.

c) *Care este poziția lui* O *când* OO_3 *este perpendicular pe* AB? Evident că în acest caz

$$2r_1 = 2r_2 = R$$

și (2) dă:

$$\rho = \frac{R}{3}.$$

Deci O este centrul de greutate al triunghiului ANB.

d) *Cum se construește* O *când el este tangent dreptei* xy? Se ia intersecția locului lui O pentru care

$$OT_1 = OE$$

cu locul lui O pentru care

$$OT_2 = OE.$$

Aceste locuri sunt cunoscute și ușor de găsit. Le las pe seama corespondenților, pentrucă mai sunt de așteptat și alte proprietăți ale figurei. Vom publica sub formă de note tot ce vom primi interesant în legătură cu această chestiune.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4939. *In „Aritmetica și Contabilitatea" pentru clasa IV-a a liceelor industriale de fete de* PETRE MARINESCU, GHEORGHE I. DÂMBOIEANU *și* ION M. DUTCHEVICI, *1937, se găsește la pagina 54 următoarea problemă:*

„O persoană vrea să cumpere o casă care costă 460 000 lei. Neavând decât 3/15 din acești bani se împrumută pentru rest dela o bancă. Știind că banii au fost luați cu 12% și că timpul a fost de 2 ani, să se afle ce dobândă va plăti. (R. 14 400 lei)".

Cum s'ar putea rectifica problema cu minimum de schimbări de cifre?

I. IONESCU.

Rectificarea se poate face prin *introducere* de cifre, prin *suprimare* de cifre sau prin *modificări* de cifre. Enunțul cere a se întrebuința ultimul mijloc.

Fie în general C capitalul total necesar cumpărării casei, f fracțiunea din acest Capital pe care cumpărătorul o posedă și deci $(1-f)$ porțiunea pe care trebuie să o ia împrumut, p procentul, t timpul. Avem relațiunea:

$$D = C(1-f)\,pt/100,$$

în care D este dobânda ce va plăti-o cumpărătorul pentru banii împrumutați. Pentru datele problemei $C = 450\ 000$ lei, $f = 3/15 = 1/5$,

$p = 12$, $t = 2$ ani, găsim 86 400 lei dobândă. Rectificarea nu s'ar putea face decât schimbând în rezultatul dat pe 1 cu 8 şi primul 4 cu 6. Rectificarea pe calea aceasta ar cere modificarea a două cifre. Problema se reduce dar la a arăta dacă nu ar fi posibilă o rectificare prin schimbarea de o cifră, la una din datele problemei: C, f, p, t. Să presupunem că voim să le rectificăm pe rând.

a) Să presupunem că C este eronat. Avem:

$$C = 100\,D/(1-f)\ pt = 100\times 14\ 400/(4/5)\ 12\,.\,2 = 75\ 000.$$

Corectarea ar cere înlocuirea primei cifre date 4 prin 7 şi suprimarea unui 0 dela Capitalul dat. E o corectare care nu se împacă cu enunţul problemei.

b) Să presupunem că p este eronat. Avem:

$$p = 100\,D/C\,(1-f)\ t = 100\times 14\ 400/450\ 000\,(4/5)\,.\,2 = 2.$$

Corectarea ar cere suprimarea lui 1 dela p dat. Nici aceasta nu este admisibilă.

c) Să presupunem că t este eronat. Avem:

$$t = 100\ D/C\,(1-f)\ p = 100\times 14\ 400/450\ 000\,(4/5)\,.\,12 = 1/3.$$

Corectarea cere schimbarea timpului de 2 ani în 1/3 ani sau 4 luni, adică o schimbare mai mare de cât permite enunţul.

d) Să presupunem că f este eronat. Avem:

$$f = 1 - (100\,D/C\,pt) = 1 - [100\times 14\ 400/450\ 000\times 12\times 2] = 13/15.$$

Corectarea s'ar face în acest caz mai scriind un 1 înaintea numărătorului dat pentru f. Nici aceasta nu intră în condiţiile puse de enunţ, care cere modificarea de cifre, iar nu introducere.

Conchidem de aci că rectificarea nu se poate face numai prin modificarea unei cifre, nici prin modificarea a două cifre dela C, p, t sau f. Am arătat că ea se poate realiza prin modificarea a două cifre ale rezultatului dat.

Se pune însă întrebarea dacă nu mai sunt soluţii modificând câte o cifră dela două din cantităţile C, f, p, t sau D, aşa ca să avem corectarea tot cu două cifre. Pentru aceasta vom presupune că două din valorile C, D, f, p, t eronate sunt la câte o cifră şi celelalte date exact, vom rezolva ecuaţia fundamentală dela început, pusă sub forma:

$$100\ D = C\,(1-f)\,pt,$$

în raport cu două din literile ce le conţine şi vom înlocui pe celelalte cu valorile lor numerice: Avem următoarele egalităţi:

Greşite:	Ecuaţia:
f şi C.	$C(1-f) = 100\,D/pt = 60\,000.$
f şi D.	$D/(1-f) = Cpt/100 = 108\,000.$
f şi p.	$p(1-f) = 100\,D/Ct = 8/5.$
f şi t.	$t(1-f) = 100\,D/Cp = 4/15.$
C şi D.	$C/D = 100/(1-f)\,pt = 125/24.$
C şi p.	$Cp = 100\,D/(1-f)\,t = 900\,000.$
C şi t.	$Ct = 100\,D/(1-f)\,p = 150\,000.$
D şi p.	$D/p = C(1-f)\,t/100 = 7\,200.$
D şi t.	$D/t = C(1-f)\,p/100 = 43\,200.$
p si t.	$pt = 100\,D/C(1-f) = 4.$

Pe de altă parte f trebuind să aibă cel mult o cifră greşită, el nu se poate prezenta decât sub una din formele:

$f = x/15$ $\quad f=3/(10x+5)$ $\quad f=3/(10+x)$,

$1-f=(15-x)/15.$ $\quad 1-f=(10x+2)/(10x+5).$ $\quad 1-f=(7+x)/(10+x).$

Aceste valori ale lui f le ducem pe rând în primele patru ecuaţii şi rezolvăm în numere întregi ecuaţiile ţinând seama că valorile găsite să fie cele date cu o singură cifră modificată ceea ce elimină multe soluţii. Se găseşte astfel că prima ecuaţie cu $f = x/15$ dă soluţia $C=150\,000$, $f = 9/15$, $D=14\,400$, $p = 12$, $t = 2$, iar a şaptea $C=150\,000$, $f = 3/15$, $D=14\,400$, $p = 12$, $t = 1$. Celelalte nu dau soluţii.

Deci minimum de schimbări este două şi aceasta se poate realiza în trei feluri. I. I.

Problema a fost deslegată cu $p = 2$ de D-nii: ST. CETĂŢEANU, P. DRĂGHIŢESCU şi A. O. ŞAICHIN. Primul observă că rectificarea nu e verosimilă că nu sunt bănci să dea bani cu împrumut, pentru facerea de case cu 2%. Toţi aceştia şi D-l T. MIROSLAV au dat şi corectarea fracţii 3/15 în 13/15. Acesta din urmă observă că aceasta trebuie să fie rectificarea de făcut, căci nu era nici un motiv ca autorii să dea fracţia reductibilă, căci ar fi fost să se încurce elevele de prisos, reductibilitatea fracţii fiind vizibilă. D-l P. DRĂGHIŢESCU a dat şi rectificările $C = 75000$ şi $t = 4$ luni. Cum se vede nici unul nu a răspuns condiţiunilor enunţului.

În ultimul timp s'a mai primit o soluţie dela D-l V. FLORESCU.

PROBLEMA 4943. *Unind consecutiv mijloacele diagonalelor feţelor laterale ale unui trunchiu de piramidă triunghiulară, se obţine un exagon al cărui perimetru este constant când baza mare este fixă, iar baza mică variază.*

C. IONESCU-BUJOR.

a) Fie ABCD un trapez în care BC este baza mare, iar I punctul de întâlnire al diagonalelor. Din asemănarea triunghiurilor AID, BIC, deducem:

$$\frac{\overline{DI}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \quad , \quad \text{deci } \overline{DI} < \overline{BI},$$

adică mijlocul diagonalei este cuprins între extremitatea bazei mari şi punctul de întâlnire al diagonalelor.

b) Fie ABC, A'B'C' baza mare şi baza mică a unui trunchiu de piramidă triunghiulară. Notăm A_b, A_c, mijloacele segmentelor AB', AC' şi analog B_a, B_c, C_a, C_b.

$\overline{A_b B_a}$ uneşte mijloacele a două diagonale situate pe faţa laterală şi este egală deci cu semi diferenţa bazelor trapezului A'ABB'.

$$\overline{A_b B_a} = \frac{\overline{AB} - \overline{A'B'}}{2} \text{ şi la fel } \overline{B_c C_b} = \frac{\overline{BC} - \overline{B'C'}}{2},$$

$$\overline{A_c C_a} = \frac{\overline{AC} - \overline{A'C'}}{2}.$$

Cele stabilite la punctul *a)* ne arată că în unirea consecutivă a diagonalelor, B_a se uneşte cu B_c, iar B_c cu C_b pentru a păstra sensul în care se face unirea. Dacă B_c şi C_b ar fi putut fi cuprinse între punctul (B'C, BC') şi B', C', s'ar fi unit B_a cu C_b, etc.

Deci, în triunghiul A'BC',

$$\overline{B_a B_c} = \frac{\overline{A'C'}}{2} \text{ şi la fel } \overline{C_a C_b} = \frac{\overline{A'B'}}{2}, \quad \overline{A_b A_c} = \frac{\overline{B'C'}}{2}.$$

Insumând laturile exagonului, perimetrul are valoarea

$$\frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}}{2}, \text{ adică este constant.}$$

Soluţie analoagă dată de D-l VICTOR FLORESCU.

S'au primit soluții mai puțin riguroase dela Domnișoarele ANA C. GEREANU (studentă București), MIOARA I. CRĂCIUNESCU (studentă București) și dela D-nii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila), OCTAVIAN G. RĂDULESCU (Lic. militar „N. Filipescu"), ADOLF O. ȘAICHIN (Lic. Matei Basarab, București), M. N. ROȘCULEȚ, iar dela Liceul militar Iași: VASILE G. BÂRZU, G. D. CÂRDEIU, TUDOREL MIROSLAV, MIRCEA D. POPA, CONSTANTIN V. PANTELIMON și SANDU R. TURCU.

C. I. B.

EXERCIȚII

1. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}=\frac{\sqrt[3]{x}-3}{2\sqrt{x}}.$$

LOCOT. MIHAI C. I. VLAD.

R. Avem:

$$5x-2\sqrt[6]{x^5}-x\sqrt[3]{x}=0.$$

sau:

$$\sqrt[6]{x^3}-5\sqrt[6]{x}+2=0.$$

Facem substituția:

$$y=\sqrt[6]{x} \text{ etc.}$$

PROBLEME PROPUSE

4999. Care numere de două cifre au același număr de divizori ca și răsturnatele lor?

I. IONESCU.

5000. Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, știind că suma numerelor de câte două cifre dela stânga și dela dreapta este un multiplu al rădăcinii.

V. THÉBAULT.

5001. Se consideră numărul: $N = 1000!$ Se cere:

1°. Câte cifre are acest număr?

2°. Care sunt primele lui cinci cifre?

3°. Cu câte zeruri se termină?

4°. Care este ultima lui cifră semnificativă (diferită de zero)?

ŞERBAN A. GHEORGHIU.

5002. Să se găsească numerele întregi cari nu sunt nici suma, nici diferenţa a două pătrate perfecte.

V. FLORESCU.

5003. Să se construiască un triunghiu dreptunghiu cunoscând poziţia vârfului unghiului drept, un punct fix prin care trece ipotenuza şi ştiind că vârfurile unghiurilor ascuţite se află pe două drepte perpendiculare date.

G-L GH. BUICLIU.

5004. Se dă un triunghiu fix ABC, dreptunghiu în A. Printr'un punct P fix din plan, se duc paralelele Δ şi Δ' respectiv la catetele AB şi AC. Fie M un punct mobil din plan. Dreptele MB şi MC taie respectiv dreptele Δ şi Δ' în punctele D şi E.

1°. Se cere locul punctului M astfel ca DE să fie paralelă cu BC.

2°. Considerând punctul M fix, iar P mobil se cere locul punctului P în aceleaşi condiţiuni.

3°. Fie N intersecţia paralelelor duse prin E şi D respectiv la Δ şi Δ'. Punctele P şi M sunt fixe, iar B şi C alunecă pe paralelele duse prin A (fix) respectiv la Δ şi Δ'. Se cere în aceste condiţiuni locul punctului N.

D. MAVRODIN.

5005. Pe un cerc O de rază R se ia în mod arbitrar trei puncte A, B, C. Să se determine, numai cu ajutorul compasului, ortocentrul triunghiului ABC.

S-LT. CONST. N. AVRAM.

5006. Se dă un triunghiu ABC. Fie A'B'C' şi $A_1B_1C_1$ respectiv triunghiurile median şi ortic ale triunghiului ABC. Punctele B' şi C' se proiectează pe BC în B_a şi C_a, iar acestea se proiectează în B'_a şi C'_a pe A'C' şi A'B'. Să se arate că punctele B', C', B_a, C_a, B'_a, C'_a se află pe un cerc (O_a), de centru O_a. Fie O_b şi O_c centrele celorlalte două cercuri analoage. Dreptele A_1O_a, B_1O_b, C_1O_c concură în centrul de greutate al triunghiului considerat.

C. IONESCU-BUJOR.

5007. Să se arate că dreapta, care uneşte ortopolurile a doi diametri perpendiculari între ei ai cercului circumscris triunghiului în raport cu care luăm aceste ortopoluri, trece prin centrul cercului celor nouă puncte al aceluiaşi triunghiu.

TH. G. COCEA.

5008. Cevienele triunghiului de referinţă, corespunzătoare mijloacelor segmentelor ce unesc ortocentru cu vârfurile triunghiului complementar, concură pe dreapta lui EULER. Dreptele ce trec prin centrele cercurilor exînscrise triunghiului de referinţă şi prin mijloacele segmentelor ce unesc centrul cercului înscris cu picioarele bisectoarelor exterioare corespunzătoare pe cercul circumscris triunghiului, concură pe dreapta centrelor cercurilor înscris şi circumscris.

N. N. MIHĂILEANU.

5009. Dacă a, b, c sunt numere pozitive şi notăm

$$P = 1+a+b+c+ab+ac+bc \quad ; \quad A = (1+c)(1+c+b)+b^2;$$

$$B = (1+a)(1+a+c)+c^2 \quad ; \quad C = (1+b)(1+b+a)+a^2;$$

apoi:

$$E = 3P^2 \quad ; \quad E_1 = 4BC \quad ; \quad E_2 = 4AC \quad ; \quad E_3 = 4AB,$$

să se arate că avem:

$$1^0.\ E < E_1 \ ; \ E < E_2 \ ; \ E < E_3 \ ; \ 2^0.\ P^6 \leqq A^2B^2C^2.$$

LT. C. IONESCU-ŢIU.

5010. Se consideră polinomul A_{n-p}^{m} care are ca termeni combinările cu repetiție a numerelor $x_1, x_2 \ldots x_{n-p}$ luate câte m, coeficienții termenilor fiind egali cu 1. Polinomul B_{n-p}^{m} are ca termeni combinările ordinare a aceloraşi numere luate câte m, termenii având coeficientul 1. Să se arate că expresia:

$$A_{n-p}^{p} B_{n-p}^{m} - A_{n-p}^{p+1} B_{n-p}^{m-1} + A_{n-p}^{p+2} \cdot B_{n-p}^{m-2} - \ldots$$
$$+ (-1)^{m-1} A_{n-p}^{p+m-1} B_{n-p}^{1} + (-1)^{m} A_{n-p}^{p+m}$$

are $C_{n-1}^{p+m} C_{p+m-1}^{m}$ termeni.

TH. ANGHELUȚĂ.

5011. Să se determine λ aşa fel ca ecuația

$$x^4 - 16x^3 + 86x^2 + \lambda x + 120 = 0$$

să aibă o rădăcină de forma $a + \sqrt{a}$, a fiind un număr rațional pozitiv, diferit de un patrat; apoi să se rezolve complet ecuația dată.

M. GHERMĂNESCU.

5012. Se consideră în raport cu două axe perpendiculare cercul de ecuație $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, precum şi dreptele D şi D′ respectiv de ecuații $y = a$ şi $y = -a$. Două tangente la cerc perpendiculare T şi T′ taie aceste două drepte în punctele A, B, C, D.

1°. Să se scrie ecuația generală a conicilor circumscrise patrulaterului ABCD. Să se discute natura lor.

2°. Locul centrelor acestor conice.

3°. Printre aceste conice este şi o parabolă P. Se cere să se găsească focarul şi directoarea acestei parabole.

4°. Să se găsească şi să se construiască locul focarului parabolei P, când tangentele T şi T′ variază rămânând perpendiculare.

GH. TH. GHEORGHIU.

5013. Să se arate că avem, oricare ar fi întregii m şi n:

$$\frac{(x-1)^{(m-1)n}}{(mn)!} \cdot \frac{d^{mn}}{dx^{mn}} [x^{mn}(x-1)^{n}] = \frac{1}{n!} \frac{d^{n}}{dx^{n}} [x^{n}(x-1)^{mn}].$$

N. CIORĂNESCU.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (E); *Bodnărescu H.* (4960, 96); *Boldescu P.* (4806, 953); *Cetăţeanu St.* (4953, N); *Diaconescu D. I.* (4928, 30, 68, 96); *Florescu V.* (4496, 872, 80, 917, 40, 52, 54, 59, 64, 66, 89, N); *Grumăzescu M.* (4918, 40, 42, 43, 47, 53, 54, 57, 60, 64, 68, 91, 96, P); *Matei D.* (4934); *Modâlcă E.* (3961, 4934, 35, 64); *Negoiţă P.* (4996); *Reischer H.* (4964, 68); *Ripianu D.* (4876, 985, 96); *Roşculeţ M.* (4931); *Sacter O.* (4986, 94); *Şaichin A.* (4760, 945, 83, 96); *Segal J.* (4075, 84, 96, 125, 27, 234, 79, 407, 520, 56, 633, 49, 810, 85, 918, 28, 31, 83, 96); *Ştefănescu D. N.* (4921, 43, 47, 54, 57, 60, 61, 69); *Stoenescu D. M.* (4945, 68, 83, 96); *Thébault V.* (N, P); *Tilică C. Ş.* (4649, 852, 928); *Turcu S.* (4834, 85, 908, 11); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (4566, 71, 758, 953, 61, 64, 80, 87, 89, 90, 96).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anual şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. I. **Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu** şi **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu**, *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu** şi **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă). (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu** şi **Şt. N. Mirea**, *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie.* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu**, *Curs de Geometrie Analitică*, Fascicola I. Ediţia II-a revăzută şi adăogită, 1923. (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice. (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice. (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** şi **G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. **Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 50
Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa :

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. **C. D. IONESCU-ŢIU**

C. 52.010

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIV

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1938

BIBLIOTECA CENTRALA
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIU

SUMARUL

1. Petru Pipoş (1859—1913) (urmare şi sfârşit) . . . . . *Victor Marian.*
2. Configuraţia numerelor prime . . *G. Zapan.*
3. Asupra reprezentării analitice a ariilor şi liniilor poligonale . . *N. O. Zaharia.*
4. Asupra contactului conicelor . . *Cpt. Mihail I. Focşeneanu.*
5. Programa analitică hotărîtă pentru Concursul „Gazetei Matematice" din anul 1939.
6. Note Matematice: 2 — 6.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 3562, 3714, 3988, 4083, 4648, 4678, 4806, 4810, 4814, 4818, 4911, 4945.
11. Exerciţii: 2 — 5.
12. Probleme propuse: 5003, 5014 — 5028.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1938

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stan**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1938 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5001, 02, 03, 07, 09, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLIV. Nr. 2 *SUPLIMENT* OCTOMVRIE 1938

RECREAŢIUNI

1. **Iscodirea lui Pitagora.** Aceasta este denumirea pe care o dedea ION HELIADE RĂDULESCU pentru Tabla lui PITAGORA.

I. I.

*

2. **Din istoricul lui 0.** Când credeţi că s'a scris pentru prima oară că *diferenţa a două numere egale este zero?* De abia în 1484 de către CHOUQUET. Tot el e cel care a scornit că un număr ridicat la puterea zero face 1!

I. I.

*

3. **Misterele lui 40.** De misterele lui 40 ne-am ocupat mai de multe ori în acest *Supliment.*

Pe promontoriul dela Caliacra este un vechiu altar cu o cruce unde se zice că ar fi mormântul SFÂNTULUI NICULAEŞ şi unde pescarii se duc de se închină în ziua de ST. NICULAEŞ. Ceva mai la vale, este o poartă în o stâncă care se zice *poarta celor 40 de fete.* Legenda spune că 40 de fete, în timpul unor lupte ca să nu cadă în mâinile inamicului, s'au legat de cozi, care pe atunci se purtau, şi, astfel legate, s'au aruncat în mare.

I. I.

*

4. $40 + 10 = 50$. ST. AUGUSTIN vorbind de Rusalii spune:

„40 de zile figurează evident viaţa prezinte, 10 zile viaţa eternă. Zece şi patruzeci fac cinzeci, ceea ce face îndeplinirea legii".

I. I.

*

5. **Unităţi de măsură în proverbe şi zicători. Ocaua:**

Nu e ocaua cât este daraua.
A fi prins cu ocaua mică.
De cât o oca de minte mai bine un dram de noroc.
Oriunde te duci ocaua este de 400 de dramuri.
Ocaua lui Cuza.

I. I.

*

6. **Matematica în literatură.** PIERRE LOTI scrie în AZIYADÉ:

„Cu cât vei fi mai mult *poet*, cu atât mai puţin *geometru*, dar în viaţă e nevoie de oarecare *geometrie*, şi ceea ce e mai greu, de multă *aritmetică*".

M. A. CERNES.

*

7. **O simplificare originală!** Pe la începutul lecţiilor de algebră un profesor dă unui elev să simplifice fracţia $(2-1)/(2+1)$. Elevul grăbit să se ducă la loc, simplifică pe 2 de sus cu 2 de jos şi apoi la fel pe 1, şi dă rezultatul $(-)/(+)$!

GH. GH. STRAVRAT.

*

8. **Ecuaţia personală.** Intr'o Revistă găsesc următoarele :

In conştiinţa cea mai obiectivă, realitatea intră în formele de cunoaştere ale omului alterându-se şi prin *ecuaţia personală* a individului".

† O. POPEA.

*

9. **Ecuaţie literară!** In Revista literară « *Limba Română* » găsim :

Nădăjduim că lucrarea tinerilor noştri şaradişti să fie de gradul trei".

ADRIAN D. GHIŢESCU.

*

10. **Un nou metod pentru rezolvarea ecuaţiilor.** La un Liceu din Centrul Ardealului, la ora de matematici dintr'o clasă superioară, la o problemă, intervine rezolvarea unei ecuaţii cu o singură necunoscută de gradul prim. Profesorul enervat că pierduse prea mult timp cu un elev ce se numia „coada clasei", cheamă un elev ce-l vede prea atent şi zice să scoată repede pe x din acea ecuaţie. Elevul, calm, şterge pe x din ecuaţie îl scrie în colţul tablei şi zice : « *L'am scos !* »

Profesorul ne mai având nici o obiecţiune, îi zice să şteargă tabla, îşi ia pălăria şi pleacă!"

I. V. M.

*

11. **Matematica şi literatura.** In « *Coliba Mărincăi* », V. A. URECHIĂ povesteşte că profesorul îşi bătea capul în zadar ca să-l înveţe pe fiul boierului GORJĂNILĂ *să rezolve vre-o ecuaţiune de gradul al 2-lea, cu mai multe necunoscute.* (Sublinierea aparţine textului).

Ne întrebăm dacă autorul ştia să rezolve vreun atare sistem de ecuaţii! Nu ar fi bine ca literaţii să nu-şi supună eroii la sforţări pe care ei nu le-au încercat nici o dată ?

N. M.

*

12. **Cosmografie poetică.** „Voiu să călătoresc să'ndeplinesc misterul.
Nu merg la *antipozi,* mi-ajunge *emisferul*".

ION VĂCĂRESCU.

— Am mai văzut eu faime care au trăit o *oră*
Iubiri pasionate care au durat un *an*
Sau numai din *crepuscul* şi până'n *aurora,*
Cât face *minutarul* o cursă pe *cadran.*

D. ANGHEL.

*

13. **Asociaţie de rezolvitori!** In Problema 1681 se cereau numerele ab, cd aşa ca produsele $ab \times b$ şi $cd \times d$ să aibă trei cifre şi să fie egale, sau unul răsturnatul celuilalt. Iată soluţia primită dela doi rezolvitori asociaţi :

„După enunţ :

$$(10a + b)\, b = 100\, \alpha + 10\beta + \gamma \qquad (1)$$

$$(10c + d)\, d = 100\, \gamma + 10\beta + \alpha. \qquad (2)$$

Scăzând (2) din (1):

$$(10ab - cd) + b^2 - d^2 = 99(\alpha - \gamma),$$

$$\alpha - \gamma = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 8$$

$$\left.\begin{aligned} b^2 - d^2 &= M10 + k \\ 9(\ -\ ) &= M10 + k \end{aligned}\right\} \text{condiția.}$$

Soluțiile sunt: 49 și 72; 49 și 18".

GH. B.

*

14. **Progresie constantă.** In *« Universul »* din 16/10 1922 citim următoarele:

„In ciuda pesimiștilor, de bună și de rea credință — căci au fost și din aceștia din urmă — suprafața culturilor de grâu în campania 1921 — 22 a fost de 2.750.000 ha, față de 2.500.000 în 1920 — 21 și de 2 milioane ha în 1919—20. Cifrele îmbrățișează întreg Regatul și ele marchează o *progresie constantă* de aproape o jumătate de milion de ha".

Deci să se rețină că:

2.000.000 2.500.000 2.750.000

este o *progresie constantă* cu rația 500.000!

† TRAIAN DORDEA.

*

15. **Ce nu se poate vedea în algebră?** Un licean a trimis întrebarea aceasta dând răspunsul: *« O singură literă în parenteză »*. Bietul copil, nu ajunsese încă la $y = f(x)$ cu toate derivatele lui!

I. I.

*

16. **Algebra în literatură.** B. DELAVRANCEA în *« Trubadurul »* spune: *« Cauza unică și inițială »* este o taină pe care nu cu *« Algebra voastră »*, o veți înțelege.

I. POPA.

*

17. **Personagiu nul!** In „M. EMINESCU" de E. LOVINESCU pag. 9 citim: „Tânărul călugăr JERONIM este proiecția lui EMINESCU însuși" ceea ce matematicește revine la:

$$\text{JERONIM} = \text{EMINESCU} \cdot \cos\alpha .$$

Insă $\alpha = 90^0$, căci EMINESCU trăia perpendicular pe scoarța pământului. Deci:

$$\text{JERONIM} = 0.$$

Asta o fi vrut să spuie autorul prin *proiecția lui literară?*

N. M.

*

18. **Fracții de oameni!** In *Ante-Proiectul de organizare profesională a inginerilor*, publicat în ziarul *« Universul »* din 11 Iulie 1938, găsim la Art. 22:

«Comitetul Secţiunii se compune din 11 membri aleşi de Adunarea generală a Secţiunii respective dintre care: şease vor face parte din serviciile publice, iar trei din aceştia vor avea gradul de inginer Inspector general sau consilier ».

« Mandatul membrilor Comitetului este de 3 ani reînoindu-se în fie care an 1/3 din membri. Pentru a fi ales membru în Comitet se cere o activitate profesională de cel puţin 15 ani ».

Rezultă de aci că în cifre calculate, se vor înlocui anual 3, 666666 membri!

I. I.

*

19. **Asupra problemei 3160.** Răposatul GH. EM. FILIPESCU, fost Director general al Societăţii Tramvaelor Bucureşti, a propus această problemă în urma unui accident întâmplat unui automobil care a trecut printre două tramvae ce veneau în sensuri contrarii pe două linii paralele. Un anonim ne trimite următoarele în privinţa acestei probleme:

„Ziarele relatează faptul că şoferul D-lui GIACOMO FIZZOTTI, vrând să treacă printre două tramvae ce veneau din sensuri opuse a suferit un accident. Iată acum, fără să vrea, şoferul a dat o soluţie problemei 3160 (făcând abstracţie de date). Proprietarul automobilului cerând despăgubiri, a dat tocmai peste propunătorul problemei 3160, GH. EM. FILIPESCU, Director al S. T. B.

A arătat Directorul că soluţia este greşită?

Considerăm problema 3160 ca rezolvată?

Cum se aplică aci teorema lui CEVA, căci vehiculele au fost concurente?"

— Nu cunoaştem soluţia practică a problemei practice încercată pe stradă! Noi ţinem problema teoretică până îi va veni soluţia teoretică!

I. I.

*

20. **La un examen de Cosmografie.** La un examen integral de matematici, clasa VIII-a particulară a Liceului M. K. din oraşul V.:

Profesorul. Ce se numeşte *ascensiune dreaptă* a unei stele?

Elevul. Ascensiunea dreaptă a unei stele se numeşte ridicarea drept în sus a unei stele.

Profesorul. Cu ce se face această ridicare?

Elevul. Cu telescopul.

Autentic.

ION S. ANTONIU.

*

21. **Desinteresare.** In o Bibliografie a lui AVOGARDO, făcută de GUARESCHI, găsim următoarele:

„Foarte lăudabil este desinteresul în ştiinţă. AVOGARDO era în cel mai mare grad desinteresat. Asta este o altă caracteristică a geniului. Ceea ce emană şi măreşte în aceşti oameni, dela vechii savanţi greci ca ARCHIMEDE, la GALILEO, KEPPLER, NEWTON, FARADAY, HELMHOLZ, LAGRANGE, VOLTA, AVOGARDO este indiferenţa, aproape inconştienţa pentru moliciune, pentru luxul vieţii, pentru tot ce are relaţiune cu animalitatea omului; meditaţia continuă nu dă timpul gândirei lor de a sbura la lucrurile ordinare ale vieţii. Dar pentru ca să fie aşa, trebuie un înalt grad de putere intelectuală".

I. I.

PETRU PIPOŞ

(1859 — 1913)

(Cu ocazia împlinirii unui sfert de veac dela moartea sa)

(Urmare dela pag. 22 şi sfârşit)

La 20 Mai 1880 PIPOŞ îşi trece examenul de profesor, dar neputând obţine un post în învăţământ, în 1881 îl vedem pedagog în Alba-Iulia. La începutul anului şcolar 1882/3 e chemat profesor la preparandia greco ortodoxă română din Arad, dar nu la catedra de matematici, care era ocupată, ci la cea de pedagogie. Numai *„situaţia materială desperată“* — scrie dânsul peste un an în curriculum vitae — *„m'a forţat să primesc această chemare, să-mi însuşesc şi să predau un studiu care înainte nu era specialitatea mea“*. Se poate înţelege uşor care era situaţia matematicianului silit să predea lecţiile de pedagogie. Cu toate acestea PIPOŞ nu părăseşte domeniul matematicilor şi află destul răgaz pentru prepararea tezei de doctorat, pe care o prezintă la începutul lui Martie 1882 Facultăţii de ştiinţe din Cluj. Ca specialităţi secundare îşi alege fizica experimentală şi pedagogia. In ziua de 13.Aprilie 1882 PIPOŞ e promovat doctor în ştiinţe.

Teza lui PIPOŞ e scrisă în ungureşte şi poartă titlul: „APOLLONIUS *kérdése*“. (Problema lui APOLLONIUS). Ea a apărut în formă de broşură, în 8°, în tipografia Athenaeum din Budapesta şi conţine 31 pagini. Mi se pare interesant să reproduc aci aprecierea făcută de profesorul L. MARTIN membru, împreună cu S. BRASSAI, în comisiunea de examinare, asupra lucrării lui PIPOŞ:

„In fiecare ştiinţă există anumite locuri comune (Gemeinplätze) asupra cărora atenţiunea fiecărui om se opreşte cel puţin odată în viaţă. Problema lui APOLLONIUS: *să se determine cercul tangent la trei cercuri date e un astfel de loc comun al matematicei, atât de cunoscut încât e trudă zadarnică a voi să afli ceva nou în ea. Când deci D-l* PIPOŞ *şi-a ales acest subiect desigur că era în clar că dânsul nu va putea afla ceva nou şi cine citeşte teza se va lămuri că nu va afla în ea ceva nou.*

Dar nu atât noutatea face un subiect interesant cât mai ales, felul de predare. Imi vine în minte ideea originală a vestitului actor englez GARRICK, *care având să joace rolul regelui* LEAR *în*

teatrul Drury Lane surprinde publicul cu declarația neașteptată că dânsul în locul regelui LEAR *mai bucuros declamă* **„Tatăl nostru"**. *Se poate imagina ce stupefacție a produs această declarație, dar după ce aceasta a trecut cât de mare a fost supriza când* GARRICK *de fapt a și început declamarea. Nu a ajuns nici până la* **„pânea noastră cea de toate zilele"** *când publicul pătruns de farmecul vrăjitor al predării clasice a ascultat până la sfârșit, cu capul descoperit și mâinile împreunate, parafraza imaginată a lumii din povești.*

In ce privește subiectul tezei lui PIPOȘ, *el de mult nu e nou; nici modul de tratare nu e nou, cu un cuvânt teza nu e altceva decât parafrazarea lucrurilor scrise de alții înaintea lui. Valoarea tezei constă numai în felul cum a știut să prelucreze materialul ce l-a avut la dispoziție.*

In această privință constat cu bucurie că D-lui PIPOȘ *i-a reușit să facă o lucrare simpatică și frumoasă, la nivelul științei moderne, care e o dovadă nouă a prețiosului talent cunoscut de mai înainte. Eu accept teza cu mențiunea* **„foarte bine"**.

In ordine cronologică, teza lui PIPOȘ urmează aceea a lui SPIRU HARET, din 1879, a lui DAVID EMMANUEL, din 1879 și a lui GOGU CONSTANTIN, din 1880, trecute toate trei la Sorbona. Trebue însă să relevăm că pe când primele trei au o valoare științifică reală, teza lui PIPOȘ e mai modestă.

Cu trecerea tezei de doctorat activitatea lui PIPOȘ pe terenul științific încetează, domeniul de activitate fiind exclusiv cel pedagogic. Contribuția lui în domeniul educației e destul de cunoscută. In afară de catedra lui de pedagogie, pe care a ținut-o până la moarte, PIPOȘ a mai fost directorul școalei de fete diecezane din Arad, între anii 1905—07, apoi membru în direcția Asociațiunii arădene. A participat la cursurile de vară ținute de Profesorul W. REIN din Jena, a ținut conferințe și a colaborat la mai multe reviste arădene.

Mai cunoscute sunt manualele pedagogice a lui PIPOȘ, care erau folosite ca manuale didactice nu numai în Ardeal, ci și în Bucovina și România. Din acestea merită să amintim: 1. *Psichologia.* 2. *Pedagogia.* 3. *Didactica.* 4. *Metodica școalei poporale și* 5. *Istoria pedagogiei.*

PIPOȘ a fost un om modest și fără pretenții în viață. E caracteristic pentru modestia lui că TITU MAIORESCU, apreciindu-i

valoarea morală şi activitatea intensă în domeniul literaturii pedagogice, l-a chemat la Bucureşti oferindu-i o situaţie corespunzătoare calităţilor lui. El însă a refuzat preferând situaţia modestă de Profesor la Arad.

Imbolnăvindu-se de nervi, PIPOŞ a trăit anii din urmă ai vieţii complet retras chiar şi din cercul prietenilor săi, până la moartea întâmplată în ziua de 29 Septemvrie st. v. (12 Octomvrie) 1913.

* * *

PETRU PIPOŞ a fost un om de mare valoare, atât morală cât şi intelectuală. El face parte din acea pleiadă de profesori ardeleni entuziasmaţi pentru cultura românească, în slujba căruia şi-au pus toate forţele lor. Imprejurările au voit ca el să devină un distins pedagog, creatorul literaturii pedagogice de dincolo de munţi, dar în condiţii prielnice putea să devină un distins matematician. Arădenii recunoscători i-au ridicat un frumos bust în faţa Palatului Cultural, un modest semn al admiraţiei lor pentru munca lui desinteresată de educator şi mare român. Rândurile de mai sus au scopul să-i fixeze locul ce i se cuvine în istoria matematicei româneşti, pentru dragostea şi râvna cu care a cultivat această ştiinţă în anii săi de tinereţe.

VICTOR MARIAN.

CONFIGURAŢIA NUMERELOR PRIME

Prin configuraţia numerelor prime vom înţelege o relaţiune generală matematică între numerele prime. O asemenea relaţiune nu se cunoaşte încă în matematici. Ba chiar s'a şi contestat posibilitatea existenţei ei.

In cele ce urmează, după ce vom stabili, pe calea teoriei structurale: „Gestalttheorie", mai întâi o formulă apropiată, care să ne dea valoarea unui număr prim oarecare, în funcţie de numerele prime mai mici decât el, cu o eroare suficient de mică, vom stabili apoi prin extindere o formulă limitată, care să ne dea relaţiunea generală dintre numerele prime. Vom determina adică *configuraţia numerelor prime,* în primul caz una parţială, iar în

al doilea pe cea totală. Chestiunea prezintă, după cum vom vedea, unele particularităţi importante din punctul de vedere al teoriei cunoaşterii. In încheere vom discuta, pe baza rezultatelor găsite, câteva consecinţe ştiinţifice şi în special filosofice.

Să notăm cu $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots p_n =$ etc. şirul numerelor prime. Pentru rezolvarea problemei propuse, vom transpune mai întâi într'o configuraţie specială metoda cunoscută de determinare a numerelor prime, prin eliminarea din şirul numerelor consecutive a multiplilor de 2, 3, 5,... etc [1]).

In prima linie din tabloul de mai jos, avem şirul (N) al numerelor consecutive: 1, 2, 3,... etc.; în linia următoare notată cu (1) avem indicaţia, simbolizată prin cifra 1, că numerele din şirul (N) mai mari decât 1 se divid cu 1 şi ar putea fi numere prime. Şirurile (2), (3), (5), (7), etc. ne indică prin simbolurile 1 sau 0 că numerele din şirul (N) se divid, respectiv nu, cu numerele prime: 2, 3, 5, 7,... etc.

(N)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20...
(1)	0,	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1...
(2)	0,	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0...
(3)	0,	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0...
(5)	0,	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0...
(7)	0,	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0...

Dacă scădem din (1), considerat ca număr zecimal, pe (2), adică toate rangurile multiple de 2 găsim: 0,00101... etc. Prima cifră diferită de zero, a acestui număr, ocupă rangul zecimal 3, care reprezintă numărul prim imediat mai mare decât 2.

---

1) Ideia de a aplica teoria configuraţiei în domeniul numerelor prime ne-a fost sugerată de lucrarea filosofului german CHRISTIAN VON EHRENFELS: Das Primzallengesetz entwickelt und dargestellt auf Grund der Gestalttheorie, Leipzig 1922. In această lucrare EHRENFELS încearcă să precizeze legea numerelor prime printr'o reprezentare figurală. Procedeul său este însă foarte complicat, necesitând definirea şi aplicarea unor calcule speciale „figurale"; pe de altă parte are desavantajul că nu ne poate conduce la prinderea în formule matematice a configuraţiei obţinute.

Pentru a găsi numărul prim imediat mai mare decât 3 vom scădea din (1) pe (2) şi pe (3), dupăce însă vom scădea din (3) toate cfrele care au rangurile de forma: Mult. 2×3, care sunt cuprinse în şirul (2). Asfel avem; 0,00001010001... etc. Prima cifră diferită de zero ocupă rangul zecimal 5. ş. a. m. d.

Pentru determinarea numărului prim p_{n+1}, vom elimina din şirul (1) simbolul 1, lăsând în schimb simbolul 0, pentru toate numerele corespunzătoare din şirul (N) care se divid cu $2, 3, 5, \ldots p_n$.

Şirul (1), considerat ca număr zecimal, este dat de fracţia: $\frac{1}{90}$. Şirurile (2), (3), (5)... (p_n) se pot scrie respectiv sub formele:

$$\frac{1}{10^{p_1}-1}, \frac{1}{10^{p_2}-1}, \frac{1}{10^{p_3}-1}, \ldots \frac{1}{10^{p_n}-1}$$

pe care să le notăm prin simbolurile: Mp_1, Mp_2, Mp_3,... Mp_n. In genere să notăm:

$$Mp_i\, p_j \ldots \text{ etc.} = \frac{1}{10^{p_i\, p_j \ldots \text{etc.}} - 1}.$$

Servindu-ne de notaţiile de mai sus, determinarea numărului prim p_{n+1} o vom face prin următoarele operaţii:

Scădem din şirul (1), reprezentat prin fracţia $\frac{1}{90}$, mai întâi toţi termenii multipli de 2 ai şirului (N), adică şirul (2), reprezentat prin formula M2. Să Notăm:

$$S_1 = M2.$$

Scădem apoi toţi termenii multipli de 3, cu excepţia celor multipli de $2 \times 3 = 6$, cari au fost scăzuţi odată, în S 1; deci vom scădea:

$$S_2 = M3 - M2.3.$$

Până acum am redus deci din şirul (1) pe toţi multiplii de 2 şi 3. Să scădem acum multiplii de 5, în afară de cei cari sunt în acelaş timp şi multipli de 2 şi 3, cari au fost scăzuţi odată, fiind cuprinşi în S_1 şi S_2. Multiplii de 5 cuprinşi în S_1 şi S_2 sunt toţi multiplii de 2 şi 3, cari sunt în acelaş timp şi multipli de 5.

Aceştia se obţin adăugând în S_1 şi S_2, după simbolul M şi factorul 5. De astă dată vom avea deci de scăzut:

$$S_3 = M5 - M2.5 - M3.5 + M2.3.5.$$

După aceeaşi regulă vom scădea apoi multiplii de 7, lăsând şi aci la o parte pe acei cari au mai fost scăzuţi odată, fiind în acelaş timp şi multipli de 2, 3 şi 5. Adică:

$$S_4 = M7 - M2.7 - M3.7 - M5.7 + M2.3.7 + M2.5.7 + M3.5.7 - M2.3.5.7.$$

După n asemenea operaţii vom avea de scăzut:

$$S_n = M p_n - \sum_1^{n-1} M p_1 p_n + \sum_1^{n-1} M p_1 p_2 p_n \pm \ldots$$

$$+ (-1)^i \sum_1^{n-1} M p_1 p_2 \ldots p_i p_n \pm \ldots + (-1)^{n-1} M p_1 p_2 \ldots p_n .$$

De aci rezultă:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \sum_1^n M p_1 - \sum_1^n M p_1 p_2 + \sum_1^n M p_1 p_2 p_3 \pm \ldots$$

$$+ (-1)^{i-1} \sum_1^n M p_1 p_2 \ldots p_i \pm \ldots + (-1)^{n-1} M p_1 p_2 \ldots p_n .$$

Să notăm cu F_n formula care ne dă totalul operaţiilor indicate mai sus. Avem:

$$F_n = \frac{1}{90} - (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)$$

adică:

$$(1)\quad F_n = \frac{1}{90} - \left[\sum_1^n M p_1 - \sum_1^n M p_1 p_2 \pm \ldots + (-1)^{n-1} M p_1 p_2 \ldots p_n \right]$$

în care se vede că F_n este o funcţiune de $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Efectuând calculele, pentru o anumită valoare a lui n, vom obţine pentru F_n un număr zecimal, care ne conduce la aflarea imediată a numărului prim următor: p_{n+1}. Şi anume p_{n+1} este dat de rangul zecimal pe care îl ocupă în F_n prima cifră diferită de zero. Adică avem:

$$F_n = \frac{1}{10^{p_{n+1}}} + \varepsilon$$

în care:

$$\varepsilon < \frac{1}{10^{p_{n+1}+2}} .$$

Luând logaritmul lui F_n obţinem pentru numărul întreg p_{n+1} o valoare foarte apropiată:

$$(\alpha) \qquad p_{n+1} = \text{aprox.} - \log F_n .$$

Exemplu de calcul. Pentru aflarea numerică a unui număr prim, să simplificăm mai întâi calculul în formula (1), pornind dela observaţia că:

$$\frac{10^{p_1 p_2 \cdots} - 1}{10^{p_x} - 1} = \underbrace{\overbrace{00\ldots01}^{p_x}\ldots00\ldots01}_{p_1 p_2 \ldots p_n}$$

în care membrul al doilea reprezintă un număr întreg de $p_1 p_2 \ldots p_n$ cifre, format din grupe de câte p_x cifre, care se repetă.

Astfel pentru $n = 2$, F_n din (1) ne dă:

$$F_2 = \frac{1}{90} - \frac{010101 + 001001 - 1}{999999}$$

$$\therefore \quad F_2 = \frac{101}{9999990}$$

$$\log F_2 = 2{,}00432 - 6{,}99999 = -\,4{,}995.$$

Deci:

$$p_3 = -\log F_2 = 4{,}995 = \text{aprox. } 5 .$$

In cazul numerelor prime mai mari decât 5 se vede că formula nu poate fi comod utilizată practic, din cauza complicaţiei calculelor. Credem că o simplificare a acestei formule, în sensul transformării ei într'o formulă empirică, cu rezultate foarte apropiate pentru scopuri practice, este posibilă — analog transformărilor cunoscute ale unor formule din fizică în formule empirice uşor utilizabile în aplicaţiunile tehnice. O asemenea simplificare nu intră însă în cadrul lucrării de faţă.

Să facem acum şi o aplicaţiune teoretică. Să dovedim, de pildă, cu ajutorul formulei (α), pe o altă cale decât cea cunoscută, că şirul numerelor prime este infinit de mare.

Pentru aceasta să presupunem că p_n ar fi cel mai mare număr prim existent. Formula (α) ne arată însă că primele n numere ne definesc un nou număr prim, imediat mai mare decât acesta. De aci conchidem că p_n nu poate fi ultimul număr prim; şirul acestora este aşa dar fără sfârşit.

Desigur că formula (α) ne oferă şi alte posibilităţi de aplicaţiuni, în scopuri teoretice matematice. Astfel ea ne conduce imediat către expresiunea care ne dă valoarea diferenţei dintre două numere prime consecutive; ş. a. m. d.

Dar nici aceste aplicaţiuni teoretice nu intră în scopul lucrării de faţă, în care ne-am propus să stabilim în principal *configuraţia numerelor prime,* adică relaţiunea matematică generală dintre numerele prime şi să arătăm *consecinţele filosofice* ale acesteia.

Să revenim asupra formulei (α) care, prin extindere la limită, ne va conduce către formula care reprezintă configuraţia căutată.

Să vedem mai întâi care este eroarea maximă cu care poate fi determinat numărul prim p_{n+1} după formula (α). Pornind dela prima cifră diferită de zero a numărului zecimal F_n, acesta poate fi socotit pentru calculul părţii zecimale a logaritmului (mantisei), ca fiind cuprins între 1000... etc., care ne dă pentru mantisă valoarea 0 şi: 10100011, în cazul când numerele prime p_n şi p_{n+1} se confundă cu două numere impare consecutive, care ne dă pentru mantisă valoarea 0,00475.

Conchidem că valoarea numărului p_{n+1} este dată de formula (α) cu o eroare mai mică decât 0,005.

Putem însă determina pe p_{n+1} cu o eroare mai mică decât orice câtime dată. Pentru aceasta vom exprima pe p_{n+1} nu numai în funcţie de numerele $p_1, p_2, .. p_n$, ci şi de $p_{n+2}, p_{n+3}, ...$ etc. In adevăr, eliminând din F_n cifra 1 care ocupă rangul p_{n+2} adică punând:

$$p_{n+1} = -\log\left(F_n - \frac{1}{10^{p_{n+2}}}\right)$$

vom găsi valoarea lui p_{n+1} cu o eroare mai mică decât 0,0000005, deoarece mantisa logaritmului se calculează de astădată pe numărul 10000011.

Procedând analog la eliminarea din F_n a cifrelor 1 care ocupă rangurile $p_{n+3}, p_{n+4}, ..$ etc., vom obţine pentru p_{n+1} erori din ce în ce mai mici. Pentru eliminarea din F_n a cifrelor 1 care ocupă rangul p^2_{n+1} sau ranguri mai mari, vom considera în operaţiile noastre nu numai numerele prime mai mari decât p_{n+1}, ci şi multiplii numerelor $p_{n+1}, p_{n+2}, ...$ etc., care conţin factori primi

egali sau mai mari decât p_{n+1}. In acest ultim caz în formula lui F_n este cuprinsă şi câtimea p_{n+1} aşa că relaţia (α) se transformă într'o ecuaţie, a cărei necunoscută este p_{n+1}. Nu importă dacă putem rezolva sau nu comod această ecuaţie, prin tehnica algebrei curente; prin consideraţiunile de mai sus am vrut să arătăm doar posibilitatea empirică a reducerii sub o valoare dată, oricât de mică, a erorilor în determinarea numărului prim p_{n+1}, în funcţiune de celelalte numere prime.

Se vede că eliminând la infinit pe calea arătată, toate cifrele diferite de zero, din numărul zecimal F_n, afară de cea care ocupă rangul p_{n+1}, obţinem o ecuaţie în care necunoscuta p_{n+1} urmează să fie determinată în funcţie de toate celelalte numere prime, cuprinse între zero şi infinit.

Mai comod această ecuaţie, care ne arată relaţiunea „limită" dintre un număr prim oarecare p_{n+1} şi toate celelalte numere prime, şi care reprezintă *configuraţia numerelor prime,* se poate scrie sub formula următoare:

$$(\beta) \qquad \lim F_m = 0 \qquad (m \to \infty).$$

S'ar putea aduce obiecţia că relaţia dintre numerele prime de mai sus, nu ar reprezenta o realitate şi ca atare s'ar dovedi imposibilitatea ei, prevăzută de unii matematicieni, prin aceea că ea cuprinde un număr infinit de date, pe cari nu le putem calcula în practică. Această obiecţie cade însă, deoarece din consideraţiile precedente am văzut că practic putem obţine pentru numărul prim căutat erori din ce în ce mai mici, tinzând către zero; formula limită (β) este o relaţie matematică, cu caracteristica ciudată însă de a fi valabilă numai la „limită". Şi fiind în domeniul matematicilor pure, desigur că realitatea ralaţiei subsistă chiar dacă datele ei, prin numărul lor mare, ies din câmpul experienţei noastre.

Aşa dar configuraţia numerelor prime este reprezentată doar printr'o relaţie puţin obişnuită în matematici, exprimată printr'un număr infinit de date; prin aceasta nu înseamnă că ea îşi pierde caracterul de existenţă.

De altfel relaţia (β) se mai poate scrie şi sub o altă formă, din care să reiasă evident cele spuse mai sus.

Să notăm cu: $F_m(p_{n+1})$, $(m \to \infty)$, expresiunea cunoscută F_m, în care figurează toate numerele prime, dela zero până la infinit, afară de numărul prim p_{n+1}. Expresiunea va fi reprezentată în acest caz printr'un număr zecimal, format din cifrele zero, afară de cifrele de ranguri:

$$p_{n+1} \ , \ p^2_{n+1} \ , \ p^3_{n+1}, \ldots \text{ etc.},$$

care sunt egale cu unitatea.

Avem adică:

$$\lim_{m \to \infty} F_m(p_{n+1}) = \frac{1}{10^{p_{n+1}}} + \frac{1}{10^{p^2_{n+1}}} + \frac{1}{10^{p^3_{n+1}}} + \ldots \text{ etc.}$$

de unde se vede că numărul prim p_{n+1} se exprimă în funcţie de toate celelalte numere prime, dela zero până la infinit.

(Va urma).

G. ZAPAN
Doctor în filosofie.

ASUPRA REPREZENTĂRII ANALITICE A ARIILOR ŞI LINIILOR POLIGONALE

1. Ne vom folosi în rândurile ce urmează de funcţiunea discontinuă a lui R. şi F. NEVANLINNA

$$\overset{+}{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{când } f(x) > 0 \\ 0 & \text{» } f(x) \leqq 0. \end{cases}$$

Notaţia $\overset{+}{f}$ se reduce dealtfel la «valoarea absolută» prin egalitatea de definiţie

$$\overset{+}{f}(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}.$$

Cu ajutorul acestei funcţiuni vom construi unele ecuaţii cari vor reprezenta analitic: regiuni plane mărginite de drepte, linii poligonale sau mixte, cum şi ecuaţii ale poligoanelor convexe şi ale ariilor cuprinse în interiorul lor. Metoda se extinde, cu uşurinţă, la probleme de aceeaşi natură în spaţiul cu trei dimensiuni.

Vom începe cu cazurile cele mai simple.

2. x şi y fiind cele două variabile ale planului ordonat după două axe de coordonate rectangulare, y este negativ în regiunea semi-planului inferior şi nul pe axa x-ilor. Urmează că $\overset{+}{y}$ este nul în toată această regiune şi pe axa x-ilor.

Deci ecuaţia

$$\overset{+}{y} = 0$$

sau

$$y + | y | = 0$$

reprezintă analitic semi-planul inferior şi axa x-ilor.

Rezultă imediat că ecuaţia semi-planului superior şi axei x-ilor este

$$-y + | y | = 0 .$$

Deasemenea :

a) Ecuaţia axei y-ilor şi a semi-planului din stânga ei este

$$x + | x | = 0 ;$$

b) Ecuaţia axei y-ilor şi a semi-planului din dreapta ei este

$$-x + | x | = 0 .$$

3. Următor unor consideraţiuni analoage, ecuaţia regiunii primului cadran împreună cu semi-axele ox şi oy, inclusiv origina, va fi

$$(-\overset{+}{x}) + (-\overset{+}{y}) = 0$$

adică

$$-x - y + | x | + | y | = 0 .$$

Deasemenea, ecuaţiile referitoare la celelalte cadrane: 2, 3, 4 vor fi respectiv:

$$(\overset{+}{x}) + (-\overset{+}{y}) = 0 \quad , \quad (\overset{+}{x}) + (\overset{+}{y}) = 0 \quad , \quad (-\overset{+}{x}) + (\overset{+}{y}) = 0$$

adică:

$$x - y + | x | + | y | = 0$$

$$x + y + | x | + | y | = 0$$

$$-x + y + | x | + | y | = 0 .$$

4. O dreaptă împarte planul în două regiuni. Fie ecuaţia ei

$$\Delta = ax + by + c = 0 .$$

Intr'una din regiuni avem $\Delta < 0$ şi în cealaltă $\Delta > 0$. Ecuaţia regiunii în care expresiunea Δ este negativă va fi

$$\overset{+}{(ax + by + c)} = 0$$

adică

$$ax + by + c + | ax + by + c | = 0,$$

ea fiind verificată deasemenea de toate punctele depe dreapta $\Delta = 0$. Ecuaţia celeilalte regiuni este deci

$$-ax - by - c + | ax + by + c | = 0.$$

5. Fie

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

ecuaţia cercului cu centrul în C (a, b) şi raza r. Cum pentru $x = a$, $y = b$, expresiunea din membrul întâi este negativă, urmează că ecuaţia cercului împreună cu domeniul interior este

$$[\overset{+}{(x - a)^2 + (y - b)^2} - r^2] = 0$$

adică

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 + | (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 | = 0.$$

Ecuaţia regiunii exterioară cercului va fi

$$r^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2 + | (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 | = 0.$$

Pentru orice curbă închisă sau deschisă, fără puncte multiple, planul se împarte în două regiuni, ale căror ecuaţii se pot scrie cu uşurinţă după cum s'a arătat în cazul cercului.

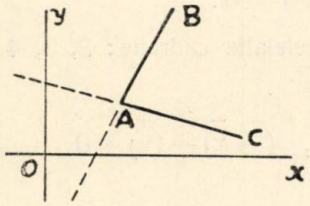


fig. 1

6. Fie dreptele de ecuaţii

$$\Delta_1 = \pm (a_1 x + b_1 y + c_1) = 0$$

$$\Delta_2 = \pm (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0,$$

concurente în punctul A (fig. 1).

Putem alege semne convenabile aşa fel încât în interiorul unghiului BAC, să avem $\Delta_1 < 0$ şi $\Delta_2 < 0$. Atunci ecuaţia interiorului unghiului BAC, inclusiv laturile şi vârful, va fi

$$\overset{+}{\Delta_1} + \overset{+}{\Delta_2} = 0.$$

Se poate verifica că orice punct care nu este situat în interiorul unghiului BAC sau pe laturile sale, nu verifică ecuaţia, deoarece

în acest caz, sau unul din termenii membrului întâi este nul, celălalt fiind pozitiv, sau ambii termeni sunt pozitivi. Ecuația desvoltată este

$$(a_1 + a_2)\,x + (b_1 + b_2)\,y + c_1 + c_2 + |\,a_1x + b_1y + c_1\,| + |\,a_2x + b_2y + c_2\,| = 0\,.$$

7. Fie segmentul AB din dreapta Δ a cărei ecuație este

$$\Delta = ax + by + c = 0\,.$$

Ducem prin A și B (fig. 2) două drepte

$$\Delta_1 = \pm\,(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

$$\Delta_2 = \pm\,(a_2x + b_2y + c_2) = 0,$$

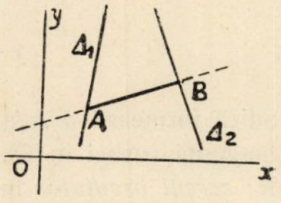


fig. 2.

ale căror ecuații sunt scrise în așa fel încât, în regiunea cuprinsă între ele, care cuprinde și segmentul AB, să avem:

$$\Delta_1 < 0 \quad \text{și} \quad \Delta_2 < 0.$$

Atunci ecuația segmentului AB este

$$\Delta + \overset{+}{\Delta}_1 + \overset{+}{\Delta}_2 = 0\,,$$

deoarece ultimii doi termeni sunt nuli în interiorul și pe laturile unghiului format de dreptele Δ_1 și Δ_2, iar primul termen este nul numai dealungul dreptei Δ. Se vede că orice punct care nu se află pe segmentul AB are coordonate cari nu anulează deodată toți termenii ecuației; se ține deasemenea seama că Δ_1 și Δ_2 nu se confundă cu Δ.

Dreptele Δ_1 și Δ_2 pot fi oricari, trebuind să îndeplinească numai condiția de a trece repectiv prin A și B.

In locul celor două drepte Δ_1 și Δ_2 s'ar fi putut lua de pildă cercul descris pe AB ca diametru. Dacă $\varphi\,(x, y) = 0$ este ecuația lui, ecuația segmentului AB este

$$\overset{+}{\varphi}\,(x, y) + \Delta = 0\,.$$

In mod analog se poate scrie ecuația unui segment dintr'o linie oarecare, a cărei ecuație este cunoscută.

(Va urma). N. O. ZAHARIA.

ASUPRA CONTACTULUI CONICELOR

In cele ce urmează dau o nouă construcţie elementară, conicelor (C_2), (C_3), (C_4), ce au un contact de ordinul 2, 3 sau 4, cu o curbă, într'un punct dat [1]).

1. Ecuaţiile conicelor (C_2), (C_3), (C_4).

1°. *Conicele* (C_2). Luând ca axe tangenta şi normala în punctul O al curbei date şi însemnând cu R şi R_1 primele două raze de curbură în O, conicele (C_2) au ecuaţia

$$y - \frac{1}{2R}x^2 + \lambda xy + \mu y^2 = 0$$

adică formează *o reţea,* ce au drept *conici de bază: parabola* tangentă curbei în O şi cu focarul în mijlocul razei de curbură R; *cercul osculator* în O; o *iperbolă echilateră* trecând prin O şi având focarul în centrul prim de curbură C.

Conica (C_2) trecând prin două puncte $M_0(x_0, y_0)$ şi $M_1(0, y_1)$, are centrul pe dreapta

$$(D) \quad 2x_0 y_0 y_1 x - (x_0^2 y_1 - 2R y_0 y_1 + 2R y_0^2) y = 0,$$

care va înlesni construcţia ei.

Iperbolele echilatere şi parabolele acestei reţele, fac parte din două *fascicole,* ale căror proprietăţi sunt studiate.

---

1) A se vedea:

1°. TRANSON, *Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces, Journal (de Math.* t. VI p. 191—208).

2°. F. TISSERAND, *Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal* p. 66.

3°. M. D'OCAGNE, *Sur les coniques qui ont avec une courbe donnée, en un de ses points, un contact d'ordre supérieur Nouvelles Annales (de Math.,* 3e, t. XVI p. 252).

4°. M. NICULESCU, *Proprietăţi ale curbelor plane (Gazeta Matematică,* t. 31, p. 287).

5°. T. POPOVICIU, *Asupra curbelor plane (Gazeta Matematică,* t. 41, p, 613).

6°. N. ABRAMESCU, *Sur l'étude de la forme d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points et une nouvelle interprétation de la cubique donnant les tangentes de* DARBOUX *et* SEGRE *(Mathematica,* t. 12, 1936, p. 217—226).

2°. *Fascicolul* (C_3). Are ecuația

$$3Rx^2 - 2R_1xy - 6R^2y + \lambda y^2 = 0$$

și se observă că este determinat de *iperbola* (H) a cărei ecuație este

$$3Rx^2 - 2R_1xy - 6R^2y = 0$$

și *tangenta* în O, ca dreaptă dublă.

Această iperbolă are *centrul* pe dreapta $3Rx - R_1y = 0$, care se mai numește *normala afină* în O și pe *asimptota* $x + \frac{3R^2}{R_1} = 0$.

3°. *Conica osculatoare* (C_4).

Dacă considerăm cele trei raze de curbură consecutive în O, R, R_1, R_2, ecuația conicei (C_4) este

$$3Rx^2 - 2R_1xy - 6R^2y - \frac{3R_2R - 5R_1^2}{3R}y^2 = 0.$$

Se observă că: (C_4) aparține fascicolului (C_3); centrul său este deci pe normala afină; taie normala în N, iar *tangenta sa în* N *taie asimptota lui* (H), *paralelă la normală, pe tangenta în* O.

Punctul $N\left(0, -\frac{18R^3}{3R_2R - 5R_1^2}\right)$ va fi ușor construit.

2. Construcția conicelor. (C_2), (C_3), (C_4). 1°. *Rețeaua* (C_2). Se poate construi una din aceste conice când se cunosc: două puncte $M_0(x_0, y_0)$ și $M_1(0, y_1)$, sau unul singur $M_1(0, y_1)$ și tangenta în M_1, sau în fine centrul, etc...

1) *Conica trecând prin* M_0 *și* M_1. Vom construi diametrul Δ, care face cu OT unghiul $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_1}{\frac{x_0y_1}{2y_0} - \frac{R(y_1 - y_0)}{x_0}}$.

Fie M′ mijlocul lui $\overline{OM_1}$. Paralela prin M′ la OM_0, taie pe OT în M″. Prin centrul de curbură C se duce o perpendiculară pe M_0M_1 ce taie OT în C′. Două paralele duse prin C′ și M_1 la OM_1 și OT se taie în C″. *Diametrul* Δ *este paralela din* O *la* M″C″. Conica poate fi construită.

2) *Se cunoaște tangenta în* M_1. Caz particular al precedentului, căci M_0 și M_1 se confundă. Dacă tangenta în M_1 taie OT în T_1, centrul se mai află și pe dreapta $M'T_1$.

3) *Iperbolele echilatere ale rețelei* (C_2) se construesc, când se dă numai punctul M_0. In acest caz M' este simetricul lui C în raport de O și M_1 simetricul lui O față de M.

4) *Parabolele* (C_2), trecând prin $M_1(0, y_1)$, au axa paralelă cu dreapta ce unește O cu punctul $S(2R, \sqrt{2Ry_1})$. Acest punct se construiește luând pe OT, un segment OP egal cu 2R în sensul lui C_1 cel de-al doilea centru de curbură și în sens invers un segment OQ egal cu OM_1.

Cercul de diametru PQ taie normala ON în R. Paralelele duse prin R la OT și prin P la OM_1 se taie în S.

D-l M. D'OCAGNE a dat construcția pentru M_1 oarecare.

2°. *Fascicolul* (C_3). Iperbola (H) a acestui fascicol e *omologică cu conicele fascicolului* și are ca centru și axă de omologie O și OT.

1) *Construcția lui* (H). Se cunosc O, OT, M_1 și diametrul (D) (normala afină). *Asimptotele* se construiesc astfel. Cercul de rază OC, taie OT pe sensul negativ în A. Paralela prin A la ON taie (D), în A_1.

Cercul de rază OA_1 intersectează OT în A_2 și A_3 (A_2 pe sensul negativ).

Paralela din A_2 la ON, taie (D) în ω_1 centrul lui (H), iar asimptotele sunt $A_2\omega_1$ și $A_3\omega_1$.

2) *Construcția unei conice* (C_3), se face în două feluri. Dreapta ce unește A_2 cu M' (mijlocul lui M_1) taie (D) în γ, *centrul* ei.

Prin puncte. Fie α un punct pe (H), β omologul său pe (C_3) și M'_1 a doua intersecție a lui (H) cu ON. M'_1 este la infinit pe perpendiculara din α la OT. Construim pe β astfel. *Se ia pe* (H) *un punct* α *care se proiectează în* α' *pe* OT. *Dreptele* $O\alpha$ *și* $M_1\alpha'$ *se taie în* β.

3) *Iperbola echilateră osculatoare.* Aparține lui (C_3) și trece prin simetricul punctului unde cercul osculator taie din nou normala, în raport de O. *Centrul ei* N_1 este proecția lui M' pe (D). *Cercul de rază* ON_1 *taie tangenta* OT în A_2 și A_3. Asimptotele sunt A_2N_1 și A_3N_1.

4) *Parabola osculatoare* se construește astfel. *Paralela la* (D) *prin* A_2 taie ON *în* M' *și* M_1 *este simetricul lui* M' *față de* O. A_2 M_1 *este tangenta la parabolă.*

3°. *Conica osculatoare* (C_4). Aparţine lui (C_3), iar punctul M_1 a devenit $M_1\left(0, -\frac{18R}{3R_2R - 5R_1^2}\right)$. Construcţia este următoarea.

Se ia pe ON *un segment egal cu* $\frac{5}{3}R_1$, *obţinând* M. *Paralela prin* M *la* OT *taie* OC_1 *în* Q_1. *Pe* Q_1M *se ia segmentul* $\overline{Q_1P_1} = \overline{C_1C_2}$ *în sensul lui* Q_1M *şi se proiectează* P_1 *în* P' *pe* CC_1. *Pe sensul pozitiv al lui* OT *se ia* $OR_1 = 6R$. *Paralela prin* R_1 *la* ON *taie* OP' *în* V, *iar paralela prin* V *la* OT *intersectează* ON *în* M_1. Având punctul M_1 construcţia, e simplă.

CPT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

PROGRAMA ANALITICĂ
HOTĂRÎTĂ PENTRU CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE" DIN ANUL 1939

Clasa IV-a. Toată materia prevăzută de programa analitică.

Clasa V-a. Grupa I. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. La împărţirea cu $(x+a)$ se va face rezolvarea ecuaţiilor cu rădăcini întregi şi fracţionare.

2. La radicale se va face raţionalizarea numitorilor cari conţin radicale patrate şi de indici superiori.

3. La sistemele de ecuaţii de gradul I se vor cere metode particulare de rezolvare şi sisteme reductibile la gradul I.

4. La discuţia semnului trinomului se va face generalizare în legătură cu punctul 1.

5. Transformarea expresiunilor de forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

6. Progresiuni aritmetice şi geometrice.

Grupa II-a. **Geometria plană.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Fascicole de drepte paralele şi de drepte concurente (teoreme directe şi reciproce).

2. Omotetia (La cercuri: centre de asemănare directe şi inverse).

3. Teorema lui MENELAUS şi CEVA şi reciprocele lor.

4. Teoremele lui PTOLOMEU pentru patrulaterele inscriptibile. Teorema lui MIQUEL. Patrulater circumscris unui cerc. Cercuri ortogonale. Cercul celor nouă puncte.

5. Puterea unui punct faţă de un cerc. Ax şi centru radical.

6. Raportul ariilor a două polinoame asemenea.

7. Reciproca teoremei lui PITAGORA. Relaţia metrică a lui STEWART. Aplicaţie la mediane, etc.

8. Poligoane regulate circumscrise.

Clasa VI-a. Grupa I. **Geometria în spaţiu.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Unghiuri diedre. Măsura lor. Unghiuri triedre şi poliedre, proprietăţile lor.

2. Aria şi volumul trunchiului de piramidă. Extindere la con.

3. Volumul produs de un sector poligonal plan care se roteşte în jurul unei axe. Volumul zonei, calotei, sferei.

Grupa II-a. **Trigonometria.** Toată materia prevăzută în progresie analitică până la „Aplicaţiile trigonometriei la agrimensură şi statică". In plus:

1. Aria unui triunghiu în raport cu elementele date.

2. Raza cercului circumscris în funcţiune de laturile triunghiului. Razele cercurilor înscrise şi exînscrise triunghiului. Relaţiuni.

3. Identităţi trigonometrice.

4. Cazuri particulare de rezolvare la triunghiuri dreptunghice şi oarecare.

5. Determinarea distanţelor între puncte inaccesibile.

6. Problema hărţii.

Clasa VII-a. Grupa I. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică, fără „Aplicaţii la cinematică", la care se adaogă: Serii, criterii de convergenţă, seria lui *e*, definiţia logaritmilor neperieni.

Grupa II-a. **Geometria descriptivă.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Diviziuni armonice, fascicole armonice. Pol şi polară în raport cu un unghiu şi în raport cu un cerc.

Teoremele lui PASCAL şi BRIANCHON. Patrulatere complete.

2. Transformări: inversiune, polare reciproce.

Clasa VIII-a. Grupa I. **Algebra.** Materia prevăzută de programa analitică.

Grupa II-a. **Geometria analitică.** Materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Schimbarea de axe.
2. Pol şi polară.
3. Clasificarea conicelor.

Grupa III-a. **Mecanica.** Materia prevăzută de programa analitică. In plus Cinematica.

* * *

Orice candidat trebue să cunoască materia respectivă a clasei precedente cu adăugirile prevăzute în prezenta programă.

NOTE MATEMATICE

2. **Acum o sută de ani în lumea matematică.** *Date culese în biblioteca Seminarului Matematic din Iaşi din revistele timpului.*

Citäm din lucrarea lui G. LAMÉ. „*Sur les intégrales définies déduites de la théorie des surfaces orthogonales*". (Journal de Mathématiques, t. 3, Ire série, 1838, p. 552) care constituie una din primele verigi din lanţul memoriilor care au pus bazele diferitelor clase de funcţiuni de mare importanţă atât în analiza pură cât şi în fisica matematică.

„Studiul suprafeţelor ortogonale, graţie aplicaţiunilor la care dă naştere, îmi pare din ce în ce mai fecund. Parametrii acestor suprafeţe, introduse în analiză ca sisteme de coordonate, permit atât rezolvarea variatelor chestiuni din fisica matematică cât şi integrarea unor clase de ecuaţii cu diferenţe parţiale care, pe alte căi, ar rămâne inabordabile. Aşa cel puţin pare că reiesă din memoriile asupra suprafeţelor isoterme, asupra legilor de echilibru al fluidului eterat, asupra coordonatelor curbilinii în general, pe care le-am prezentat la Academie, precum şi din memoriul asupra suprafeţelor isostatice în corpuri solide pe care-l redijez acum...".

3. *Identităţi numerice interesante.* Avem următoarele egalităţi, uşor de verificat prin calcule :

$$2.21^2+3(2.7^2+14^2)=9^2+15^2+24^2+3(2^2+11^2+13^2)=42^2$$

$$2.21^4+3^2(2.7^4+14^4)=9^4+15^4+24^4+3^2(2^4+11^4+13^4)=832^2$$

$$2.21^6+3^3(2.7^6+14^6)=9^6+15^6+24^6+3^3(2^6+11^6+13^6)$$
$$=381182760$$

$$2.21^8+3^4(2.7^8+14^8)=9^8+15^8+24^8+3^4(2^8+11^8+13^8)$$
$$=196118530020$$

$$2.21^{10}+3^5(2.7^{10}+14^{10})=9^{10}+15^{10}+24^{10}+3^5(2^{10}+11^{10}+13^{10})$$
$$=103785926086584$$

$$2.21^2=9^2+15^2+24^2$$

$$2.21^4=9^4+15^4+24^4$$

$$9+15=24$$

$$2.7^2+14^2=2^2+11^2+13^2$$

$$2.7^4+14^4=2^4+11^4+13^4$$

$$2.7=14 \quad \text{şi} \quad 2+11=13.$$

Aceste egalităţi sunt un exemplu numeric din soluţiile întregi ale sistemului :

$$2A^2+3(2a^2+b^2)=B^2+C^2+D^2+3(x^2+y^2+z^2)$$

$$2A^4+3^2(2a^4+b^4)=B^4+C^4+D^4+3^2(x^4+y^4+z^4)$$

$$2A^6+3^3(2a^6+b^6)=B^6+C^6+D^6+3^3(x^6+y^6+z^6)$$

$$2A^8+3^4(2a^8+b^8)=B^8+C^8+D^8+3^4(x^8+y^8+z^8)$$

$$2A^{10}+3^5(2a^{10}+b^{10})=B^{10}+C^{10}+D^{10}+3^5(x^{10}+y^{10}+z^{10})$$

$$2A^2=B^2+C^2+D^2$$

$$2A^4=B^4+C^4+D^4$$

$$B+C=D$$

$$a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2$$

$$a^4+b^4+c^4=x^4+y^4+z^4$$

$$2a=b \quad \text{şi} \quad x+y=z.$$

A. MOESSNER.

4. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]). Pentru $p = 3$ şi N_p începând cu 7 am găsit următoarele 76 soluţiuni pentru ecuaţia

$$p \times N_p = N.$$

N_p	N	N_p	N
701 248 965	2 103 746 895	714 650 289	2 143 950 867
701 249 856	2 103 749 568	714 652 890	2 143 958 670
701 254 986	2 103 764 958	715 984 602	2 147 953 806
701 264 895	2 103 794 685	715 984 620	2 147 953 860
701 285 649	2 103 856 947	716 450 289	2 149 350 867
701 459 862	2 104 379 586	716 452 890	2 149 358 670
701 465 289	2 104 395 867	719 465 802	2 158 397 406
701 598 462	2 104 795 386	719 465 820	2 158 397 460
701 645 289	2 104 935 867	719 645 802	2 158 937 406
701 946 582	2 105 839 746	719 645 820	2 158 937 460
701 964 582	2 105 893 746	719 802 456	2 159 407 368
701 982 456	2 105 947 368	719 802 546	2 159 407 638
702 145 986	2 106 437 958	719 824 560	2 159 473 680
702 159 846	2 106 479 538	720 159 846	2 160 479 538
702 194 658	2 106 583 974	720 194 658	2 160 583 974
702 196 458	2 106 589 374	720 196 458	2 160 589 374
702 456 198	2 107 368 594	721 459 860	2 164 379 580
702 489 651	2 107 468 953	721 598 460	2 164 795 380
702 498 561	2 107 495 683	721 946 580	2 165 839 740
702 546 198	2 107 638 594	724 560 198	2 173 680 594
702 549 861	2 107 649 583	724 561 980	2 173 685 940
702 648 951	2 107 946 853	724 896 501	2 174 689 503
702 856 491	2 108 569 473	724 896 510	2 174 689 530
702 865 491	2 108 596 473	724 985 601	2 174 956 803
702 891 465	2 108 674 395	724 985 610	2 174 956 830
702 891 645	2 108 674 935	725 460 198	2 176 380 594
710 248 965	2 130 746 895	725 461 980	2 176 385 940
710 249 856	2 130 749 568	725 498 601	2 176 495 803
710 254 986	2 130 764 958	725 498 610	2 176 495 830
710 264 895	2 130 794 685	726 489 501	2 179 468 503
710 285 649	2 130 856 947	726 489 510	2 179 468 530
710 286 549	2 130 859 647	728 564 901	2 185 694 703
712 489 650	2 137 468 950	728 564 910	2 185 694 730
712 498 560	2 137 495 680	728 654 901	2 185 964 703
712 549 860	2 137 649 580	728 654 910	2 185 964 730
712 856 490	2 138 569 470	728 901 465	2 185 704 395
714 598 602	2 143 795 806	728 901 645	2 186 704 935
714 598 620	2 143 795 860	728 914 650	2 186 743 950

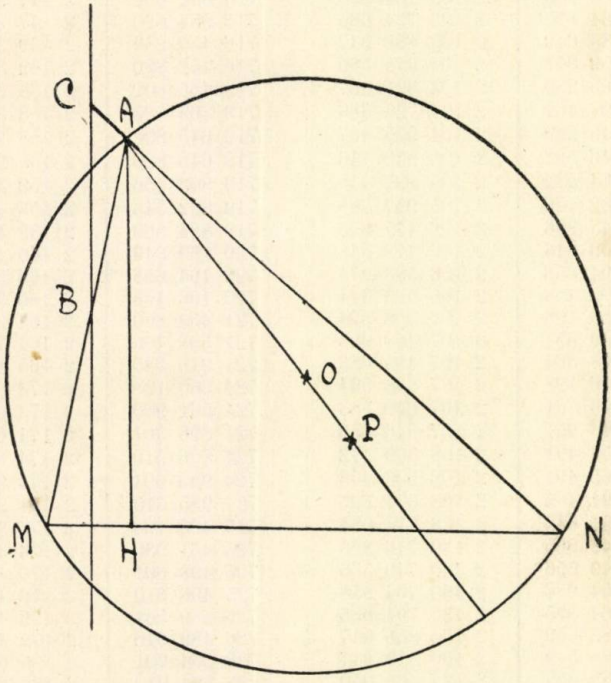
G-L GH. BUICLIU.

1) Urmare la Nota dela pag. 29 Vol. XLIV.

5. *O problemă de geometrie plană propusă la Concursul Gazetei Matematice.*

La Concursul *Gazetei Matematice* din anul acesta, am propus pentru lucrarea scrisă de Geometrie plană, la clasa V-a, următoarea problemă:

„Se dă un cerc ω *cu centrul* O *şi trei puncte* A, M, N *pe cerc. O dreaptă* Δ *perpendiculară pe* MN *întâlneşte dreptele* AM, AN *în* B, C.



a) *Să se afle locul geometric al centrului cercului* ABC, *când punctele* M, N *sunt mobile pe cercul* ω.

b) *Fie* P *un punct al dreptei* AO *şi* T *punctul în care tangenta dusă din* P *la cercul* ABC *atinge cercul. Să se afle locul geometric al punctului* T, *punctele* M, N *fiind mobile pe cercul* ω".

Candidaţii prezenţi nu au rezolvat problema; de aceea, şi pentru a satisface un îndemn primit de curând, publicăm soluţia problemei:

a) „Fie AH înălțimea vârfului A în triunghiul AMN.

$$\measuredangle BCN = \measuredangle HAN.$$

Dar înălțimea AH a unui triunghiu și diametrul AO al cercului său circumscris sunt două drepte *izogonale* (egal înclinate pe bisectoarea unghiului), cum se știe [1]), cum se poate arăta ușor. Rezultă:

$$\measuredangle HAN = \measuredangle MAO \quad , \text{ deci } \measuredangle BCA = \measuredangle BAO.$$

Considerând cercul ABC, jumătatea arcului AB este măsură a unghiului BCA, deci și a unghiului BAO.

Deci AO este tangentă la cercul ABC, iar centrul cercului se află pe perpendiculara ridicată în A pe AO, adică pe tangenta în A la cercul ω.

Demonstrația a considerat punctele M, N oricum pe cercul ω. Deci când M, N sunt mobile pe cercul ω, obținem triunghiuri ABC ale căror centre sunt pe tangenta în A la cercul ω. *Locul geometric cerut este această tangentă*".

b) „Am arătat că AO este tangentă la cercul ABC și cum tangentele duse dintr'un punct la un cerc sunt egale, rezultă:

$$\overline{PT} = \overline{PA} = \text{constant.}$$

Locul geometric al punctului T *este deci un cerc cu centrul în* P".

Observări. 1. Cercul ω este ortogonal cu oricare din cercurile ABC.

2. O reciprocă statică a problemei considerate este următoarea:

„*Fie* M *un punct de pe tangenta în* A *la cercul circumscris triunghiului* ABC. *Dacă* M_1 *și* M_2 *sunt proiecțiile lui* M *pe* AB *și* AC, *să se arate că dreptele* BC *și* M_1M_2 *sunt perpendiculare*".

Am propus această problemă în „*Foaia Matematică*" Vol. III, pag. 35 — problema 308 — și ea a constituit sursa problemei dată la concurs.

---

1) G. ȚIȚEICA. Culegere de probleme de geometrie. IV. probl. 9. sau TR. LALESCO. La géométrie du triangle: 1.18.

3. Pentru soluţionarea problemei am considerat figura cu dreapta Δ situată de aceeaşi parte a înălţimii AH cu vârful B. Demonstraţia se desfăşoară la fel când Δ se găseşte de cealaltă parte a înălţimii AH.

C. IONESCU-BUJOR.

6. *Notă asupra parabolei.* Fie M un punct curent pe o parabolă, N proiecţia lui pe axă, O vârful curbei; perpendiculara în M pe OM taie axa în P; din definiţia curbei, avem relaţia

$$MN^2 = 2p \cdot ON,$$ p fiind parametrul;

deci $NP = 2p$, MN fiind înălţimea triunghiului dreptunghiu OMP.

Fie şi D o perpendiculară oarecare pe axă, care taie axa în A, Q proiecţia lui M pe D şi R intersecţia cu axa a perpendicularei din Q pe OM. Avem:

$$OR = OP - PR = ON + NP - MQ = ON - AN + NP = OA + 2p$$

deci: *M fiind un punct variabil pe o parabolă şi* D *o perpendiculară arbitrară pe axă,* Q *proiecţia lui* M *pe* D, *perpendiculara din* Q *pe* OM *trece printr'un punct fix situat pe axă.*

N. N. MIHĂILEANU.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Buenos Aires. Tomul 126. Nr. 1. Iulie 1938. Asupra integralelor lui LAPLACE şi STIELTJES asimptotice, de J. C. VIGNAUX. Sistemele de inecuaţii lineare şi aplicaţiile lor la studiul corpurilor convexe, de F. LA MENZA.

Bulletin of the American Mathematical Society. Menasha, Wis. Vol. 44 Nr. 7. Iulie 1938.

Idem. Vol. 44. Nr. 8. August 1938. Topologia grupurilor de transformare, de P. A. SMITH. Notă asupra problemei elementare a interpolării, de P. ERDÖS şi G. GRÜNWALD. Asupra curbei PEANO a lui LEBESGUE, de I. J. SCHOENBERG. Notă asupra curburii traiectoriilor ortogonale, de J. L. WALSH. O notă asupra funcţionarelor lineare, de R. P. BOAS şi J. W. TUKEY. Asupra unui grup al transformărilor biraţionale de contact, de J. M. FELD. Variaţiuni poligonale, de ALINE A. FRINK şi O. FRINK. O proprietate a funcţiunilor armonice cu trei variabile, de J. W. GREEN. Asupra unui spaţiu metrisabil, de H. E. VAUGHAN. Sinteză formală a două corespondenţe periodice, de H. S. WHITE. Divizibilitatea factorialelor generalizate, de B. ROSENBAUM. Observări asupra formulei de inversiune pentru integrala lui LAPLACE, de D. V. WIDDER şi N. WIENER. Algebre neciclice, de A. A. ALBERT. Transformările grupurilor Fucsiene, de P. K. REES. O generalizare a unei proprietăţi a funcţiunilor armonice, de M. CORAL.

Revista matematică din Timişoara. Anul XVIII. Nr. 7. Septemvrie 1938.

Sphinx. Bruxelles. Anul VIII. Nr. 10. Octomvrie 1938. Contribution au problème des 4 couleurs, de I. RATIB. Asupra patratelor de forma $aabb = cc^2$, de V. THÉBAULT. Aritmetica experimentală, de P. POULET.

Contribucion al estudio de las ciencias fisicas y matematicas. Vol. V. Nr. 2. Coordinacion de los principios de la Metrologia, de Ing. M. SIMONOFF.

GH. TH. GHEORGHIU. Memoriu de titluri şi lucrări. 1938.

A. GLODEN. Sur les égalités multigrades. Luxembourg. 1938.

CPT.-COMANDOR ING. I. LINTEŞ. Aparatul central VICKERS pentru tragerile contra aeronavelor. (Extras din Revista Aeronauticei şi Marinei Sept. 1938).

CPT.-C-DOR ING. I. LINTEŞ. Primul tun antiaerian făcut în ţară. (Extras din Revista Aeronauticei şi Marinei. Iunie-Iulie, 1938).

H. VILLAT. *Mécaniques des Fluides.* Paris. Gauthiers-Villars VII, 193 p. Cunoscutul profesor dela Sorbona, D-l HENRI VILLAT, care în decurs de peste un sfert de veac a publicat numeroase memorii cu privire la anumite capitole din Hidrodinamică, dă azi la iveală o serie de lecţiuni de Mecanica fluidelor, ţinute de D-sa la Şcoala naţională superioară de Aeronautică din Paris. Această nouă lucrare însă poate fi consultată cu folos şi de studenţii mai avansaţi în Hidrodinamică, deoarece cadrul strict al lecţiunilor este depăşit prin expunerea unor desvoltări recente în diverse capitole importante ale Mecanicei Fluidelor.

După ce dă sub formă succintă şi esenţială primele noţiuni de Hidrodinamică generală, autorul se opreşte ceva mai mult asupra reprezentării conforme aşa de folositoare azi în soluţionarea multor probleme teoretice de Mecanica fluidelor în două dimensiuni. Formula lui SCHWARZ pentru reprezentarea unui domeniu simplu conex pe interiorul unui cerc este găsită intuitiv după metoda de expunere a D-lui CISOTTI în „Idromeccanica piana". Cazul unui poligon rectiliniu este considerat în mod special pentru a ajunge la o altă formulă a lui SCHWARZ. In fine capitolul acesta de Teoria funcţiilor se încheie cu bine cunoscuta transformare a lui JOUKOWSKY:

$$z = \frac{1}{2}\left(Z^2 + \frac{a^2}{Z^2}\right).$$

Capitolul următor se ocupă de teorema KUTTA-JOUKOWSKY. Formula devenită azi de o întrebuinţare curentă în Aerodinamică, potrivit căreia presiunea totală în cazul circulaţiei este normală vitesei şi proporţională cu vitesa şi cu circulaţia, este dedusă de autor în mod elegant cu ajutorul reziduurilor. Natural că determinarea circulaţiei prin înlăturarea viteselor infinite dă naştere la o discuţie care este reamintită în esenţă. Capitolul se încheie cu o extindere a teoremei la cazul mişcărei ne-permanente.

Foarte interesantă este expunerea succintă a teoriei lui PRANDTL privind suprafeţele portante. In câteva pagini autorul arată simplificările esenţiale aduse de PRANDTL pentru a reduce problema portanţei unei aripi la o problemă KUTTA-JOUKOWSKY. Urmează teoria turbioanelor BÉNARD-KÁRMÁN cu un calcul

simplificat al rezistenței și o schiță a teoriei siajelor. Cartea se încheie cu frumoasele încercări de aproximare a problemei fluidelor cu frecare, făcute în ultimul timp de OSEEN, și cu câteva linii asupra stratului limită a cărei teorie i-a făcut-o PRANDTL și câțiva dintre elevii săi.

Cartea e scrisă cu toată rigoarea pe care i-o cunoaștem autorului din bogata sa activitate, totuși cu multă claritate.

V. VÂLCOVICI.

M. A. BUHL, Profesor la facultatea de științe din Toulouse: *Nouveaux éléments d'Analyse.* Calcul infinitésimal. Géométrie. Physique théorique. Tome II. Variables complexes. 214 pag. Paris. Gauthier Villars 1938.

Volumul urmărește « *une première prise de contact avec les éléments des Mathématiques actuelles, au triple point de vue logique, géometrique et physique* ».

După ce în Cap. I sunt prezentate unele preliminarii formale, noțiuni de cantități complexe, funcțiuni analitice, quasianalitice, teorie cuantică, funcțiuni ciclice, familii normale de funcțiuni, etc., Cap. II se ocupă cu definiția monogeneității în sensul lui CAUCHY, cu diferențiala totală a lui STOLTZ-FRÉCHET, ecuația lui LAPLACE, holomorfie, uniformitate și multiformitate, formula integrală a lui CAUCHY, reprezentarea conformă. Autorul își arată preferințele pentru definiția integrală a funcțiunii analitice, fiind în armonie cu procedeele generale ale științei moderne; din aceasta deduce în Cap. III, după definiția convergenței uniforme a seriilor, după integrarea și derivarea lor, desvoltarea în serie TAYLOR a unei funcțiuni holomorfe, desvoltarea în serie LAURENT, teorema fundamentală a lui LIOUVILLE asupra funcției uniforme fără infinit, teorema fundamentală a ecuațiilor algebrice, teorema reziduurilor, meromorfia, teorema lui MITTAG-LEFFLER. Cap. IV este destinat aplicațiilor reziduurilor, între altele se află formula lui WALLIS, integrale FRESNEL, funcții *euleriene*, formula lui STIRLING, integrala curbilinie a lui HANKEL. Se cercetează funcțiunile întregi ale lui MITTAG-LEFFLER. In Cap. V se studiază dubla periodicitate, homografia, în Cap. VI integralele duble a la CAUCHY, mediile lui CESÀRO, MITTAG-LEFFLER, BOREL. In fine, ultimul capitol, cu titlul CHARLES HERMITE și fizica teoretică se ocupă de fizica matricială, operatorii hermitici, ecuațiile lui MAXWELL, ecuația lui SCHRÖDINGER.

Expunerea făcută cu o vervă caracteristică este unitară, axată în fiecare capitol unei idei, întreg volumul convergând spre teoriile fizice moderne.

Deosebitul interes nu-l face desfășurarea metodică de noțiuni și teoreme ca într'un tratat clasic, ci asociațiile, sugestiile ce se desprind, comentariile. In spațiul dintre două noțiuni, cetitorul trebue să refacă o punte pentru care autorul a indicat numai direcția.

O bibliografie foarte bogată, cuprinzând lucrările cele mai recente, însoțește fiecare capitol și chiar subiectele atinse tangențial.

Fiecare capitol se încheie cu exerciții, unele foarte importante prin câmpul de cercetare pe care il oferă cetitorului. Citâm numai două grupe din multele exerciții de acest fel:

a) Primul se referă la ecuația D-lui PIERRE HUMBERT

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}-3\frac{\partial^3 U}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0$$

pe care a considerat-o D-l J. DEVISME în teza D-sale, de care s'a ocupat D-l M. GHERMĂNESCU și N. BOTEA.

b) Alte trei exerciţii sunt grupate sub titlul *Derivata areolară*, însoţite de numele cercetătorilor în această direcţie deschisă de D-l D. POMPEIU şi încheiate cu trimiterea pentru informaţie suplimentară la Monografia D-lui N. THEODORESCU scrisă asupra derivatei areolare.

După gândul nostru, cartea poate fi urmărită cu folos de acel care a trecut examenul de Analiza matematică şi Teoria funcţiunilor, fiind un prilej de cimentare a cunoştinţelor, de contact cu cercetări recente, o sursă de sugestii.

C. IONESCU-BUJOR.

CERERI

Răspuns la Cererea No. 278.

Defunctul Profesor de matematici, CONSTANTIN DUMITRESCU, îmi era rudă, fiind un unchiu al mamei mele. El s'a născut în Buzău la 30 Septemvrie 1856 ca fiu al unui neguţător a cărui cinste şi situaţie materială îl situau printre fruntaşii târgului său. Cursul primar şi clasele gimnaziale le-a absolvit în oraşul său natal, iar Liceul l'a terminat în Bucureşti. A urmat apoi matematicile la Universitatea din Bucureşti. Diploma lui de Licenţă poartă No. 269 şi data de 12 August 1882.

In acelaşi an cu Ordinul Ministerului Instrucţiunii Nr. 11858 a fost numit Profesor la Şcoala Comercială din Bulevardul Domniţei unde a predat Aritmetica până la 1 Septemvrie 1894 când a fost trecut la Gradul II. A profesat aci până la 9 Martie 1898 când a fost pus în concediu nelimitat, din cauză de boală.

Până la această dată a profesat şi la Liceul Sf. Sava dar nu pot da detalii întrucât arhiva acestui Liceu a fost distrusă de Nemţi în timpul ocupaţiei.

După obţinerea concediului s'a retras la Buzău în mijlocul familiei sale, dar boala de nervi de care suferea, cu multă durere a obligat pe cei de aproape ai săi, să-l interneze la Casa de Sănătate a Doctorului ŞABNER-TUDURI din Bucureşti (Strada Vasile Lascăr 6, peste drum de Statuia lui Vasile Lascăr), astăzi desfiinţată.

Stând acolo a fost pus sub tutela tatălui meu, care-i încasa pensia, plătea cheltuielile cu întreţinerea şi depunea conturile de gestiune în fiecare an la Tribunal.

Această stare de lucruri a durat până în timpul războiului din 1916—1918. La această dată starea sănătății lui s'a agravat prezentând semne de alienație mintală, n'a mai putut fi ținut la Casa de Sănătate și a fost internat la Spitalul Pantelimon. A murit acolo în 1919. Este înmormântat la Cimitirul Reînvierea din București.

(Alătur o fotografie a defunctului).

VIRGIL GHIȚESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

P. GORGEU. Machines-Outils. 1909.
Donată de D-l G-l GH. BUICLIU.

The Mathematical Association Committee. The Teaching of Algebra und Trigonometry. Report. Londra 1910.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

ÉMILE VIGARIÉ. Esquise historique sur la marche du développement de la Géométrie du triangle. Paris 1889.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3562. *Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu oarecare avem:*

$$2\sum \sin A \sin^2\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2} = \sum \sin A \sin^2\frac{B-C}{2}\cdot\sum \cos A \sin^2\frac{B-C}{2}$$

HULUBEI V. TELEMAC.

Soluție. Vom demonstra identitatea generală

$$2\sum \sin(b+c)\sin^2\frac{a-b}{2}\sin^2\frac{c-a}{2} = \sum \sin a \sin^2\frac{b-c}{2}\cdot\sum \cos a \sin^2\frac{b-c}{2}$$

a, b, c fiind arce oarecari.

Se stabileşte fără greutate:

$$(1)\quad S_1 = \sin a + \sin b + \sin c = \sin(a+b+c) + 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$$

$$(2)\quad C_1 = \cos a + \cos b + \cos c = -\cos(a+b+c) + 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2}\,.$$

In relaţia (1) înlocuind pe a prin $-a$, iar în relaţia (2) înlocuind pe a prin $(\pi - a)$ obţinem:

$$-4\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c-a}{2} = -\sin a + \sin b + \sin c - \sin(-a+b+c)$$

$$-4\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{c-a}{2} = -\cos a + \cos b + \cos c - \cos(-a+b+c)$$

relaţii cari înmulţite între ele dau:

$$8\sin(b+c)\sin^2\frac{a-b}{2}\sin^2\frac{c-a}{2}$$
$$= [-\sin a + \sin b + \sin c - \sin(-a+b+c)]$$
$$[-\cos a + \cos b + \cos c - \cos(-a+b+c)]$$
$$= [S_1 - 2\sin a - \sin(-a+b+c)]\,[C_1 - 2\cos a - \cos(-a+b+c)].$$

Aşa că dacă notăm cu E_1 primul membru al identităţii ce ne-am propus a demonstra şi:

$$(3)\quad S_2 = \Sigma\sin(-a+b+c) = \sin(a+b+c) + 4\sin a\sin b\sin c$$

$$(4)\quad C_2 = \Sigma\cos(-a+b+c) = -\cos(a+b+c) + 4\cos a\cos b\cos c$$

obţinem:

$$4E_1 = \Sigma\,[S_1 - 2\sin a - \sin(-a+b+c)]\,[C_1 - 2\cos a - \cos(-a+b+c)]$$
$$= 3S_1C_1 - S_1(2C_1 + C_2) - C_1(2S_1 + S_2)$$
$$+ \Sigma\,[2\sin a + \sin(-a+b+c)]\,[2\cos a + \cos(-a+b+c)]$$
$$= -S_1C_1 - C_1S_2 - S_1C_2 + E_2 \qquad (5)$$

în care am notat:

$$E_2 = \Sigma\,[2\sin a + \sin(-a+b+c)]\,[2\cos a + \cos(-a+b+c)]$$

sau

$$E_2 = 2\,\Sigma \sin 2a + \frac{1}{2}\,\Sigma \sin 2(-a+b+c)$$

$$+ 2\,\Sigma\,[\sin(-a+b+c)\cos a + \sin a\,\cos(-a+b+c)$$

$$= 2\,\Sigma \sin 2a + \frac{1}{2}\,\Sigma \sin 2(-a+b+c) + 2\,\Sigma \sin(b+c). \quad (6)$$

Remarcăm însă că:

$$\Sigma \sin 2a + 2\,\Sigma \sin(b+c) = 2\,\Sigma \sin a \cos a + 2\,\Sigma\,(\sin b \cos c + \sin c \cos b)$$

$$= 2\,\Sigma \sin a\,(\cos a + \cos b + \cos c) = 2S_1C_1 \quad (7)$$

şi dacă în această identitate înlocuim pe a cu $(-a+b+c)$ etc., obţinem:

$$(8) \quad \Sigma \sin 2(-a+b+c) + 2\,\Sigma \sin 2a = 2S_2C_2\,.$$

Inlocuind în relaţia (6) rezultatul din (7) şi (8) avem:

$$E_2 = 2S_1C_1 + S_2C_2$$

astfel că relaţia (5) devine:

$$4E_1 = +S_1C_1 - S_2C_1 - S_1C_2 + S_2C_2 = (S_1 - S_2)(C_1 - C_2).$$

Pe de altă parte:

$$S_1 - S_2 = \Sigma\,[\sin a - \sin(-a+b+c)]$$

$$= \Sigma\left[\sin a - \frac{1}{2}\,[\sin(a-b+c) + \sin(a+b-c)]\right]$$

$$= \Sigma\,[\sin a - \sin a \cos(b-c)] = 2\,\Sigma \sin a \sin^2 \frac{b-c}{2}$$

deci

$$S_1 - S_2 = 2\,\Sigma \sin a \sin^2 \frac{b-c}{2}$$

şi în mod analog:

$$C_1 - C_2 = 2\,\Sigma \cos a \sin^2 \frac{b-c}{2}$$

astfel că:

$$E_1 = \Sigma \sin a \sin^2 \frac{b-c}{2} \cdot \Sigma \cos a \sin^2 \frac{b-c}{2}\,.$$

1°. Dacă în identitatea demonstrată facem $a = A$, $b = B$, $c = C$; A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu — şi ţinem seama că:

$$\sin(B + C) = \sin A,$$

obţinem identitatea din problema 3562.

2°. Dacă în identitatea demonstrată înlocuim a cu $(-a + b + c)$ etc. obţinem:

$$2\sum \sin 2a \sin^2(a - b) \sin^2(c - a)$$
$$= \sum \sin(-a + b + c) \sin^2(b - c) \cdot \sum \cos(-a + b + c) \sin^2(b - c).$$

3°. Dacă identitatea demonstrată o trecem în funcţie de tangentă obţinem identitatea algebrică:

$$2\sum(\beta + \gamma)(1 - \beta\gamma)(\alpha - \beta)^2(\gamma - \alpha)^2$$
$$= \sum \alpha(\beta - \gamma)^2 \cdot \sum(1 - \alpha^2)(\beta - \gamma)^2,$$

în care α, β, γ sunt valori oarecari pozitive sau negative.

Această identitate poate forma subiectul unei probleme fiind un excelent exerciţiu de calcul algebric.

MIRCEA ADAM
Constanţa.

Notă. 1. Autorul problemei a indicat următoarea soluţie, servindu-se de coordonatele baricentrice:

Ecuaţia cercului celor 9 puncte este

$$\frac{a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{1}{2}\sum abc \cos A.$$

Acest cerc fiind tangent cercului înscris, în punctul lui FEUERBACH, de coordonate:

$$a \sin^2\frac{B - C}{2},\ b \sin^2\frac{C - A}{2},\ c \sin^2\frac{A - B}{2}$$

ne dă relaţia (Exerc. Mécanique F. G. M. p. 684)

$$\sum a^2bc \sin^2\frac{C - A}{2} \sin^2\frac{A - B}{2} = \tfrac{1}{2}\sum a \sin^2\frac{B - C}{2} \sum abc \cos A \sin^2\frac{B - C}{2}.$$

Simplificând cu abc şi ţinând seamă că $a = 2R \sin A$, etc. se obţine relaţia:

$$2\sum 2R \sin A \sin^2\frac{C - A}{2} \sin^2\frac{A - B}{2} = \sum 2R \sin A \sin^2\frac{B - C}{2} \cdot \sum \cos A \sin^2\frac{B - C}{2}$$

care simplificată cu $2R$ ne dă relaţia căutată.

2. O soluţie necompletă s'a primit de la D-l V. GR. DĂNCIULESCU.

GENERAL LITEANU.

RROBLEMA 3714. *Produsul ultimelor trei cifre ale unui patrat perfect de patru cifre este un cub. Care patrate îndeplinesc această condiţiune?*

I. C. SAVIN.

Soluţie dată de D-l PETRICĂ I. GHIŞOIU.

Se ştie că ultimele două cifre, cu care se poate termina un pătrat perfect sunt:

00; 25; 01; 09; 21; 29; 41; 49; 61; 69; 81; 89; 04; 16;
24; 36; 44; 56; 64; 76; 84; 96.

Considerăm patratele de patru cifre astfel că niciuna din ultimele cifre nu este egală cu zero. Aceste patrate sunt de forma:

$ab16$; $ab21$; $ab24$; $ab25$; $ab29$; $ab36$; $ab41$; $ab44$; $ab49$; $ab56$;
$ab61$; $ab64$; $ab69$; $ab76$; $ab81$; $ab84$; $ab89$; $ab96$.

Pentru aceste numere determinăm cifra b astfel ca produsul ultimelor trei cifre să fie un cub perfect.

Urmează că pătratele cerute în problemă se află printre numerele:

$a421$; $a124$; $a824$; $a241$; $a444$; $a649$; $a964$; $a469$; $a181$;
$a881$; $a284$; $a389$; $a496$.

Dând lui a toate valorile posibile şi cercetând numerele obţinute, găsim că sunt pătrate perfecte:

$$6241 = 79^2 \quad ; \quad 1444 = 38^2 \quad \text{şi} \quad 8649 = 93^2.$$

Acestea sunt soluţiile problemei.

Dacă vrem să considerăm şi cazul banal, când printre ultimele trei cifre ale patratului perfect se află şi cifra zero, se obţine şi soluţiile:

1600; 2500; 3600; 4900; 6400; 8100; 2401; 2601; 9801; 2304;
7056; 6084; 1089; 4096.

Au rezolvat bine problema D-nii: ILIE N. ALIMAN, N. ALDEA, PETRE ALMĂJAN, ROMEO BRASSAT, IOAN BOIAN, ADRIAN BIDOIANU, GH. BOERESCU, A. BURICHOVICI, D. S. BOLGAR, VLADIMIR CRIVETZ, N. COSTACHE, EUGEN I. DUMITRESCU, MIRCEA I. GROSSU, ADRIAN GHIŢESCU, C. D. IONESCU-ŢIU, HARALAMBIE P. IONESCU,

THEODOR I. MĂRCULESCU, G. I. NICULESCU-MITRENI, N. PAVEL-ONIZABA, NICULAE A. PARASCHIV, IOAN GH. POPA, GH. GH. POPESCU, GH. M. PĂUN, ALEX. C. RAICU, CRISTIAN I. RÂMNICEANU, D. ŞERBAN-ULMENI, D. V. ŞERBAN, CRISTEA I. ŞTEFĂNESCU, MIHAIL UNGHEANU, IOAN C. VOICU, NICOLAE GH. VOICU, JUSTIN VÂLCEANU, N. N. VELICESCU şi GH. O. ZAMFIRESCU.

D-nii: CRISTACHE M. GRECU, EMILIAN MIHALCEA, I. MURĂROIU şi ION O. ZAHARIA, nu au aflat toate soluţiile.

D-nii: MIRCEA N. CONSTANTINESCU, DUMITRU NICOLAU şi NICOLAE N. RADOVEANU au trimes patratele cerute în problemă, fără a arăta prin ce raţionament au aflat aceste numere.

Observări. 1°. Dacă se cereau cuburile de patru cifre astfel ca produsul ultimelor trei cifre să fie un cub, se găsea soluţia $4913 = 17^3$.

2°. Dacă se căutau cuburile de patru cifre astfel ca produsul ultimelor trei cifre să fie patrat, se găsea soluţia $1331 = 11^3$.

3°. Dacă se cereau patratele de patru cifre astfel ca produsul ultimelor trei cifre să fie un patrat, se găseau soluţiile:

$$1444 = 38^2 \ , \ 8281 = 91^2 \text{ şi } 8836 = 94^2.$$

(CRISTIAN RÂMNICEANU).

4°. D-l HARALAMBIE P. IONESCU a aflat patratele mai mici decât un milion, care satisfac enunţului problemei.

GH. D.

PROBLEMA 3988. *Să se rezolve un triunghiu oarecare, la care se cunoaşte* $a^2 - b^2 = k$, *unghiul* C *şi suprafaţa* S.

Aplicaţie:

$$k = 24 \ , \ C = 30^0 \text{ şi } S = 8{,}75 \text{ m}^2.$$

IULIU DEAC.

Soluţie dată de Domnii: G. ŞT. ROŞCA, A. M. BUTAN, C. I. CHIRIAC, M. CHIRIŢĂ, GH. A. CIOCOIU, I. V. COJOCARU, V. IG. GODEANU, BEROL HAIM, C. D. IONESCU-ŢIU, I. LEUCO, C. GH. LUPESCU, EM. I. MAREŞ, M. MARGULIUS, EM. MEREUŢĂ, N. N. MIHĂILEANU, DAVID MOISE, ŞT. OLTEANU, I. C. PAREPEANU, M. POPESCU-STĂNEŞTI, FL. RADU, C. D. RUSU, P. M. TRUIA, I. C. SAVIN, V. I. C. VISARION.

Avem

$$S = \tfrac{1}{2} ab \sin C \ ; \text{ de unde } b = \frac{2S}{a \sin C} \cdot$$

Introducând această valoare în $a^2 - b^2 = k$, obţinem ecuaţia bipatrată

$$a^4 - ka^2 - \frac{4S^2}{\sin^2 C} = 0$$

care dă

$$a^2 = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + \frac{16S^2}{\sin^2 C}}}{2} .$$

Insă din cele 2 valori, numai cea pozitivă este admisibilă, adică aceea cu semnul + înaintea radicalului.

Prin urmare avem

$$a = \sqrt{\frac{k \pm \sqrt{k^2 + \frac{16S^2}{\sin^2 C}}}{2}}$$

$$b = \sqrt{a^2 - k} .$$

Cunoscând două laturi şi unghiul cuprins între ele, ne aflăm în cazul al II-lea de rezolvare a triunghiurilor oarecare, a cărui tratare se cunoaşte din trigonometrie.

In cazul aplicaţiei găsim celelalte elemente:

$$a = 7\text{ m} \ ; \ b = 5\text{ m} \ ; \ c = 3{,}66\text{ m (aprox.)};$$

$$\sphericalangle A = 106^0\ 52'\ 56''\ \text{şi}\ \sphericalangle B = 43^0\ 7'\ 4''\ \text{(aprox.)}.$$

Observaţie. Celelalte soluţii primite şi anunţate pe copertă, nu au făcut calculele în cazul aplicaţiei pentru a da valorile celorlalte elemente ale triunghiului.

GENERAL LITEANU.

PROBLEMA 4083. *Să se rezolve un triunghiu cunoscând bisectoarea* β_1 *a unui unghiu şi segmentele* m *şi* n *interceptate de bisectoare pe latura opusă unghiului.*

IULIU DEAC.

Soluţie dată de D-nii: C. IVĂNESCU, MIRCEA-LEONTE, A. NEGREA, MIHAIL I. POPESCU-STĂNEŞTI şi GEORGE ŞT. ROŞCA.

Inainte de a intra în rezolvarea problemei ne propunem să demonstrăm relaţia

$$bc = mn + \beta_1^2 .$$

In adevăr, fie A_1 piciorul bisectoarei pe latura BC şi A_2 punctul unde această bisectoare taie a doua oară cercul circumscris triunghiului. Din triunghiurile asemeni

$$ABA_1 \ , \ A_1CA_2 \text{ şi } ABA_1 \ , \ A_2AC$$

deducem:

$$\frac{c}{A_2C} = \frac{m}{A_1A_2} = \frac{\beta_1}{n} \ , \quad \frac{b}{\beta_1} = \frac{A_2C}{m} = \frac{AA_2}{c}.$$

Din grupa a doua scoatem:

$$bc = AA_2 \cdot \beta_1 = (\beta_1 + A_1A_2)\beta_1,$$

iar din prima:

$$A_1A_2 = \frac{mn}{\beta_1}.$$

Combinând între ele aceste două relaţii găsim formula ce ne propusesem să demonstrăm (care de altfel este cunoscută).

Să revenim acum la problema 4083. Plecăm dela formulele:

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{m} \ , \quad bc = mn + \beta_1^2,$$

formule care ne determină laturile b, c. Găsim imediat

$$b = \sqrt{\frac{m(mn + \beta_1^2)}{n}} \ , \quad c = \sqrt{\frac{n(mn + \beta_1^2)}{m}},$$

iar pentru latura a avem:

$$a = m + n.$$

Să determinăm unghiurile triunghiului. Ţinând seamă de formula cunoscută [1]):

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{\beta_1(b + c)}{2bc},$$

unde înlocuim pe b şi c prin valorile găsite mai sus, obţinem:

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{\beta_1(m + n)}{2\sqrt{mn(mn + \beta_1^2)}}$$

1) Biblioteca *Gazetei Matematice*, Vol. XIV, pag. 13, ex. 1.

iar pentru unghiurile B şi C avem sucesiv:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2mn^2 + (m-n)\beta_1^2}{2n\sqrt{mn(mn+\beta_1^2)}},$$

$$\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} = \frac{2m^2n + (m-n)\beta_1^2}{2m\sqrt{mn(mn+\beta_1^2)}}.$$

Pentru suprafaţă avem:

$$S = \frac{bc\sin A}{2} = bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\beta_1(m+n)\sqrt{4m^2n^2 - \beta_1^2(m-n)^2}}{4mn}.$$

Soluţii parţiale dela D-nii: V. CEAUŞESCU, C. I. CHIRIAC, S. D. DOGARU, C. D. IONESCU, M. MĂNESCU, E. MEREUŢĂ, N. N. MIHĂILEANU, ŞT. E. OLTEANU, E. E. PĂNOIU, I. C. PAREPEANU, I. C. SAVIN, C. I. ŞOVA, P. M. VARLAM, V. I. C. VISARION şi S-LT. I. ZAMFIRESCU.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4648. a, b, c *fiind laturile unui triunghiu, să se arate că avem oricare ar fi* x:

$$a^2 \geqslant \frac{b^2}{\operatorname{ch}^2 x} - \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

N. CIORĂNESCU.

1°. *Soluţie* dată de D-nii: MIRCEA L. A. NEGREA (Brăila) şi FLORESCU VICTOR (liceul militar N. Filipescu). Plecând dela inegalitatea evidentă:

$$(b\operatorname{th} x - c\operatorname{coth} x)^2 \geqslant 0$$

se obţine desvoltând:

$$b^2\operatorname{th}^2 x + c^2\operatorname{coth}^2 x - 2bc \geqslant 0$$

$$b^2\frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x} + c^2\frac{1 + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} - 2bc \geqslant 0$$

$$\frac{b^2}{\operatorname{ch}^2 x} - \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 x} \leqslant (b-c)^2.$$

Având $bc < a$, urmează cu atât mai mult

$$\frac{b^2}{\operatorname{ch}^2 x} - \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 x} \leqslant a^2.$$

D-l M. L. A. NEGREA observă că egalitatea nu poate avea loc, decât pentru:

$$b + a\,\mathrm{ch}^2 x \quad c = a\,\mathrm{sh}^2 x$$

Intr'adevăr din relaţia

$$\left(\frac{b}{a\,\mathrm{ch}x}\right)^2 - \left(\frac{c}{a\,\mathrm{sh}x}\right)^2 = 1$$

deducem:

$$(1) \qquad b = a\,\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}u \quad c = a\,\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}u.$$

Din relaţia $a \geqslant b - c$ care are loc între laturile unui triunghiu propriu sau impropriu, deducem din (1):

$$\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}u - \mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}u \leqslant 1$$

$$\mathrm{ch}(x - u) \leqslant 1$$

cosinusul iperbolic neputând fi mai mic ca unu, urmează că

$$u = x.$$

2⁰. *Soluţie* dată de D-nii: BAL LASCU (student Cluj) şi PAUL DOBRESCU (elev S. P. O.). Inegalitatea dată devine:

$$a^2\,\mathrm{ch}^2 x\,\mathrm{sh}^2 x \geqslant b^2\,\mathrm{sh}^2 x - c^2\,\mathrm{ch}^2 x$$

înlocuind

$$\mathrm{ch}^2 x = 1 + \mathrm{sh}^2 x,$$

avem:

$$(1) \qquad a^2\,\mathrm{sh}^4 x + (a^2 - b^2 + c^2)\,\mathrm{sh}^2 x + c^2 \geqslant 0$$

realizantul este:

$$(a^2 + c^2 - b^2)^2 - 4a^2c^2 = [(a^2 + c)^2 - b^2]\,[(a - c)^2 - b^2]$$

$$= -(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) = -2^4 S^2.$$

S fiind suprafaţa triunghiului de laturi a, b, c. Rezultă că inegalitatea (1) este adevărată.

S'a mai primit o soluţie bună dela D-l C. N. GAVRILESCU (şc. preg. Of. Buc.), iar dela D-l A. CĂLINESCU (Roşiorii de Vede) o soluţie incompletă.

PROBLEMA 4678. *Se cere numărul de patru cifre, care are trei cifre în progresie geometrică şi care este egal cu produsul a trei factori primi dintre care cel mai mare adunat cu trei dă un patrat perfect.*

G-L GH. BUICLIU.

Fie $m < n < p$ trei numere prime şi $abcd$ numărul de patru cifre căutat. Conform enunţului trebue avut

$$1000 < m \times n \times p = abcd < 9999 \tag{1}$$

$$p + 3 = k^2 \tag{2}$$

şi trei din cifrele a, b, c, d în progresie geometrică.

Dând în (1) lui m şi n valorile minime 2 şi 3 se găseşte

$$6p < 9999 \quad \therefore \quad p < 1666$$

sau fiindcă o tablă de numere prime arată că 1667 este prim

$$p < 1667.$$

Deoarece

$$1000 = 10 \times 10 \times 10$$

am putea lua, ţinând seamă de (1)

$$p = 11$$

dar

$$11 \times 7 \times 5 = 385 < 1000.$$

Luând

$$p = 13$$

găsim

$$7 \times 11 \times 13 = 1001 > 1000$$

deci admisibil. Concluzia

$$13 \leqslant p < 1667$$

$$\therefore \quad 16 \leqslant k^2 = p + 3 < 1670$$

$$\therefore \quad 4 \leqslant k \leqslant 40.$$

Din (2) se vede că k este pereche şi nedivizibil prin 3 căci altfel p ar fi multiplu de 3, ceea ce este contra ipotezei.

Dând lui k toate valorile perechi, afară de cele divizibile prin 3, şi reţinând numai pe acelea pentru care $k^2 - 3$ este număr prim se găsesc următoarele valori admisibile pentru p:

$$13;\ 61;\ 97;\ 193;\ 397;\ 673;\ 1021;\ 1153;\ 1597.$$

Dau lui p în (1) pe rând valorile din acest şir.

Când $p = 13$ singurile numere prime m şi n mai mici ca p, care dau produsul $m \times n \times p$ de 4 cifre sunt:

$$7 \times 11 \times 13 = 1001$$

care nu răspunde problemei.

Când $p = 61$ avem:

$$(3) \qquad 1000 < m \times n \times 61 < 9999$$

$$\therefore \qquad 17 \leqslant m \times n \leqslant 163.$$

Cea mai mică valoare a lui m putând fi 2 vom avea pentru n

$$8 < n < 81.$$

Deci

$$11 \leqslant n \leqslant 79$$

și fiindcă $n < p$

$$11 \leqslant n \leqslant 59.$$

Acum dau lui n în (3) pe rând valorile 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 și deduc valorile pe care le poate avea m.

Efectuând produsele $m \times n \times p$ și reținând numai pe acelea care au 3 cifre în progresie geometrică se obțin soluțiile corespunzătoare lui $p = 61$. Procedând astfel pentru toate valorile admisibile pentru p se găsesc următoarele 5 soluțiuni ale problemei

$1\,342 = 2 \times 11 \times 61$ cu $61 + 3 = 8^2$; $1930 = 2 \times 5 \times 193$ cu $193 + 3 = 14^2$

$$2134 = 2 \times 11 \times 97 \text{ cu } 97 + 3 = 10^2$$

$8\,245 = 5 \times 17 \times 97$ cu $97 + 3 = 10^2$; $8342 = 2 \times 43 \times 97$ cu $97 + 3 = 10^2$.

Dacă considerăm că 3 cifre egale formează o progresie geometrică cu rația 1 atunci mai avem următoarele 8 soluțiuni:

$2522 = 2 \times 13 \times 97$ cu $97 + 3 = 10^2$; $3111 = 3 \times 17 \times 61$ cu $61 + 3 = 8^2$

$5551 = 7 \times 13 \times 61$ cu $61 + 3 = 8^2$; $5558 = 2 \times 7 \times 397$ cu $397 + 3 = 20^2$

$5955 = 3 \times 5 \times 397$ cu $397 = 3 = 20^2$; $6466 = 2 \times 53 \times 61$ cu $61 + 3 = 8^2$

$8878 = 2 \times 23 \times 193$ cu $193 + 3 = 14^2$; $9699 = 3 \times 53 \times 61$ cu $61 + 3 = 8^2$.

Observațiuni. 1°. Dacă nu se face restricția ca factorul p să fie cel mai mare atunci pe lângă soluțiile precedente se mai găsesc următoarele 18 soluțiuni, în care factorul p este subliniat:

$1118 = 2 \times \mathit{13} \times 43$; $1141 = 3 \times \mathit{13} \times 29$; $1222 = 2 \times \mathit{13} \times 47$;

$2314 = 2 \times \mathit{13} \times 89$; $2431 = 11 \times \mathit{13} \times 17$; $2847 = 3 \times \mathit{13} \times 73$;

$3913 = 7 \times \mathit{13} \times 43$; $4082 = 2 \times \mathit{13} \times 157$; $4258 = 2 \times \mathit{13} \times 163$;

$4823 = 7 \times \mathit{13} \times 53$; $5421 = 3 \times \mathit{13} \times 139$; $6266 = 2 \times \mathit{13} \times 241$;

$8242 = 2 \times \mathit{13} \times 317$; $8931 = 3 \times \mathit{13} \times 229$; $9139 = \mathit{13} \times 17 \times 37$;

$9321 = 3 \times \mathit{13} \times 239$; $9399 = 3 \times \mathit{13} \times 241$; $9919 = 7 \times \mathit{13} \times 109$.

2°. Soluţiunea

$$2522 = 2 \times 13 \times 97$$

are 2 factori p care adunaţi cu 3 dau un patrat perfect.

3°. Soluţiunile 1342 şi 2431 dela 1° sunt numere inversate.

4°. Dacă în condiţiunile dela 1° s'ar cere ca cel puţin 3 din cifrele lui *abcd* să fie în progresie aritmetică, se găsesc următoarele 77 soluţiuni:

0182, 0366, 0429, 0442, 0663, 0897, 1118, 1141, 1209,
1235, 1222, 1342, *1354*, 2013, 2015, 2054, 2074, 2134,
2135, 2314, 2314, 2318, 2431, 2522, 2613, 2639, 2678,
3111, 3201, 3926, 3965, 4053, 4209, 4246, 4342, 4462,
4486, 4654, 4823, 4953, *5246*, 5551, 5558, *5673*, *5734*,
5955, 6123, 6214, 6266, 6305, *6357*, 6369, 6513, 6693,
6730, 7046, 7198, 7259, 7306, *7345*, 7358, 7503, 7618,
7657, 7683, 7869, 7954, 7982, 8342, 8671, 8697, 8762,
8878, 9021, 9178, 9321, 9789.

Numerele subliniate, cu 1235 au 2 grupe de 3 cifre în progresie aritmetică

$\div 1.2.3$ cu raţia 1

$\div 1.3.5$ „ „ 2,

4°. Corespondenţii care s'au ocupat cu problema 4678 au dat numai soluţiuni parţiale. Astfel:

D-l C. SĂNDULACHE (Băseşti, Bacău) a găsit soluţiile 1342, 1930, 8245 şi 8342.

D-l S-LT. M. GRUMĂZESCU a găsit soluţiile 1342, 2134 şi 8342.

D-l M. AL. VASILESCU-STABU a găsit soluţiile 1930, 8245 şi 8342.

D-l TR. M. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI a găsit soluţiile 1342, 8245 şi 8342.

D-l H. M BODNĂRESCU a găsit numai soluţia 1930.

D-l S. R. TURCU a găsit numai soluţia 8245.

5°. D-l GAVRIL POPOVICIU, considerând şi pe 1 ca factor prim a găsit numai soluţia $7913 = 1 \times 41 \times 193$.

6°. D-nii S-LT. M. GRUMĂZESCU, S. R. TURCU şi TR. M. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI s'au ocupat şi de cazul cifrelor în progresie aritmetică şi au găsit soluţiuni parţiale, primul 4 soluţiuni şi ultimii câte 16 soluţiuni.

7°. D-l S. R. TURCU a dat şi soluţiunea 9699 cu trei cifre egale.

GH. B.

PROBLEMA 4806. *Fie* $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$, $a_0 > 0$ *şi* A_n, G_n *media aritmetică şi geometrică a cantităţilor*

$$f(1), f(2), \ldots, f(n).$$

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{G_n}=\frac{e^m}{m+1}.$$

TIBERIU POPOVICIU.

Soluția. Presupunem că $f(x)>0$, $x=1, 2, 3,\ldots$ pentru ca media geometrică să aibă un sens precis. Fie

$$S_{n,k}=1+2^k+\ldots+n^k \quad , \quad k=0, 1,\ldots$$

Se știe că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n,k}}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

Avem:

$$A_n=\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}=a_0\frac{S_{n,m}}{n}+a_1\frac{S_{n,m-1}}{n}+\ldots+a_m$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n^m}=\frac{a_0}{m+1}.$$

Se știe de asemenea că dacă există $\lim_{n\to\infty} u_n=u$, avem și

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}=u.$$

Să luăm acum $u_n=\log\frac{f(n)}{n^m}$, atunci $\lim_{n\to\infty} u_n=\log a_0$

$$\frac{\log\frac{f(1)}{1}+\log\frac{f(2)}{2^m}+\ldots+\log\frac{f(n)}{n^m}}{n}=\log\frac{G_n}{\sqrt[\frac{m}{n}]{(n!)}}.$$

Se deduce:

$$\lim_{n\to\infty}\log\frac{G_n}{\sqrt[\frac{m}{n}]{(n!)}}=\log a_0 \quad \text{sau} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{\sqrt[\frac{m}{n}]{(n!)}}=a_0.$$

Avem așa dar:

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{G_n}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)^m=\frac{1}{m+1}.$$

Se cunoaşte formula

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n},$$

cu condiţia ca limita din membrul întâi să existe. Luând

$$u_n=\frac{n!}{n^n},$$

avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}.$$

Formula (1) ne arată acum că raportul $\frac{A_n}{G_n}$ are efectiv o limită egală cu $\frac{e^m}{m+1}$.

O bună soluţie a dat D-l O. SACHTER.

T. P.

PROBLEMA 4810. *Fie* A'B'C' *triunghiul ortic al triunghiului cu unghiuri ascuţite* ABC. A_b, A_c *proiecţiile mijloacelor segmentelor* A'C, A'B *pe* AB, AC. B_a, B_c, C_a, C_b *puncte obţinute analog. Să se stabilească relaţia:*

$$\overline{A_bA_c}+\overline{B_cB_a}+\overline{C_aC_b}=\frac{5}{4}(\overline{A'B'}+\overline{B'C'}+\overline{C'A'}).$$

C. IONESCU-BUJOR.

Soluţia I. Fie A'_b, A'_c proiecţiile lui A' pe AB, AC. D, E intersecţiile dreptei $A'_bA'_c$ cu A'B', A'C'.

Se ştie că $\overline{A'_bA'_c}$ este o coardă a cercului TAYLOR al triunghiului ABC [1]), paralelă cu B'C', latura corespunzătoare a triunghiului ortic. Deci

$$\sphericalangle B'A'_cD=\sphericalangle AB'C'=\sphericalangle DB'A'_c,$$

adică triunghiul $DB'A'_c$ este isoscel şi

$$\overline{DA'_c}=\overline{B'D}.$$

---

1) F. G. M. Exercices de Géométrie. Ed. VII. pag. 1192.

Coarda $A'_b A'_c$ se ştie că împarte în părţi egale laturile $A'B'$, $A'C'$ ale triunghiului ortic, de aceea

$$DA'_c = \frac{\overline{A'B'}}{2} .$$

Şi analog,

$$\overline{EA'_b} = \frac{\overline{A'C'}}{2} \quad , \text{ iar } \quad \overline{DE} = \frac{\overline{B'C'}}{2} .$$

Rezultă

$$\overline{A'_b A'_c} = \frac{\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'A'}}{2} .$$

Dar, în trapezul $A'_b C'B'A'_c$, dreapta $A_b A_c$ uneşte mijloacele celor două laturi neparalele, deci

$$\overline{A_b A_c} = \frac{\overline{B'C'} + \overline{A'_b A'_c}}{2} = \frac{\overline{3B'C'} + \overline{A'B'} + \overline{A'C'}}{4} .$$

Analog se obţine

$$\overline{B_c B_a} = \frac{\overline{3C'A'} + \overline{A'B'} + \overline{B'C'}}{4} , \quad \overline{C_a C_b} = \frac{\overline{3A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'A'}}{4} .$$

Deci

$$\overline{A_b A_c} + \overline{B_c B_a} + \overline{C_a C_b} = \frac{5}{4}\left(\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'A'}\right) .$$

Soluţia II. Să aplicăm teorema lui PTOLOMEU patrulaterului inscriptibil $AA'_b A'A'_c$:

$$\overline{A'_b A'_c} \times \overline{AA'} = \overline{AA'_b} \times \overline{A'A'_c} + \overline{AA'_c} \times \overline{A'A'_b} .$$

Deoarece

$\overline{AA'_b} = \overline{AA'} \sin B$, $\overline{A'A'_c} = \overline{AA'} \cos C$, $\overline{AA'_c} = \overline{AA'} \sin C$, $\overline{A'A'_b} = \overline{AA'} \cos B$,

rezultă

$$\overline{A'_b A'_c} \times \overline{AA'} = \overline{AA'}^2 \sin(B + C)$$

sau

$$\overline{A'_b A'_c} = \overline{AA'} \sin A = \frac{2S}{a} \sin A = 2R \sin A \sin B \sin C.$$

Să avem în vedere că

$$\overline{B'C'} = a\cos A\ ,\ \overline{C'A'} = b\cos B\ ,\ \overline{A'B'} = c\cos C\ ^{1})$$

şi că

$$\Sigma\, a\cos A = 4R\sin A\sin B\sin C\ ^{2}),$$

deducem

$$\overline{A'_b A'_c} = \frac{\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'A'}}{2},$$

apoi soluţia urmează mersul precedentei.

Soluţie analoagă dată de D-l V. FLORESCU (Lic. militar N. Filipescu Târgovişte).

Alte soluţii date de D-nii: R. APOSTOL (Lic. militar N. Filipescu, Târgovişte), C. V. PANTELIMON şi M. D. POPA (Lic. militar Iaşi), A. POPESCU-ZORICA (elev particular Bucureşti), J. SEGAL (Lic. Libros Bucureşti) şi A. O. ŞAICHIN (Lic. Matei Basarab).

C. I. B.

PROBLEMA 4814. *Să se construiască curba*

$$y = x^4 - 8px^3 - 2q^2x^2$$

p *şi* q *fiind două numere reale. Din construcţia curbei să se deducă discuţia rădăcinilor ecuaţiei*

$$x^4 - 8px^3 - 2q^2x^2 - \lambda = 0$$

λ *fiind un parametru real.*

Aplicaţie numerică

$$x^4 - 8x^3 - 14x^2 - \lambda = 0.$$

TH. ANGHELUŢĂ.

Au rezolvat problema D-nii: MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU (Student), G. G. CONSTANTINESCU, AUREL I. CORNĂŢEANU (Lic. mil. Iaşi), S.-LT. GRIG. MARTEŞ, DUMITRU RIPIANU (Student), LOCOT. MIHAIL I. VLAD (Student).

---

1) T. LALESCU. La géométrie du triangle. pag. 108.
2) Idem. pag. 106.

Soluție. Putem presupune $p>0$ căci cazul $p<0$ se reduce la cel dintâi printr'o simetrie față de axa oy. Derivata

$$y' = 4x\,(x^2 - 6px - q^2)$$

are rădăcinile α, o, β așezate în ordinea mărimii,

$$\alpha = 3p - \sqrt{9p^2+q^2} \quad , \quad \beta = 3p + \sqrt{9p^2+q^2}.$$

Se observă că

$$|\alpha| < \beta.$$

Pe de altă parte valorile lui y pentru α și β sunt:

$$y(\alpha) = -\alpha^2(6p^2+q^2-2p\sqrt{9p^2+q^2}) < 0$$

$$y(\beta) = -\beta^2(6p^2+q^2+2p\sqrt{9p^2+q^2}) < 0$$

și evident

$$y(\alpha) > y(\beta).$$

Tabloul variației valorilor lui y este următorul:

x	$-\infty$		a		α		0		β		b		$+\infty$
y		$\searrow$	0	$\searrow$	$y(\alpha)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$y(\beta)$	$\nearrow$	0		$+\infty$

Am însemnat prin a și b rădăcinile nenule a lui y. Curba rezultă din acest Tablou. Ea este tangentă în origină la ox și are două puncte de inflexiune unul în intervalul (a, o) și celalt în (o, β).

Discuția ecuației (2) urmează imediat din intersecția curbei (1) cu dreapta $y = \lambda$. Avem astfel următoarea discuție:

1°. $\lambda > 0$ ecuația are două rădăcini reale câte una în intervalele $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$.

2°. $y(\alpha) \leqq \lambda \leqq 0$ ecuația are 4 rădăcini reale câte una în intervalele (a, α), (α, o), (o, β), (β, b).

3°. $y(\beta) \leqq \lambda < y(\alpha)$ ecuația are 2 rădăcini reale câte una în intervalele (o, β), (β, b).

4°. $\lambda < y(\beta)$ ecuația are 4 rădăcini imaginare.

In aplicația numerică avem:

$$\alpha = -1 \quad , \quad \beta = 7 \quad , \quad a = 4 - \sqrt{30} \quad , \quad b = 4 + \sqrt{30}$$

și

$$y(\alpha) = -5 \quad , \quad y(\beta) = -1029.$$

Inlocuind în discuția de mai sus pe α, β, a, b, $y(\alpha)$ și $y(\beta)$ prin aceste numere vom obține discuția pentru cazul general.

PROBLEMA 4818. *Să se determine* n *numere întregi şi pozitive astfel ca suma lor să fie egală cu produsul lor şi una din ele să fie egală cu media aritmetică a celorlalte* $n-1$.

TIBERIU POPOVICIU.

Soluţia. Fie $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n$ numerile căutate. Unul din ele, de ex., x_n trebue să fie media aritmetică a celorlalte, deci

$$(1) \qquad x_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2}}{n-1} .$$

Avem însă, conform enunţului, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n$. Ţinând seamă de (1) se deduce

$$(2) \qquad x_1 x_2 \ldots x_{n-1} = n.$$

Să determinăm acum maximul lui x_n din (1) ştiind că numerile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sunt *pozitive, întregi* (deci $\geqq 1$) şi legate prin relaţia (2). Să arătăm că acest maximum, care e evident atins, *nu poate avea loc dacă cel puţin două din numerile* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *sunt mai mari decât 1.* Să presupunem contrariul, deci că, de ex., avem $x_1 > 1$, $x_2 > 1$. Dacă înlocuim aceste două numere cu 1 şi $x_1 x_2$, produsul numerilor $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ rămâne neschimbat dar suma lor se măreşte căci $x_1 + x_2 < 1 + x_1 x_2$, căci această din urmă inegalitate revine la $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$. Rezultă dar că pentru maximum trebue ca cel mult unul din numerile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ să fie > 1, trebue deci ca $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-2} = 1$, $x_{n-1} = n$. Formula (1) ne dă max. $x_n = 2$. Trebue dar ca $x_n \leqq 2$. Avem acum două cazuri de studiat:

I. $x_n = 1$. Ţinând seamă de (1) şi de faptul că media aritmetică a $n-1$ numere nu toate egale e mai mare decât cel mai mic din aceste numere, deducem că trebue să avem $x_1 = x_2 \ldots = x_{n-1} = 1$, ceea ce e incompatibil cu condiţia (2).

II. $x_n = 2$. In acest caz x_n are valoarea maximă, deci

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-2} = 1, \; x_{n-1} = n.$$

Singura soluţie a problemei este deci

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-2}, \; 2, \; n.$$

D-l TILICĂ C. ŞTEFAN (Lic. Traian T.-Severin) a rezolvat problema, însă cu multe detalii inutile şi incomplete. D-nii G. G. CONSTANTINESCU şi Locot. MIHAI C. J. VLAD au semnalat soluţie particulară 1, 2, 3 fără însă a da o demonstraţie satisfăcătoare. S'a mai primit o soluţie greşită.

T. P.

PROBLEMA 4911. *Se dă un semicerc* O *cu diametrul* AOB = 2*r*. *Fie* C *un punct pe acest diametru şi* D *punctul de intersecţie al semicercului* O *cu perpendiculara în* C *pe* AB.

1°. *Punând* $x = OC$, *să se exprime aria* S *născută de dreapta* AD *printr'o rotaţie completă în jurul lui* AB. *Să se calculeze şi aria* S_1 *născută de arcul* BD *prin aceeaşi rotaţie. Să se determine* x *astfel ca*

$$\frac{S}{S_1} = \frac{3}{2}.$$

2°. *Să se formeze de asemenea ecuaţia în* x *când*

$$\frac{S}{S_1} = m.$$

Să se discute după valorile lui m.

TH. ANGHELUŢĂ.

Au rezolvat problema D-nii: N. G. APOSTOL (Lic. mil. Cernăuţi); P. V. CONSTANTIN (Lic. mil. Iaşi); AUREL I. CORNĂŢEANU; D-şoara M. I. CRĂCIUNESCU (stud. Bucureşti); D-nii: I. D. DIACONESCU (Lic. T.-Severin); GH. M. DUMITRESCU (Lic. „Mihai-Viteazul" Bucureşti); D-şoara ANA GEREANU (stud. Bucureşti); D-nii: IACOB GOLDBERG (Lic. „Matei-Basarab" Bucureşti); Subloc. MIRCEA GRUMĂZESCU; ROM. E. GVIAZDOMORSCHI (Lic. militar Cernăuţi); VIŢU I. ILIESCU (Lic. mil. Cernăuţi); O. MĂRCULESCU; MARIAN N. MURGEA (Lic. mil. Tg.-Mureş); MIH. PETRESCU (Lic. mil. Cernăuţi); MIRCEA D. POPA (Lic. mil. Iaşi); ALEX. N. POPESCU-ZORICA; TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI; HERMAN REICHER (Lic. Internat Iaşi); D-şoara GEORGETA G. ROMAŞCAN (Şcoala Centrală Bucureşti); D-nii: N. ROŞCULEŢ; ST. N. ŞERBĂNESCU (Lic. mil. Cernăuţi); ISAC I. SOLOMON (Lic. Internat Iaşi); I. STREDER (Lic. mil. Iaşi); ST. C. TILICĂ (Lic. T.-Severin); N. N. TOMA (Lic. mil. Tg.-Mureş); ST. AL. VASILESCU-ŞTABU (Lic. Alba-Iulia); D-TRU C. VASILIU (Lic. mil. Tg.-Mureş); Loc. MIHAI I. VLAD.

Soluţie. 1°. Presupunând C situat pe segmentul BO avem:

$$CD = \sqrt{r^2 - x^2} \quad , \quad AD = \sqrt{2r\,(r+x)}.$$

Aceste expresiuni sunt valabile şi când C este pe AO dacă socotim pe x negativ. Reţinem că x este cuprins între r şi $-r$.

Prin urmare deducem:

$$S = \pi (r + x) \sqrt{2r (r - x)} \quad , \quad S_1 = 2\pi r (r - x).$$

2^0. Să formăm şi să discutăm ecuaţia în cazul general din care deducem apoi cazul particular dat.

Avem ecuaţia:

$$(1) \qquad \frac{r + x}{\sqrt{2r (r - x)}} = m,$$

sau ridicând la patrat

$$(2) \qquad x^2 + 2r (1 + m^2)\, x + r^2 (1 - 2m^2) = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt reale, căci realizantul $m^2r^2 (4 + m^2)$ este pozitiv. Substituind în (2) pe r şi $-r$ obţinem respectiv $4r^2$ şi $-4m^2r^2$. Ecuaţia (2) are prin urmare o rădăcină x, cuprinsă în intervalul $(-r, r)$ şi una x_2 mai mică decât $-r$. *Soluţia* x_1 *convine singură problemei* căci e cuprinsă între $-r$ şi $+r$ şi verifică şi ecuaţia (1) după cum se vede lesne fără a mai fi nevoe de verificare.

Dacă $m > \frac{1}{\sqrt{2}}$ rădăcina x, este pozitivă. Când $m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ea este negativă. Problema are deci numai o singură soluţie

$$\frac{x_1}{r} = m \sqrt{m^2 + 4} - (1 + m^2).$$

Când $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, atunci $x_1 = 0$.

In cazul particular dat avem:

$$\frac{x_1}{r} = \frac{1}{2},$$

iar soluţia $x_2 = -7r$ care nu convine problemei.

Observare. Ecuaţia (2) are rădăcina x_2 care nu convine problemei. Se poate interpreta astfel această soluţie. Să luăm ca necunoscută segmentul $y = OE$, unde E este punctul de intersecţie al tangentei în D la semicercul O cu diametrul AB. Avem $x = \frac{r^2}{y}$ şi ecuaţia (2) devine

$$(3) \qquad (1 - 2m^2)\, y^2 + 2r (1 + m^2)\, y + r^2 = 0.$$

Putem determina un raport m aşa ca (3) să fie verificată de rădăcina x_2 a ecuaţiei (2). In adevăr găsim

$$(4) \qquad m^2 = \frac{(x_2 + r)^2}{2x_2 (x_2 - r)}.$$

Prin urmare x_2 care nu convenea problemei când luăm pe x ca necunoscută este o soluţie a ecuaţiei (3) când luăm pe m dat de (4). Mai observăm că acest raport este mai mic decât $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pentru cazul particular dat raportul dat de (4) este $\frac{3}{2\sqrt{7}}$.

PROBLEMA 4945. *Dacă* $mx + ny + pz = 0$, *avem şi*

$$mnp(x^3 + y^3 + z^3) + xyz(m^3 + n^3 + p^3 + \\ + \Sigma myz[p(py + mz) + n(my + nz)] = 0$$

(Σ *însumând termenii obţinuţi prin permutarea concomitentă* x, y, z ; m, n, p).

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de D-nii: S.-LT. MIRCEA GRUMĂZESCU, HORIA M. BODNĂRESCU (S. P. „Titu Maiorescu", Bucureşti), STELIAN CETĂŢEANU (lic. „Şincai" Bucureşti), EMIL S. MODÂLCĂ (lic. „Traian" Turnu-Severin), MIREL D. STOENESCU (lic. militar M-rea Dealu), M. AL. VASILESCU ŞTABU (lic. „Mihaiu-Viteazu" Alba-Iulia).

Scriem expresia, desvoltat

$$E = mnp(x^3 + y^3 + z^3) + xyz(m^3 + n^3 + p^3) + \\ myz[p(py + mz) + n(my + nz)] + \\ nzx[m(mz + nx) + p(nz + px)] + \\ pxy[n(nx + py) + m(px + my)].$$

Coeficientul lui mx în expresia E, este

$$E' = npx^2 + pmy^2 + mnz^2 + m^2yz + n^2zx + p^2xy.$$

Analog, vom afla aceeaşi expresie simetrică E′ coeficient pentru *ny, pz*. In plus, fiecare termen cuprinde câte unul şi numai unul din elementele *mx, ny, pz*; deci

$$E = E'(mx + ny + pz).$$

Deci, dacă $mx + ny + pz = 0$, şi $E = 0$.

Au mai rezolvat problema şi D-nii: H. REISCHER, I. SOLOMON (lic. „Internat" Iaşi); E. BOIAN, P. CONSTANTIN, C. PASCARU, A. PETRESCU, A. ROHR (lic. militar Iaşi), GH. M. DUMITRESCU (Bucureşti), A. CORNĂŢEANU, I. JAREGHIE şi M. D. POPA.

Trebue observat că nu toate soluţiile sunt ireproşabile din punctul de vedere al prezentării. Unele aveau chiar socoteli cu creionul, pe margine.

EXERCIŢII

2. Se dă sistemul:

$$\begin{aligned} by - cz + dt &= -a \\ -bx + az - ct &= -d \\ cx - ay + bt &= +d \\ -dx + cy - bz &= +a. \end{aligned}$$

Să se calculeze valoarea expresiunii

$$E \equiv ax + dy - dz - at$$

în care x, y, z, t se înlocuesc prin rădăcinile sistemului.

C. IONESCU-BUJOR.

R. Adunând prima ecuaţiune cu ultima şi a doua cu a treia, se obţine

$$d(x - t) + (b + c)(z - y) = 0$$
$$(c - b)(x - t) + a(z - y) = 0.$$

Dar determinatul acestui sistem omogen în $x-t$, $z-y$ este $ad-c^2+b^2 \neq 0$, de oarece patratul său este tocmai determinantul sistemului dat care trebue să fie compatibil şi determinat pentru ca problema să aibă loc; deci sistemul omogen admite numai soluţii nule $\therefore x = t$, $z = y$ $\therefore E \equiv 0$.

3. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul O, iar A′, B′ şi C′ punctele în care bisectoarele vârfurilor A, B şi C taie a doua oară cercul O. In ce caz suprafaţa triunghiului A′B′C′ este egală cu aceea a triunghiului ABC?

SUBLT. SAVIN C. IOAN.

R. Fie a', b', c' laturile triunghiului ABC atunci:

$$\text{supr. tr. } A'B'C' = \frac{a'b'c'}{4R} = S' \qquad (R \text{ fiind raza cercului O})$$

Insă:

$$a'^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \widehat{C'OB'}$$

dar:

$$\widehat{B'OC'} = 2\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)(\pi - A)$$

Deci:

$$a'^2 = 2R^2[1 - \cos(\pi - A)] = 2R^2(1 + \cos A) = 4R^2 \cos^2 \frac{A}{2} \cdot$$

Deci:

$$a' = 2R \cos \frac{A}{2} \quad \text{analog } b' = 2R \cos \frac{B}{2}, \quad c' = 2R \cos \frac{C}{2} \cdot$$

Se deduce imediat:

$$S' = \frac{8R^3 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{4R} = 2R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cdot$$

Pe de altă parte:

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{4R} \qquad (p \text{ fiind perimetru triungh. ABC}).$$

Deci:

$$\text{Supr. tr. } A'B'C' = 2R^2 \frac{p}{4R} = \frac{1}{2} pR. \qquad (1)$$

De asemenea:

$$\text{Supr. tr. } ABC = pr. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) deducem: $pR = 2pr$ deci $R = 2r$.

Deci trebue ca raza cercului circumscris triunghiului ABC *să fie de două ori raza cercului înscris.*

4. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresiunea:

$$E = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta} + \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

IULIAN ALEXIU.

R. Se ţine seamă de identităţile:

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta \equiv \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta \equiv \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta).$$

Deci:

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\alpha+\beta) \\ &= \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\,[\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+1] \\ &= \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\left[\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right] \\ &= \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha-\beta\right)}{\cos(\alpha-\beta)\cos\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2}\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha-\beta\right)}{\cos(\alpha-\beta)}\,. \end{aligned}$$

5. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresiunea:

$$E=\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\beta+\cos\beta+2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

IULIAN ALEXIU.

R. Expresia dată se poate scrie:

$$\begin{aligned} E &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left[\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right]. \end{aligned}$$

Se înlocueşte:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\quad;\quad 1=\sin\frac{\pi}{2}$$

$$E=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left[\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{2}\right].$$

Suma unghiurilor din paranteză este π deci se poate aplica formula:

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\,.$$

Deci:

$$\begin{aligned} E &= 8\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\pi-\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\pi}{4} \\ &= 4\sqrt{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\pi-\alpha-\beta}{4}\,. \end{aligned}$$

PROBLEME PROPUSE

5003 [1]). Intre ce limite trebue să fie cuprins m pentru ca fiecare din ecuaţiunile

$$x^2 - (m^2 - 1)\,x + m^2 - 1 = 0$$

$$(m^2 - 3)\,x^2 - 6x - m^2 + 1 = 0$$

să aibă o rădăcină, şi numai una singură, cuprinsă între rădăcinile celeilalte ecuaţiuni?

G-L GH. BUICLIU.

5014. O grindă de lemn cu secţiunea dreptunghiulară, aşezată orizontal, poate suporta o sarcină proporţională cu lăţimea, proporţională cu înălţimea şi invers proporţională cu lungimea, dacă sarcina se prinde la mijloc sau se răspândeşte uniform pe lungul grinzii. O grindă cu dimensiuni duble, făcută din acelaşi material, are un volum de 8 ori mai mare. Poate suporta ea o încărcare de 8 mai mare? Se va neglija greutatea proprie a grinzii.

I. IONESCU.

5015. Să se găsească un număr prim de patru cifre căruia adăugându-i o unitate să se obţie un alt număr care, considerat în sistemul octoval, să fie patrat perfect.

VIRGIL GHIŢESCU.

5016. Să arate că dacă p este număr prim, avem:

$$(1!\ 2!\ 3!\ 4! \ldots\ (p-1)!)^2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \mathcal{M}p.$$

CPT. COMANDOR GR. ZAPAN.

---

1) Problema propusă cu acest număr la pag. 54 din numărul trecut fiind tot una cu problema 4990 propusă la pag. 670 Vol. XLIII se anulează şi se înlocueşte cu prezenta.

5017. Se cere un patrat perfect de patru cifre, astfel format ca cifra a doua, adunată cu cifra a treia să dea un număr egal cu întreitul sumei ce se obţine adunând cifra întâia cu a treia; iar cifra a patra să fie egală cu îndoitul cifrei a treia.

CONST. SĂNDULACHE.

5018. Să se arăte că dacă p este un număr pozitiv, întreg şi par, expresia:

$$E = 169 \cdot 13^{3p+1} + 91 \cdot 13^{2p+1} + 15 \cdot 13^{p+1} + 26 \cdot 13^{p} + 15$$

se divide cu 2744.

M. F. AMĂRĂŞTEANU.

5019. Intr'o placă plană sunt practicate două găuri circulare de mărimi diferite. Să se ducă dreptele tangente comune la acele găuri.

IULIAN ALEXIU.

5020. In triunghiul isoscel BAC, paralelele duse din un punct M, luat pe baza BC, la cele două laturi AB şi AC, taie aceste laturi în punctele N şi P. Să afle locul geometric al simetricului punctului M, când punctul M descrie dreapta indefinită BC.

LT. AVRAM N. CONSTANTIN.

5021. Se dă un triunghiu ABC. Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul său ortic şi A'B'C' triunghiul format de punctele de contact ale triunghiului $A_1B_1C_1$ cu cercul său înscris. Fie A_2, B_2, C_2 punctele determinate de perechile de drepte:

$$(B_1C_1,\ B'C')\ ;\ (C_1A_1,\ C'A')\ ;\ (A_1B_1,\ A'B').$$

1°. Să se demonstreze că $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ sunt diametrele a trei cercuri cu acelaşi ax radical;

2°. In care triunghiuri acest ax radical este chiar una din înălţimile triunghiului ortic?

C. IONESCU-BUJOR.

5022. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul O şi circumscris cercului I. Fie A', B', C' intersecţiile bisectoarelor interioare ale lui ABC cu cercul O; A'' diametral opus lui A' în O; A_a intersecţia lui O cu A''I; L intersecţia lui $A'A_a$ cu BC; L_b, L_c intersecţiile lui LI cu AC şi AB; V_a centrul cercului $A_a L_b L_c$. Se cere să se demonstreze că:

1°. $A_a L_b$, $A_a L_c$ trec respectiv prin B', C'.

2°. Punctele M, N, construite analog cu L, sunt colineare cu L.

3°. Punctele O, V_a, A_a sunt colineare.

4°. Dreapta AA' trece prin V_a.

5°. Cercul $A_a L_b L_c$ este tangent laturilor AB, AC.

G-L GH. BUICLIU.

5023. I, J, K, L fiind punctele de tangenţă ale laturilor AB, BC, CD, DA ale unui patrulater complet ABCDEF circumscris cercului O, se consideră intersecţiile A', B', C', D', E', F' ale paralelelor duse prin O respectiv la dreptele IL, IJ, JK, KL, IK, JL cu o tangentă la cercul O într'un punct M variabil de pe acest cerc. Se consideră apoi intersecţiile

$$P \equiv (AA', EE') \; ; \; Q(CC', FF') \; ; \; R(AA', FF') \; ; \; S(CC', EE').$$

Să se arate că dreptele PQ şi RS trec fiecare prin câte un punct fix.

TH. G. COCEA.

5024. Pe laturile BA şi CA ale unui triunghiu oarecare ABC, se ia lungimile BA_1 şi CA_2 egale cu o lungime λ.

Dreptele A_1C şi A_2B se întâlnesc în L.

Făcând aceeaşi operaţie pe laturile CB şi AB, precum şi pe AC şi BC, se obţin punctele M şi N.

Să se arate că atunci când λ variază, locul punctelor L, M, N sunt trei drepte ce se întâlnesc în acelaşi punct.

N. N. VELICESCU.

5025. Dacă A, B, C, ..., K, L sunt numere complexe de acelaşi modul, să se arate că expresia

$$E \equiv \frac{(A+B)(B+C)\ldots(K+L)(L+A)}{A \cdot B \cdot C \ldots L}$$

este un număr real.

ALEX. V. NICULESCU.

5026. Se consideră polinomul A_n^m, care are pe termeni combinările cu repetiție a numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ luate câte m. Fie B_n^m polinomul care are ca termeni combinările ordinare ale acelorași numere luate câte m. Termenii celor două polinoame au coeficienții egali cu 1. Să se dovedească egalitatea:

$$B_n^m = \begin{vmatrix} A_n^1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ A_n^2 & A_n^1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ A_n^3 & A_n^2 & A_n^1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n^m & A_n^{m-1} & A_n^{m-2} & A_n^{m-3} & \ldots & A_n^1 \end{vmatrix}.$$

TH. ANCHELUȚĂ.

5027. Fie un contur poligonal închis format din vectorii $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, $\vec{V_3}$, $\vec{V_4}$; notând cu $(\vec{V_i}, \vec{V_j})$ unghiul orientat al vectorilor $\vec{V_i}$, $\vec{V_j}$, să se stabilească relațiunea:

$$\sin(\vec{V_1}, \vec{V_2}) \sin(\vec{V_3}, \vec{V_4}) + \sin(\vec{V_2}, \vec{V_3})$$
$$\sin(\vec{V_1}, \vec{V_4}) = \sin(\vec{V_1}, \vec{V_3}) \sin(\vec{V_2}, \vec{V_4}).$$

AD. GHEORGHIU.

5028. Să se determine numerele x, y pozitive astfel ca șirul:

$$a_1, a_2, \ldots a_n; \ldots;$$

unde:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+x} \left(1 + \frac{y}{n}\right),$$

să fie descrescător.

Aceeași chestiune pentru:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 = \frac{y}{n}\right).$$

T. POPOVICIU.

ERATĂ. In Nr. 1/938 al G. M., la pagina 25, rândurile 13 și 14 se vor șterge cuvintele: „de Școală Militară, de Școală Politecnică, sau student de Facultate din țară".

Idem, la pag. 27, rândul 11, în loc de „In numărul de față al *Gazetei Matematice* apare" se va citi: „In Adunarea Generală dela 31 August 1938, s'a aprobat".

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexandrescu C. M. (4960, 96); *Alexandrescu M. B.* (5011); *Bodnărescu M. Horia* (4845, 948, 55, 57, 80, 90, 91); *Boian Emil* (4845, 954); *Boldescu Petre* (4988, 90, 94, P); *Cardara Gh.* (4845); *Cârdeiu D. Gh.* (4980, 85); *Cioc D-tru* (4845); *Constantinescu-Olt C. Vasile* (4845); *Constantin V. P.* (4845); *Cornăţeanu I. Aurel* (4708, 23, 825, 45, 945, 47, 60, 68, 96); *Dovgan Gh.* (4845); *Dumitrescu M. Gh.* (4908, 23, 25, 34, 45, 48, 60, 61, 85, 96, 5011); *Georgescu Răducan* (N); *Gereanu C. Ana* (4946, 96); *Gheorghiu P. P.* (4989, 96); *Gviazdomorschi E. R.* (4845); *Hanganu O. Leonard* (4996); *Imbru I.* (4996); *Ionescu B. N. Gh.* (4960, 68, 96, 5005, 11); *Ionescu Stelian* (4845); *Jareghie V. Ion* (4931, 43, 45, 53, 83, 93, 96); *Jiletcovici Al.* (4996); *Mărculescu Origen* (4983, 84, 90, 5011); *Mihu Cerchez* (4996, 98); *Miroslav Tudorel* (4954); *Modâlcă Emil* (4845); *Pădureţ Vasile* (4845); *Pantelimon Const.* (4953, 83); *Paraipan Const.* (4845); *Pascaru I. C.* (4983); *Petrescu Achille* (4845, 996); *Popa D. Mircea* (4845, 945, 68, 75, 78, 83, 84, 89, 90, 93, 96); *Rădulescu Octavian* (4895); *Reischer L. Herman* (4870, 934, 53, 89, 96, 99); *Ripianu D-tru* (4770, 822, 51, 52, 902, 10, 11, 47, 80, 93, 98); *Ripianu I. V.* (4854, 89, 96); *Rohr I. Alex.* (4934, 35, 43, 64, 80, 83, 96); *Roşculeţ M. Marcel* (4637, 980, 96); *Şaichin O. Adolf* (4753, 65, 851, 80, 928, 88, 89, 5000, 05, 11); *Săruleşteanu I. Em.* (4829, 996); *Segal Joe* (4199, 307, 35, 803, 32, 52); *Solomon Iancu Isac* (4817, 40, 45, 60, 68, 96, 945); *Ştefănescu S. Radu* (4996); *Ştefănescu V. L.* (4996); *Stoenescu D. Mirel* (4880); *Tilică C. St.* (4845); *Ţiţeica I. Ilie* (4400, 79, 96, 935, 69, 72, 82, 83, 89, N, P, R); *Tudoran M. Lydia* (4987, 99); *Tudoran M. Sonia* (4880, 904, 08, 18, 52, 64); *Turcu Sandu* (4845); *Vasilescu-Ştabu Al. M.* (4576, 95, 96, 607, 42, 54, 66, 703, 930, 5004, 05, 06, 08); *Zamfirescu Gh. I.* Locot. (N, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anual şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. A. G. Ioachimescu, *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. N. Abramescu, *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IV. A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica, *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă). (Epuizată).

V. Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea, *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie.* (Epuizată).

VI. Tr. Lalescu, *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I. Ediţia II-a revăzută şi adăogită, 1923. (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice. (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice. (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. A. G. Ioachimescu, *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

IX. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. G. Ţiţeica, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. Gazeta Matematică 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. I. Ionescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa :

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

C. 52.332

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIV

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1938

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIU

SUMARUL

1. Configurația numerelor prime (urmare și sfârșit) . . . . . *G. Zapan.*
2. Asupra reprezentării analitice a ariilor și liniilor poligonale (urmare și sfârșit) *N. O. Zaharia.*
3. Din geometria triunghiului . . . . . *V. Thébault.*
4. Asupra suprafețelor Țițeica . . . . . *Gh. Th. Gheorghiu.*
5. Raport asupra premiului „Vasile Conta".
6. Note Matematice: 7 — 9.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Cereri 281.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 3675, 4068, 4093, 4298, 4410, 4529, 4676 și 4844, 4797, 4874, 4925, 4960, 4964, 4975, 4999.
12. Exerciții: 6 — 7.
13. Probleme propuse: 5029 — 5043.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1938

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stan,** Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan; Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1938 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5001, 02, 09, 10, 12, 13, 14, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

CONFIGURAȚIA NUMERELOR PRIME

(Urmare dela pag. 66)

In cele următoare vom discuta unele consecințe ale configurației numerelor prime. Să precizăm următoarele caracteristice: Numărul prim p_{n+1} se poate exprima în funcție de numerele prime mai mici decât el, doar în mod aproximativ, prin formula (α), cu o eroare anumită; determinarea valabilă a numărului prim p_{n+1}, pe calea unei formule, nu se poate face decât în funcțiune de complexul tuturor celorlalte numere prime, cuprinse între zero și infinit, așa cum se arată în formula (β).

Acest rezultat, obținut în domeniul numerelor, pare destul de ciudat la prima vedere. Privindu-l însă mai în deaproape vedem că se prezintă asemănător cu rezultatele cercetărilor din domeniile biologiei și fizicei [1]): anume el contrazice concepția sumativă, după care o caracterizare următoare poate fi definită perfect prin însumarea caracterizărilor precedente.

Astfel în biologie: o funcție a unui organism, de pildă aceia a „circulației" nu poate fi lămurită decât în mod aproximativ pe baza elementelor subordonate ei; o precizare desăvârșită s'ar putea face numai considerând funcțiunea înglobată în întregul organism din care ea face parte.

De asemenea în fizică: repartiția potențialelor pe diverse regiuni ale suprafeței unui corp, încărcat cu electricitate statică, este dată nu de caracteristicile diferitelor puncte ale suprafeței corpului, privite izolat, ci de forma sau configurația corpului privit în totalitatea lui.

In sociologia și psihologia actuală concepția structurală tinde de asemenea să înlocuiască tot mai mult vechia concepție sumativă, care s'a dovedit că nu corespunde realității.

Dar concepția sumativă se dovedește că nu are caracter general, deci nu poate să subsiste nici măcar în domeniul aprioric al numerelor, pe care ne-am deprins a le defini prin însumarea unor elemente subordonate. Cele stabilite mai sus ne conduc dimpotrivă către concepția structurală și în domeniul numerelor, concepție după care o parte, sau caracterizare, se definește de totalitate.

1) A se vedea: W. KOEHLER, Die physischen Gestalten. Verlag der Philosophischen Akademie, Erlangen, 1924.

Domeniul numerelor este considerat ca un domeniu de ştiinţă pură, cu caracter absolut, spre deosebire de cel relativ al ştiinţelor empirice. Legile empirice nu numai că ne conduc către date aproximative, dar ele însăşi variază în decursul timpului, cu tendinţa de a fi adaptate la aproximări din ce în ce mai bune. Legile numerelor rămân însă aceleaşi pentru toate timpurile.

Configuraţia numerelor prime, privită sub cele două aspecte ale ei, unul parţial şi relativ după formula (α) şi celălalt total, la „limită", după formula (β), prezintă şi o importanţă filosofică. Şi anume ea ne arată că din punct de vedere empiric, avem chiar în domeniul exact al numerelor un exemplu de lege prin care o caracterizare următoare nu poate fi determinată decât cu aproximaţie în funcţie de caracterizările precedente, în timp ce, din punct de vedere exact matematic, caracterizarea considerată (numărul prim) nu poate fi determinată decât de complexul tuturor celorlalte caracterizări (toate celelalte numere prime cuprinse între zero şi infinit), adică de totalitatea sau întregul din care face parte caracterizarea considerată.

In legătură cu aceasta, este important să remarcăm faptul că pe când formula relativă (α) prezintă un caracter dominant sumativ, formula limită (β) prezintă un caracter structural, deoarece aceasta din urmă priveşte configuraţia tuturor numerelor prime şi sensul ei dispare de îndată ce am îndepărta din ea una sau mai multe componente diferite de zero. De altfel se vede uşor că această formulă prezintă un caracter dominant nu de însumare propriu zisă, ci de însumare la infinit, a unor câtimi finite sau infinit de mici, adică un caracter de integrare într'un tot.

Configuraţia numerelor prime stabilită pe baza principiilor teoriei configuraţiei, ne arată pe deoparte unele posibilităţi metodologice ale acestei teorii, în cercetarea problemelor ştiinţifice; pe de altă parte ne confirmă la rândul ei, prin însăşi natura ei, teoria configuraţiei (Gestalttheorie) — formulată de KOEHLER, WERTHEIMER şi KOFFKA, — chiar în domeniul, considerat până acum pur sumativ, al numerelor.

In sfârşit configuraţia numerelor prime ne evidenţiază, prin cele două formule (α) şi (β), pe deoparte relativul ştiinţei empirice, după care o caracterizare nu poate fi definită decât doar aproximativ pe baza unui număr finit de alte caracterizări şi pe de altă

parte absolutul către care tind ştiinţele pure şi filosofia şi care nu se poate afla printr'o însumare de părţi; căci el este definit de configuraţia care integrează toate părţile, adică de totalitate.

In legătură cu concluziile formulate de noi se pune însă următoarea întrebare: Mai rămân oare acestea valabile în cazul când s'ar dovedi vreodată că în afară de configuraţia numerelor prime, enunţată sub forma de faţă, ar mai exista şi o altă lege, reprezentată printr'o formulă de altă natură, cu număr limitat de termeni? Răspunsul la această întrebare este următorul: Desigur că într'un asemenea caz concluziile noastre n'ar mai prezenta caracter de valabilitate unică, ele reprezentând atunci doar o posibilitate, între altele.

Considerând însă faptul că cu toate eforturile depuse până astăzi în această direcţie, în matematici, nu s'a putut găsi o formulă de altă natură, ba chiar s'a contestat posibilitatea existenţei ei, putem spune că cu foarte mare probabilitate configuraţia numerelor prime, sub forma indicată în studiul de faţă — după care relaţiunea dintre numerele prime cuprinde totalitatea acestor numere, — este singura lege posibilă în acest domeniu.

De aci urmează că şi concluziile la care ea ne conduce prezintă o foarte mare probabilitate de a avea caracter de valabilitate unică.

Inainte de a încheia credem important să menţionăm ceva şi asupra momentelor psihologice, caracteristice în tehnica de rezolvare a problemei propuse, care ar putea fi folositoare şi în tratarea altor chestiuni ştiinţifice.

Operaţia de aflare a unui număr prim constă, empiric, pe deoparte din eliminarea diferiţilor multipli ai numerelor prime: 2, 3, 5, ... p_n, iar pe de alta din punerea în evidenţă a primului număr rămas din această eliminare şi care este numărul prim următor p_{n+1}.

Această operaţie empirică, precizată în totalitatea ei, prezintă mai întâi pentru noi un pronunţat caracter intuitiv. Suntem însă în căutarea unui corelat conceptual abstract. Rezolvarea matematică va trebui întreprinsă astfel încât în primă etapă conceptele ei să se racordeze structurii operaţiei empirice. De aceea structura operaţiei empirice trebue mai întâi transpusă într'o schemă caracteristică topologică, adică într'o reprezentare figurală, care să aibă darul de a prezenta în acelaşi timp şi caracter intuitiv şi caracter conceptual abstract.

Prinderea intuitivă a structurii operaţiei empirice, cu tendinţa de transpunere a ei în concepte matematice, exercită în actul gândirii noastre o presiune asupra drumului de urmat în rezolvarea

problemei propuse: suntem conduşi cu necesitate la prezentarea unei anumite configuraţii — cea dela începutul studiului de faţă, — fără o motivare prealabilă amănunţită, dar al cărei rost se lămureşte pe deplin în operaţiile următoare, ea fiind impusă de totalitatea acestor operaţii.

Cu alte vorbe: punctul de plecare în stabilirea legei căutate, reprezentat prin configuraţia arătată a şirurilor de numere, mergând spre infinit, nu a fost stabilit pe calea „din aproape în aproape", obişnuită în matematici, ci pe o cale inversă: el a fost impus de structura însăşi a legei căutate, care a fost prinsă intuitiv din operaţia empirică, în totalitatea ei, de eliminare a diferiţilor multipli.

Desigur că dificultatea care a stat la baza rezolvării configuraţiei numerelor prime n'a fost de natură tehnică propriu zisă, întrucât după cum s'a văzut, calculele care intervin sunt cu totul elementare, ci de natură psihologică: cheia care deschidea poarta spre drumul rezolvării nu trebuia căutată ca de obicei în faţa acestei porţi, ci la capătul celălalt al drumului [1]).

G. ZAPAN
Doctor în filosofie.

ASUPRA REPREZENTĂRII ANALITICE A ARIILOR ŞI LINIILOR POLIGONALE

(Urmare dela pag. 69)

8. O problemă: *Să se determine ecuaţia regiunii plane în care o funcţie dată, continuă fără puncte multiple,* $\varphi(x, y)$ *ia valori cuprinse între două valori date* **a** *şi* **b** $(a < b)$.

a) Regiunea în care $\varphi(x, y)$ este negativă are drept ecuaţie

$$\varphi(x, y) + |\varphi(x, y)| = 0,$$

1) O expunere asupra mecanismului psiho-fizic în cazul rezolvării problemelor de matematici — şi în genere a tuturor probelor de inteligenţă — vom face în „Zeitschrift für Arbeitspsychologie und praktische Psychologie im allgemeinen" (Berlin) şi în „Revista de Filosofie", îndată după apariţia lucrării de faţă în „Gazeta Matematică". Acolo vom relua problema configuraţiei numerelor prime, desvoltând-o mai mult decât aci, pe latura ei filosofică.

iar regiunea unde aceeaşi funcţie este pozitivă este

$$-\varphi(x, y) + |\varphi(x, y)| = 0.$$

b) Regiunea în care $\varphi(x, y) > a$, adică $\varphi(x, y) - a > 0$, are drept ecuaţie

$$[a - \overset{+}{\varphi}(x, y)] = 0,$$

iar regiunea unde $\varphi(x, y) < b$, adică $\varphi(x, y) - b < 0$, are ca ecuaţie

$$[\overset{+}{\varphi}(x, y) - b] = 0.$$

Regiunea căutată se află la intersecţia acestor două regiuni (fig. 3). Liniile L_1 şi L_2 au ca ecuaţii:

$$\varphi(x, y) - a = 0 \quad \text{şi} \quad \varphi(x, y) - b = 0.$$

Un punct din această regiune va verifica ecuaţia

$$[a - \overset{+}{\varphi}(x, y)] + [\overset{+}{\varphi}(x, y) - b] = 0,$$

adică

$$|\varphi - a| + |\varphi - b| = b - a.$$

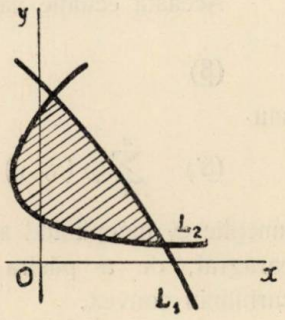


fig. 3.

9. *Ecuţia ariei poligonului convex.*

Fie

$$\Delta_i = \pm(a_i x + b_i y + c_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ecuaţiile dreptelor pe cari se găsesc laturile poligonului. Vom alege semne convenabile, aşa încât în interiorul poligonului să avem:

$$\Delta_i < 0 \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

In aceste condiţii ecuaţia interiorului poligonului va fi

$$(\alpha) \qquad \sum_{i=1}^{n} \overset{+}{\Delta}_i = 0.$$

Intr'adevăr, pentru un punct din interior având $\Delta_i < 0$, urmează că

$$\overset{+}{\Delta}_i = 0 \; (i = 1, 2, \ldots, n),$$

deci ecuaţia (α) este verificată. Ea este deasemenea verificată de toate punctele depe laturi şi vârfuri. Un punct din afara poligonului

convex are coordonatele în aşa fel încât cel puţin una din expresiunile Δ_i este pozitivă, deci cel puţin unul din termenii ecuaţiei (α) este pozitiv, ceilalţi fiind toţi nuli.

Ecuaţia (α) desvoltată este

$$(\alpha') \quad \sum_{i=1}^{n} \pm (a_i x + b_i y + c_i) + \sum_{i=1}^{n} | a_i x + b_i y + c_i | = 0 .$$

Observaţie. Se poate construi în acelaşi fel ecuaţia domeniului interior (inclusiv periferia şi vârfurile) unui poligon convex curbiliniu. Ea va fi tot ecuaţia (α) sau (α') unde Δ_i vor fi înlocuiţi cu funcţiile $\varphi_i(x, y)$ care definesc, prin ecuaţiile

$$\varphi_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

liniile care determină periferia poligonului curbiliniu convex.

Această ecuaţie va fi deci

$$(\beta) \qquad \sum_{i=1}^{n}{}^{+} \varphi_i(x, y) = 0$$

sau

$$(\beta') \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x, y) + \sum_{i=1}^{n} | \varphi_i(x, y) | = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

funcţiile φ_i îndeplinind aceeaşi condiţie amintită la începutul acestui paragraf, de a păstra semnul negativ în interiorul poligonului curbiliniu convex.

10. După cum am spus la început, aceste consideraţii se extind întocmai la configuraţii analoage în spaţiu. De pildă, dacă alegem în aşa fel semnele încât expresiunile $P_i(x, y, z)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ cari definesc cele n plane:

$$P_i = \pm (a_i x + b_i y + c_i z + d_i) = 0$$

pe care sunt situate feţele poliedrului convex, să fie negative în interiorul lui, *ecuaţia*

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{+} P_i(x, y, z) = 0$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x, y, z) + \sum_{i=1}^{n} | P_i(x, y, z) | = 0$$

reprezintă analitic domeniul interior al poliedrului, inclusiv toată periferia lui (feţe, muchii, vârfuri).

11. Consideraţiile de mai sus expun succint o metodă de construire a unor ecuaţii analitice care reprezintă făpturi geometrice care nu intră în domeniul preocupărilor geometriei analitice clasice. Ele pot fi extinse la probleme de o diversitate mai mare decât aceea a chestiunilor expuse aci.

Cu aceleaşi chestiuni s'a ocupat la noi D-l Prof. V. ALACI, într'o serie de articole publicate, începând din anul 1930, în *„Buletinul Ştiinţific al Şcoalei Politehnice din Timişoara"*. D-sa a reuşit să închege astfel un nou capitol al geometriei analitice, acela al liniilor poligonale şi suprafeţelor poliedrale, precum şi altor configuraţii geometrice, continui sau discontinui.

D-sa a utilizat funcţiunea discontinuă cunoscută.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x\alpha}{\alpha}\, d\alpha$$

care ia valorile $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$ după cum x este negativ, nul sau pozitiv.

Să remarcăm că metoda expusă de noi, cu ajutorul funcţiunii NEVANLINNA, ne permite să stabilim mai uşor şi în chip mai natural ecuaţiile configuraţiilor despre care am vorbit în paragrafele precedente, are însă defectul de a nu se putea fi extinsă la toate configuraţiile studiate de D-l V. ALACI. Pe de altă parte, toate ecuaţiile stabilite de noi, pot fi uşor transformate în ecuaţii de tip ALACI cu ajutorul identităţilor:

$$\overset{+}{x} = \frac{x}{2} + \frac{x}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin x\alpha}{\alpha}\, d\alpha$$

şi

$$|x| = \frac{2x}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin x\alpha}{\alpha}\, d\alpha,$$

dar nu orice ecuaţie a D-lui V. ALACI poate fi scrisă cu ajutorul funcţiei NEVANLINNA sau *„valorii absolute"*, deoarece egalităţile inverse

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \pi\frac{\overset{+}{x}}{x} - \frac{\pi}{2}$$

şi

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{|x|}{x}$$

n'au sens pentru $x = 0$.

N. O. ZAHARIA.

DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

Fie A_m, B_m, C_m mijloacele laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC; a, b, c lungimele laturilor acestui triunghiu; (O), (I), (I_a), (I_b), (I_c) cercul circumscris şi cercurile tritangente; R, r, r_a, r_b, r_c razele acestor cercuri şi S suprafaţa triunghiului ABC.

1°. Dacă A', B', C' sunt puncte arbitrar luate pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC şi dacă se notează:

$$A_m A' = \alpha \quad , \quad B_m B' = \beta \quad , \quad C_m C' = \gamma$$

avem relaţiunea de arii

$$A'B'C' = ABC + \Sigma AB'C'.$$

Dar:

$$\frac{AB'C'}{ABC} = -\frac{1}{4bc}(b-2\beta)(c-2\gamma)$$

$$\therefore \frac{AB'C'}{ABC} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{c} - \frac{\beta}{a}\right) + \frac{\beta\gamma}{bc}.$$

Deci:

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4RS}(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta)$$

sau [1]):

$$(1) \qquad A'B'C' = A_m B_m C_m + \frac{1}{4R}(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta).$$

Dacă se schimbă α, β, γ în $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ punctele A', B', C', sunt înlocuite prin simetricele lor A", B", C" faţă de A_m, B_m, C_m. Triunghiul A'B'C' devine triunghiul A"B"C" dar membrul al doilea al egalităţei (1) nu se schimbă.

Deci, *dacă* A' *şi* A", B' *şi* B", C' *şi* C" *sunt puncte isotomice pe laturile* BC, CA, AB *ale triunghiului* ABC, *suprafeţele triunghiurilor* A'B'C' *şi* A"B"C" *sunt egale în mărime şi semn.*

In particular, *dacă punctele* A', B', C' *sunt colineare, isotomicele lor* A", B", C" *sunt de asemeni colineare.*

Formula (1) permite deci de a regăsi proprietatea caracteristică a transversalelor reciproce.

---

1) V. THÉBAULT, *Mathesis* (supliment), 1935 — 11.

2°. In cazul particular când:

$$\alpha = \beta = \gamma = x$$

adică atunci când segmentele $A_m A'$, $B_m B'$, $C_m C'$ sunt egale, relaţi (1) devine:

$$(2)\quad A'B'C' = A_m B_m C_m + \frac{x^2}{4R}(a+b+c) = A_m B_m C_m + \frac{px^2}{2R}$$

p fiind semiperimetrul triunghiului fundamental.

Dacă se schimbă semnul uneia din lungimile α, β, γ, conservând pe al celorlalte două, formula (2) se scrie succesiv:

$$(3)\quad A'B'C' = A_m B_m C_m - \frac{(p-a)x^2}{2R} = A''B''C''$$

$$(4)\quad A'B'C' = A_m B_m C_m - \frac{(p-b)x^2}{2R} = A''B''C''$$

$$(5)\quad A'B'C' = A_m B_m C_m - \frac{(p-c)x^2}{2R} = A''B''C''$$

aşa încât aria triunghiurilor $A'B'C'$ şi $A''B''C''$ se anulează şi punctele A', B', C' precum şi punctele A'', B'', C'' sunt colineare pentru

$$(6)\quad x^2 = \frac{1}{2}Rr_a \quad , \quad x^2 = \frac{1}{2}Rr_b \quad ; \quad x^2 = \frac{1}{2}Rr_c$$

cu alte cuvinte când lungimea x este egală cu jumătatea tagentelor

$$I_a M_a = I'_a M_a \quad , \quad I_b M_b = I_b M'_b \quad , \quad I_c M_c = I_c M_c$$

la cercul (O) duse din I_a, I_b, I_c şi limitate la punctele de contact M_a şi M'_a, M_b şi M'_b, M_c şi M'_c pe cercul (O) şi reciproc.

Aşa dar, în virtutea lui (6) *există trei perechi de transversale reciproce* Δ_a *şi* Δ'_a, Δ_b *şi* Δ'_b, Δ_c *şi* Δ'_c *astfel încât segmentele rectilinii interceptate pe fiecare dintre laturile triunghiului de transversale să fie egale între ele.*

3°. Fie (A'_a, B'_a, C'_a) şi (A''_a, B''_a, C''_a), (A'_b, B'_b, C'_b) şi (A''_b, B''_b, C''_b), (A'_c, B'_c, C'_c) şi (A''_c, B''_c, C''_c) poziţiile punctelor (A', B', C') şi (A'', B'', C'') în fiecare din cele trei ipoteze (6).

Cercurile circumscrise triunghiurilor $AB'_a C'_a$, $BC'_a A'_a$, $CA'_a B_a$ se taie în un punct P_a, pe cercul (O), aşa în cât dreptele $P_a A'_a$,

$P_aB'_a$, $P_aC'_a$ întâlnesc laturile triunghiului ABC sub acelaşi unghiu φ_a, şi avem [1]):

$$-4S\operatorname{cotg}\varphi_a = \overline{A'_aB}^2 - \overline{A'_aC}^2 + \overline{B'_aC}^2 - \overline{B'_aA}^2 + \overline{C'_aA}^2 - \overline{C'_aB}^2$$

$$= 2(-ax + bx + cx) = 4(p - a)x$$

de unde:

$$\operatorname{cotg}\varphi_a = \sqrt{\frac{R}{2r_a}} = \frac{OM_a}{I_aM_a}$$

şi la fel

$$\operatorname{cotg}\varphi_b = \sqrt{\frac{R}{2r_b}} = \frac{OM_b}{I_bM_b} \quad , \quad \operatorname{cotg}\varphi_c = \sqrt{\frac{R}{2r_c}} = \frac{OM_c}{I_cM_c}$$

φ_b, φ_c fiind unghiurile analoage lui φ_a pentru ultimele două valori ale lui x^2 din (6). Rezultă deci că *unghiurile* φ_a, φ_b, φ_c *sunt egale unghiurilor* I_aOM_a, I_bOM_b, I_cOM_c.

Transversalele Δ_a, Δ_b, Δ_c sunt deci dreptele lui SIMSON, de unghiuri φ_a, φ_b, φ_c, ale punctelor P_a, P_b, P_c faţă de triunghiul ABC, iar Δ_a, Δ'_b, Δ'_c sunt dreptele lui SIMSON de unghiuri $-\varphi_a$, $-\varphi_b$, $-\varphi_c$ ale punctelor P''_a, P''_b, P''_c corespunzătoare triunghiurilor $AB''_aC''_a$, $BC''_aA''_a$, $CA''_aB''_a$,...

V. THÉBAULT.

ASUPRA SUPRAFEŢELOR ŢIŢEICA

1. Se zice că o suprafaţă (S) face parte din clasa suprafeţelor ŢIŢEICA atunci când în orice punct al ei expresia

$$(1) \qquad \frac{K}{d^4} = a = \text{const.},$$

K fiind curbura totală a suprafeţei şi d distanţa dela origină la planul tangent în punctul considerat.

Dacă x, y, z, coordonatele punctului curent al suprafeţei, sunt

1) A. THIRD. *Proceedings of the Edinburg Mathematical Society*, 1913 — 17 — 34.

funcţiuni de doi parametrii u, v, atunci (1) se poate scrie sub forma [1])

$$\Delta_2 \Delta_3 - \Delta_1^2 = a\,\Delta^4 , \tag{2}$$

unde am notat prin

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_v \\ y_{uu} & y_u & y_v \\ z_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix},$$

(3)

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x_{vv} & x_u & x_v \\ y_v & y_u & y_v \\ z_{vv} & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} x & x_u & x_v \\ y & y_u & y_v \\ z & z_u & z_v \end{vmatrix},$$

unde x_u, y_u, z_u, ... sunt derivatele parţiale ale funcţiunilor care reprezintă pe x, y, z, ... respectiv în raport cu u şi v.

Să presupunem că am scris ecuaţia suprafeţei (S) sub forma: $z = f(x, y)$ şi ne propunem să găsim ecuaţia cu derivate parţiale la care satisface funcţiunea z. Pentru aceasta va fi destul să facem în (3) pe

$$x = u \quad , \quad y = v \quad , \quad z = f(u, v).$$

Făcând calculele, ecuaţia (2) se transformă în ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = a\left(z - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^4 . \tag{4}$$

2. Ca o aplicaţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (4), ne propunem să găsim ecuaţia diferenţială la care trebue să satisfacă funcţiunea z în cazul când suprafaţa (S) este de rotaţie. In acest caz

$$z = f(t) \quad \text{unde} \quad t = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Făcând calculele se găseşte că z satisface ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = at\left(z - t\frac{dz}{dt}\right)^4 . \tag{5}$$

---

1) G. Tzitzéica, *Géométrie différentielle projective des réseaux*, Cultura Naţională, Bucureşti.

Să căutăm integralele particulare ale acestei ecuații diferențiale de forma

$$z = t^m ,$$

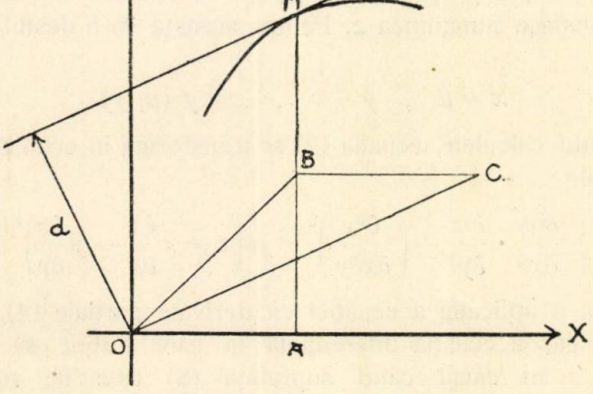
m fiind un parametru ce urmează a fi determinat. Făcând calculele se găsește că trebue să avem

$$(m-1)\,[a\,(m-1)^3\,t^{2\,(m+2} - m^2] = 0,$$

de unde rezultă că $m = 1$ sau $m = -2$, deoarece a și m sunt două numere ce nu depind de t. Căpătăm astfel suprafețele

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad z\,(x^2 + y^2) = 1,$$

prima fiind un con de gr. II cu vârful în origină, iar a doua o suprafață de gr. III care este un caz particular al unor suprafețe ȚIȚEICA mai generale [1]).



3. Să dăm o proprietate geometrică a curbelor meridiane ale suprafețelor de rotație care fac parte din clasa suprafețelor ȚIȚEICA.

Fie M un punct al curbei care se proiectează în A pe Ox. Bisectoarea unghiului xOy taie pe MA în B, iar o paralelă dusă prin origină la tangenta în M la curbă taie paralela dusă prin B

1) Loc. cit. pag. 255.

la Ox în C. Dacă d este depărtarea originei de tangenta în M la curbă, atunci expresia

$$d^4 \cdot \frac{\overline{OC}}{\rho} = \text{const.}, \tag{6}$$

ρ fiind curbura curbei în M.

In adevăr, cum tangenta în punctul $M(x, z)$ la curba de ecuație

$$z = f(x),$$

are ecuația

$$Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x),$$

rezultă că

$$d = \frac{z - x\frac{dz}{dx}}{\pm\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},$$

iar ecuația dreptei OC este

$$Z = \frac{dz}{dx} X.$$

Deci :

$$C\left(x : \frac{dz}{dx},\ x\right).$$

In fine cum

$$\overline{OC} = \frac{x\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 1}}{\frac{dz}{dx}} \quad \text{și} \quad \rho = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}},$$

rezultă că

$$d^4 \cdot \frac{\overline{OC}}{\rho} = \frac{x\left(z - x\frac{dz}{dx}\right)^4}{\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}} = \frac{1}{a} = \text{const.},$$

în baza lui (5). Proprietatea este demonstrată.

In particular, cum cuadricele cu centru sunt suprafețe ȚIȚEICA [1]), însemnează că conicele cu centru, raportate la axele lor se bucură de proprietatea (6).

GH. TH. GHEORGHIU.

RAPORT
ASUPRA PREMIULUI „VASILE CONTA"

In conformitate cu dispoziţiunile regulamentului premiului «VASILE CONTA»,

Noi Comisiunea constituită conform Procesului-Verbal al Adunării generale extraordinare dela 26 Martie 1938 din:

1. Prof. O. ONICESCU, membru al Societăţii
2. Prof. P. SERGESCU, „ „ „ şi
3. Cpt. Comandor GR. ZAPAN, membru în delegaţia Societăţii, întrunindu-ne pentru a alege cea mai bună lucrare originală de filosofia matematicilor adusă la cunoştinţa Societăţii până la 1 Iulie a. c.;

Am constatat că până la acea dată nu s'a prezentat şi nici adus la cunoştinţa Societăţii vre-o lucrare de acest gen.

Astfel fiind, conform art. 5 din regulamentul premiului «VASILE CONTA», urmează ca valoarea premiului din acest an să se adauge la premiul anilor următori.

O. ONICESCU, P. SERGESCU
şi CPT. C-DOR GR. ZAPAN.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea Generală dela 31 August 1938.

---

1) Loc. cit. pag. 253.

NOTE MATEMATICE

7. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]). Când N_p începe cu 8 am găsit următoarele 185 soluțiuni ale ecuațiunei

$$3N_3 = N.$$

N_p	N	N_p	N
801 946 572	2 405 839 716	849 657 021	2 548 971 063
801 964 572	2 405 893 716	849 657 102	2 548 971 306
802 194 657	2 406 583 971	849 657 120	2 548 971 360
802 196 457	2 406 589 371	849 657 201	2 548 971 603
802 456 197	2 407 368 591	849 657 210	2 548 971 630
802 546 197	2 407 638 591	849 701 256	2 549 103 768
819 465 702	2 458 397 106	849 710 256	2 549 130 768
819 465 720	2 458 397 160	849 725 601	2 549 176 803
819 645 702	2 458 937 106	849 725 610	2 549 176 830
819 645 720	2 458 937 160	854 971 026	2 564 913 078
819 702 456	2 459 107 368	854 971 260	2 564 913 780
819 702 546	2 459 107 638	854 972 601	2 564 917 803
819 724 560	2 459 173 680	854 972 610	2 564 917 830
819 725 460	2 459 176 380	856 012 497	2 568 037 491
820 194 657	2 460 583 971	856 024 971	2 568 074 913
820 196 457	2 460 589 371	856 102 497	2 568 307 491
821 946 570	2 465 839 710	856 124 970	2 568 374 910
821 964 570	2 465 893 710	856 249 701	2 568 749 103
824 560 197	2 473 680 591	856 249 710	2 568 749 130
824 561 970	2 473 685 910	856 470 129	2 569 410 387
825 460 197	2 476 380 591	856 470 291	2 569 410 873
825 461 970	2 476 385 910	856 471 029	2 569 413 087
845 970 162	2 537 910 486	856 471 290	2 569 413 870
845 970 216	2 537 910 648	856 472 901	2 569 418 703
845 971 602	2 537 914 806	856 472 910	2 569 418 730
845 971 620	2 537 914 860	856 490 127	2 569 470 381
845 972 016	2 537 916 480	856 490 271	2 569 470 813
846 015 972	2 538 047 916	856 491 027	2 569 473 081
846 021 597	2 538 064 791	856 491 270	2 569 473 810
846 159 702	2 538 479 106	856 492 701	2 569 478 103
846 201 597	2 538 604 791	856 492 710	2 569 478 130
846 215 970	2 538 647 910	859 647 012	2 578 941 036
849 657 012	2 548 971 036	859 647 021	2 578 941 063

1) Urmare la Nota dela pag. 77, Vol XLIV. « *Gazeta Matematică* ».

N_p	N	N_p	N
859 647 102	2 578 941 306	865 947 102	2 597 841 306
859 647 120	2 578 941 360	865 947 120	2 597 841 360
859 647 201	2 578 941 603	865 947 201	2 597 841 603
859 647 210	2 578 941 630	865 947 210	2 597 841 630
859 701 462	2 579 104 386	870 124 965	2 610 374 895
859 702 146	2 579 106 438	870 126 495	2 610 379 485
859 714 602	2 579 143 806	870 146 529	2 610 439 587
859 714 620	2 579 143 860	870 164 529	2 610 493 587
859 720 146	2 579 160 438	870 249 651	2 610 748 953
859 721 460	2 579 164 380	870 291 465	2 610 874 395
860 125 497	2 580 376 491	870 291 645	2 610 874 935
860 145 972	2 580 437 916	871 024 965	2 613 074 895
860 254 971	2 580 764 913	871 026 495	2 613 079 485
861 025 497	2 583 076 491	871 249 650	2 613 748 950
861 254 970	2 583 764 910	871 465 029	2 614 395 087
861 459 702	2 584 379 106	871 465 290	2 614 395 870
861 459 720	2 584 379 160	871 645 029	2 614 945 087
862 014 597	2 586 043 791	871 645 290	2 614 935 870
862 145 970	2 586 437 910	872 496 501	2 617 489 503
862 549 701	2 587 649 103	872 496 510	2 617 489 530
862 549 710	2 587 649 130	872 649 501	2 617 948 503
864 957 012	2 594 871 036	872 649 510	2 617 948 530
864 957 021	2 594 871 063	872 901 465	2 618 704 395
864 957 102	2 594 871 306	872 901 645	2 618 704 935
864 957 120	2 594 871 360	872 914 650	2 618 743 950
864 957 201	2 594 871 603	890 146 527	2 670 439 581
864 957 210	2 594 871 630	890 164 527	2 670 493 581
865 470 129	2 596 410 387	890 271 465	2 670 814 395
865 470 291	2 596 410 873	890 271 645	2 670 814 935
865 471 029	2 596 413 087	891 465 027	2 674 395 081
865 471 290	2 596 413 870	891 465 270	2 674 395 810
865 472 901	2 596 418 703	891 645 027	2 674 935 081
865 472 910	2 596 418 730	891 645 270	2 674 935 810
865 490 127	2 596 470 381	892 701 465	2 678 104 395
865 490 271	2 596 470 813	892 701 645	2 678 104 935
865 491 027	2 596 473 081	892 714 650	2 678 143 950
865 491 270	2 596 473 810	894 701 265	2 684 103 795
865 492 701	2 596 478 103	894 702 651	2 684 107 953
865 492 710	2 596 478 130	894 712 650	2 684 137 950
865 947 012	2 597 841 036	894 726 501	2 684 179 503
865 947 021	2 597 841 063	894 726 510	2 684 179 530

N_p	N	N_p	N
895 026 471	2 685 079 413	897 024 516	2 691 073 548
895 126 470	2 685 379 410	897 025 146	2 691 075 438
895 264 701	2 685 794 103	897 026 145	2 691 078 435
895 264 710	2 685 794 130	897 145 026	2 691 435 078
896 470 125	2 689 410 375	897 145 260	2 691 435 780
896 470 251	2 689 410 753	897 146 025	2 691 438 075
896 471 025	2 689 413 075	897 146 250	2 691 438 750
896 471 250	2 689 413 750	897 150 246	2 691 450 738
896 472 501	2 689 417 503	897 152 460	2 691 457 380
896 472 510	2 689 417 530	897 162 450	2 691 487 350
896 501 247	2 689 503 741	897 245 016	2 691 735 048
896 502 471	2 689 507 413	897 245 160	2 691 735 480
896 510 247	2 689 530 741	897 246 015	2 691 738 045
896 512 470	2 689 537 410	897 246 150	2 691 738 450
896 524 701	2 689 574 103	897 250 146	2 691 750 438
896 524 710	2 689 574 130	897 251 460	2 691 754 380
897 014 625	2 691 043 875	897 260 145	2 691 780 435
897 015 246	2 691 045 738	897 261 450	2 691 784 350
897 016 245	2 691 048 735		

G-L GH. BUICLIU.

8. *Asupra problemei 4385.*

O soluţie care necesită mai puţine calcule decât aceea dată G. M. — XLIII — 596 se obţine observând că relaţia constituitivă a problemei este echivalentă relaţiei

$$P^2(x) - P(x-1)\,P(x+1) = 2P(x)$$

care, datorită faptului că polinomul $P(x)$ este de gradul doi, precum şi în urma utilizării formulei lui TAYLOR, devine

$$\frac{1}{4}P''^2(x) + P(x)\,P''(x) - P'^2(x) + 2P(x) = 0$$

accentele însemnând operaţia derivării în raport cu x.

Admiţând că

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

deducem imediat

$$a = 1 \qquad 1 + 4c - b^2 = 0$$

şi deci

$$P(x) = x^2 + bx + \frac{b^2-1}{4}$$

care este soluţia problemei.

O extindere a problemei se obţine considerând relaţia

$$\{P(x) - k\}^2 = P(x-k)\,P(x+k) + k^2$$

din care, prin aceeaşi metodă, se deduce

$$P(x) = x^2 + bx + \frac{kb^2 - 1}{2(k+1)}$$

care pentru $k = 1$ dă cazul problemei 4385.

G. G. CONSTANTINESCU.

9. *Asupra transformării lui* BLASCHKE-GRÜNNWALD.

Transformarea lui BLASCHKE-GRÜNWALD reprezintă deplasările şi antideplasările (translaţie + simetrie) din *planul cinematic* E, prin puncte şi plane din spaţiu şi reciproc. Punctul de plecare al transformării constă în a asocia un bipunct din planul E, unei drepte din spaţiu, în felul următor: fie m, r_0, l_0 punctele de intersecţie ale dreptei D cu planul E şi cu planele R, L situate de o parte şi alta a planului E şi la distanţa unitate; se proiectează r_0, l_0 în r_1, l_1 pe planul E şi apoi segmentul r_1, l_1 se roteşte de $\frac{\pi}{2}$ în jurul lui m, în planul E, în r, l care e bipunctul reprezentativ al dreptei D. Transformând în acest fel tangentele unei curbe plane sau strâmbe (C), se obţin în planul E două curbe (r), (l), *transformatele curbei* (C).

Asupra transformării lui BLASCHKE-GRÜNWALD, D-l Prof. D. BARBILIAN a făcut un studiu vast şi aprofundat, punând-o în relaţie cu un subgrup proiectiv important, sub grupul quasiafin şi cu o geometrie a mişcării în planul E (vezi D. BARBILIAN. Curs de Geom. Mişcării. Anul IV, 1935 — 36). D-l D. BARBILIAN a demonstrat printre altele că o curbă plană se transformă în două curbe (r), (l) invers egale şi că o conică se transformă în două conice. Imi propun să dau acestor teoreme o demonstraţie elementară şi să indic o construcţie a centrelor conicelor transformate.

Fie M un punct al curbei (C), m proiecţia lui pe planul E; fie δ dreapta de intersecţie dintre E şi planul curbei, iar P, A piciorul perpendicularei scoborîte din M pe δ şi intersecţia lui δ cu tangenta la (C) în M; se duce prin A perpendiculară rl pe m A care se proiectează pe δ în $r'l'$. Să notăm

$$m\text{PM} = \varphi_0 \ ; \ m\text{AM} = \varphi \ ; \ \text{PAM} = \theta \ ; \ \text{PA}m = \alpha.$$

Din relaţiile:

$$\text{aria P}m\text{A} = \text{aria PMA} \cdot \cos\varphi_0$$

$$\text{PA} = \text{MA} \cdot \cos\theta = m\text{A} \cdot \cos\alpha$$

se deduce:

$$\cos\varphi \cdot \sin\alpha = \cos\varphi_0 \cdot \sin\theta$$

$$\cos\theta = \cos\varphi \cdot \cos\alpha$$

iar din aceste relaţii, deducem uşor:

$$\operatorname{cotg}\varphi_0 = \operatorname{cotg}\varphi \cdot \sin\alpha.$$

Avem mai departe

$$rl = 2 \operatorname{cotg}\varphi$$

$$p = r'l' = 2 \operatorname{cotg}\varphi \cdot \sin\alpha = 2 \operatorname{cotg}\varphi_0 = \text{constant.}$$

Curbele (r), (l) sunt invers egale, findcă un punct al curbei (r) poate fi adus în coincidenţă cu punctul corespunzător al curbei (l), printr'o antideplasare (o translaţie dealungul lui δ de mărime p, urmată de o simetrie în raport cu δ). Luând ca axă Ox pe δ fie x, y coordonatele punctului M; coordonatele punctelor r, l vor fi:

$$X = x + \frac{y}{y'} \pm \operatorname{cotg}\varphi_0 \ ; \ Y = \pm \operatorname{cotg}\varphi_0 \cdot \cos\alpha = \frac{\pm 1}{\sin\varphi_0 \cdot \operatorname{tg}\theta} = \frac{\mp 1}{\sin\varphi_0 \cdot y'} \cdot$$

Fie:

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

ecuaţia dreptei mA; se găseşte pentru coordonatele punctelor r, l;

$$x = \pm \operatorname{cotg}\varphi_0 \cdot \xi - \zeta \ , \ y = \pm \operatorname{cotg}\varphi_0 \cdot \eta \ , \ z = \xi$$

această corelaţie ne arată că *gradul curbei* (r) *este egal cu clasa curbei* (C); în particular deducem că o conică se transformă în două conice. Corelaţia precedentă face să corespundă dreptei dela

infinit $z = 0$, punctul dela infinit al dreptei δ, $\xi = 0$. Deci: *transformarea lui* BLASCHKE-GRÜNNWALD *face să corespundă unei conice* (C) *care taie planul cinematic după o dreaptă* δ, *două conice invers egale ale căror centre sunt transformatele diametrului conicei* (C), *conjugat cu* δ. Reciproc, corelația considerată transformă diametrul conicei (r) conjugat cu δ, în centrul conicei (C).

E. ARGHIRIADE.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ „REGELE CAROL II" BUCUREŞTI

Concursul de admitere în Ciclul I

I. GEOMETRIE ANALITICĂ

Axele fiind rectangulare, să se scrie ecuația unei iperbole (H) care satisface la următoarele condiții:

1°. axa Ox este asimptotă;

2°. cealaltă asimptotă trece prin punctul de coordonate $x = 1$, $y = 0$;

3°. dreapta $x = 2$ este tangentă la iperbolă în punctul de coordonate $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$.

Să se verifice că iperbola astfel determinată este tangentă la axa Oy. Să i se determine axele.

II. ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

1. Să se studieze variația funcțiunii:

$$y = \frac{x^2}{16} e^{\frac{x}{x-4}}$$

şi să se reprezinte grafic această variație.

2. Cineva vrea să construiască un rezervoriu metalic de capacitate dată $\frac{1}{3}\pi a^3$, şi de forma unui cilindru terminat la capete cu câte o emisferă. Cum trebue dimensionat acest rezervoriu (raportul dintre înălțimea cilindrului şi raza emisferelor), astfel încât prețul de cost să fie minim, știind că prețul unitar de suprafața construită este de două ori mai mare pentru emisfere decât pentru corpul cilindric al rezervoriului.

3. Să se discute natura rădăcinilor ecuației:

$$\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + \lambda = 0$$

când parametrul λ variază. Să se afle θ cu o eroare $< 1'$ în cazul $\lambda = 5$.
(Se va lua ca necunoscută $x = \cos\theta$).

III. GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

A) Probleme de geometrie plană și spațiu

1. Se consideră un unghiu $xOy = 45^0$; pe dreapta Ox se ia $OA = 1$, $OB = 3$, de aceeași parte a punctului O. Se cere:

a) Să se determine pe Ox un punct OM astfel ca

$$\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}.$$

b) Să se afle distanța OM.

c) Să se determine pe Oy un punct P, astfel ca

$$\frac{PA}{PB} = \frac{1}{3}.$$

2. Presupunând că unghiul xOy se rotește în jurul lui Ox, se cere să se afle unghiul solid astfel născut.

B) Probleme de geometrie descriptivă

Să se execute o epură de geometrie descriptivă în tuș, tratând următoarea problemă. Se dă:

a) un cilindru cu baza un cerc așezat în planul orizontal de proecție cu centrul în punctul Q (q, q') și de rază R', axa cilindrului e paralelă cu planul vertical de proecție și face unghiul α cu direcția xO;

b) un con cu baza un cerc așezat în planul orizontal de proecție determinat astfel: cercul de bază e tangent la linia de pământ Ox și la dreapta $q't$, dusă prin q' tangentă la cercul de bază al cilindrului definit mai sus (se va alege dintre cele 2 tangente ce se pot duce prin q' la cercul de bază al cilindrului, pe aceia care e înclinată de la dreapta spre stânga când privim epura); Cercul de bază al conului trece prin proecția orizontală C, a punctului C (c, c') în care axul cilindrului întâlnește planul orizontal de cotă h (se va alege soluția care dă cercul cel mai mic). Vârful S (s, s') al conului se află în același plan orizontal de cotă h și se proectează orizontal în centrul cercului de bază al cilindrului.

Se cere să se deseneze curba de intersecție dintre cilindru și con și tangenta la această curbă într'un punct de cotă k. Se va reprezenta ansamblul celor două epuri.

Date numerice în milimetri:

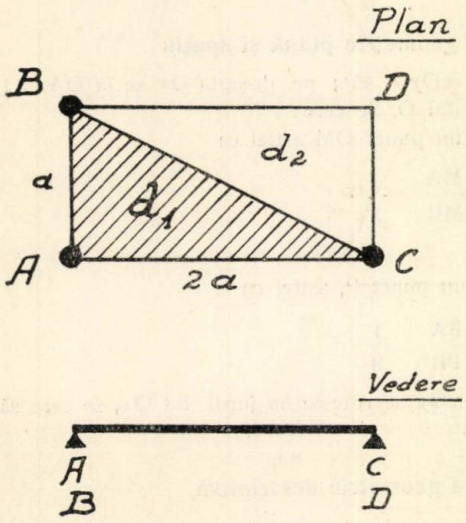
Q (270, 70,0) , R = 50 , $\alpha = 45^0$, $h = 130$, $k = 45$.

IV. MECANICĂ

Preparator. Septemvrie 1933

1. Se dă placa dreptunghiulară ABCD cu

$$\overline{AB} = \overline{DC} = a \quad \text{şi} \quad \overline{AC} = \overline{BD} = 2a.$$



Jumătate ABC din această placă este făcută dintr'un material de greutate specifică p_1, iar jumătatea BCD dintr'un material cu greutate specifică d_2.

Placa reazimă orizontal pe 3 reazeme simple A, B şi C. Se cer:

1) Condiţia ca placa să nu răstoarne în jurul axei $\overline{BC}$.

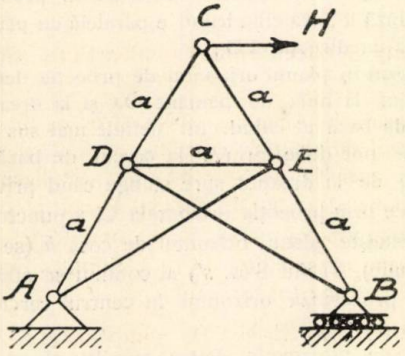
2) Găsind condiţia dela punctul 1) să se afle reacţiunile reazemelor A, B, C.

3) Să se găsească reacţiunile dela punctul 2) pentru $a = 1\text{m}$;

$d_1 = 7{,}8$ Kg/dm³ (fer) şi

$d_2 = 1$ Kg/dm³ (lemn).

2. Se dă sistemul articulat ABCDE, reazemul din A fiind articulaţie fixă, iar cel din B simplu (pe rulou), amândouă reazemele la acelaş nivel.



Sistemul este acţionat de forţa H orizontală, aplicată în C.

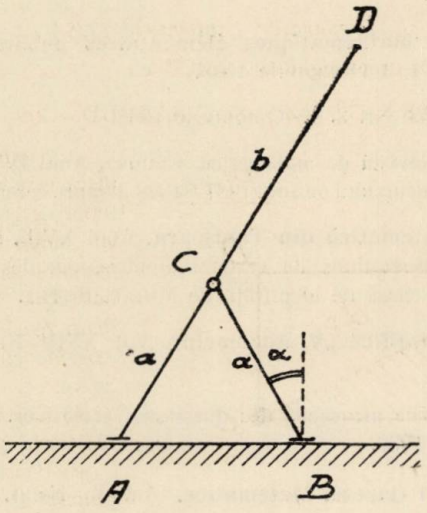
Să se găsească reacţiunile reazemelor şi eforturile în bara DE.

3. Se dă bara AD, omogenă, de greutate p Kg./m. care este rezemată în A pe un plan orizontal, cu frecare şi în C este articulată de bara CB.

$$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BE} = \overline{EC} = \overline{DE} = a$$

Această din urmă bară reazămă în B pe planul orizontal care trece prin A, cu frecare şi se consideră fără greutate.

Se dă AC = CB = a, CD = b. Coeficientul de frecare $f = \text{tg}\varphi$.



Se cere să se găsească:

a) poziţiile limită de echilibru ($\sphericalangle \alpha$) ale sistemului,

b) reacţiunile din A, B, C.

c) Să se discute cazurile $a = b$, $a > b$ şi $a < b$.

BIBLIOGRAFIE

American Mathematical Society Semicentennial publications. New York. 1938. Vol. I. Istoric.

Idem. Vol. II. Fifty years of algebra in America, 1888—1938, de T. E. BELL. Algebraic aspects of the theory of differential ecuations, de F. J. RITT. The historical background of harmonic analysis, de NORBERT WIENER. Recent developements in the calculus of variations, de J. E. MC. SHANE. Recent trends in geometry, de Y. THOMAS. The sphere in topology, de L. R. WILDER. Dirichlet problems, de C. G. EVANS. Hydrodynamical stability, de L. J. SYNGE. Fifty years of American mathematics, de D. G. BIRKHOFF.

Boletin Matematico. Buenos Aires. An. XI. Nr. 11. August 1938.

Idem. An. XI. Nr. 12. August 1938. Buenos Aires.

Buletinul „I. R. E." Bucureşti. Anul VI. Nr. 3. Septemvrie 1938.

Buletinul Institutului Român pentru Betoane, Construcţii şi Drumuri. Bucureşti. Anul III. Nr. 4—6. Aprilie-Iunie 1938.

Buletinul Societăţii Politecnice din România. Anul LII. Nr. 7. Iulie 1938. Bucureşti.

Journal de Mathématiques élémentaires publicat de H. VUIBERT. Paris. An. 63. Nr. 1. 1 Octomvrie 1938.

Idem. An. 63. Nr. 2. 15 Octomvrie 1938.

Pitagora. Revistă de matematici. Craiova. Anul IV. Nr. 1. 1 Octomvrie 1938. Rezultatul concursului pe anul 1937—1938. Despre cercul lui EULER de N. M.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVIII. Nr. 8. 15 Octomvrie 1938. Sur la représentations de certains nombres par des sommes de carrés, de A. GLODEN. O clasă de identităţi, de MIHAIL BOTEZ.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXIV. Nr. 2—3. Iaşi. Aprilie-Octomvrie 1938.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. Bruxelles. An. VIII. Nr. 11. Noemvrie 1938.

Suplimentul Gazetei Matematice. An. V. Nr. 1. 1 Octomvrie 1938. Exerciţii rezolvate şi propuse.

Idem. An. V. Nr. 2. 1 Noemvrie 1938. Bucureşti.

Ştiinţă şi Progres. Revista ştiinţifică a liceelor militare. Anul V. Nr. 1—2. Septemvrie-Octomvrie 1938. Tg.-Mureş.

The mathematical gazette. London. Vol. XXII. Nr. 251. Octomvrie 1938.

ING. CRISTEA MATEESCU. *Contribuţie la rezolvarea sistemelor hiperstatice.* (Extras din Buletinul Societăţii Politecnice. 1935).

CRISTEA MATEESCO. *Profils longitudinaux d'égale visibilité dans la construction des salles de spectacle.* (Extras din Bull. de Mathématiques et de Physique. 1935).

CRISTEA MATEESCO. *Calcul des plaques élastiques rectangulaires simplement appuyées sur le pourtour et soumises à la flexion par un moment le long d'un côté.* (Extras din Bull. de Mathématiques et de Physique. 1936).

CRISTEA MATEESCO. *Equilibre d'une membrane au pourtour rectangulaire, soumise à une charge variant suivant la loi des pressions hydrostatiques.* (Extras din Bull. de Mathématiques et de Physique. 1937).

CRISTEA MATESCU. *Thèses* présentées à l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" de Bucarest, pour obtenir le grade de docteur-ingénieur. Iunie 1938. Bucureşti.

1°. *La résolution des systèmes hyperstatiques par deux méthodes récentes. (Critique et extension des méthodes* FILIPESCO *et* CROSS).

2°. *L'état actuel du calcul des constructions à la pression du vent.*

J. BARRAL SOUTO. *Seguros de vida a capital variable.* Buenos Aires. 1938.

CERERI

281. Unde se poate găsi broşura:

„Das STEREOMETER, priviligirtes Körper-Messinstrument von IOHANN RITTER von PUSCARIU. Ingenieur. Budapesta 1877. Kocsi-Sandor.

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

La Théorie de la Rélativité restreint et généralisée de A. EINSTEIN. Paris. 1921.

Donată de D-l CPT. COMANDOR I. LINTEŞ.

CRISTOFORO ALASIA. Un sistema di equazioni indeterminate. 1916.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

D. N. RANUCCI. Risoluzione dell'equazione $x^n - Ay^n = \pm 1$, con una nuova dimonstrazione dell'ultimo teorema di FERMAT. Roma. 1911.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

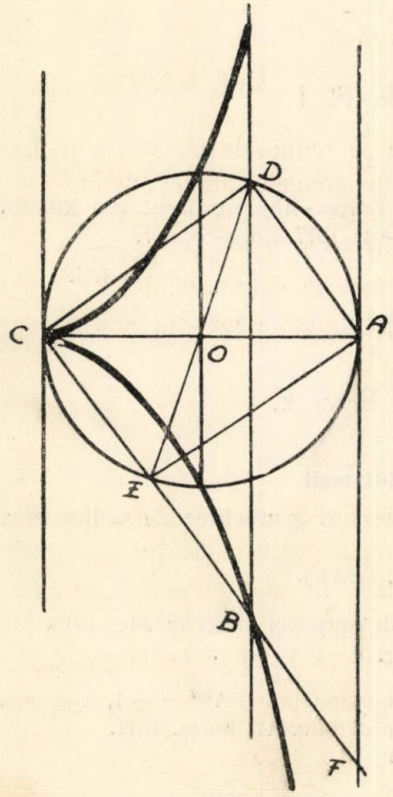
PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3675. *Se dă trapezul ortodiagonal* ABCD *în care* BC *şi* AD *sunt paralele, iar* $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^0$. *Presupunând că extremităţile* A *şi* C *ale diagonalei* AC *sunt fixe, se cere să se găsească locul geometric al vârfului* B.

M. NICOLAU.

Fie O mijlocul lui CA, E şi F intersecţiile lui CB cu cercul de diametru CA şi cu tangenta în A la acest cerc.

Figura CDAE este dreptunghiu, iar ADBF este paralelogram prin construcţie.



Rezultă că:

$$CE = DA = BF$$

de unde

$$CB = EF$$

ceea ce arată că punctul B descrie *cisoida lui* DIOCLES, conform definiţiei geometrice a acestei curbe.

Notă. Dacă se iau ca axe de coordonate CA şi perpendiculara în C pe CA, se găseşte că B descrie curba de ecuaţie

$$(\alpha) \qquad y^2(2a - x) = x^3$$

care este tocmai *cisoida lui* DIOCLES. In adevăr, λ fiind un parametru variabil, iar $2a$ fiind lungimea CA, ecuaţiile dreptelor CD, CB şi a cercului O sunt:

$$(1) \qquad y = \lambda x$$

$$(2) \qquad y = -\frac{1}{\lambda} x$$

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Eliminând pe y între (1) şi (3) se găseşte că DB are ecuaţia

$$(4) \qquad x = \frac{2a}{1 + \lambda^2}.$$

Se elimină λ între (2) şi (4) şi se găseşte cu B descrie *cisoida lui* DIOCLES.

Au rezolvat problema pe această cale a geometriei analitice stabilind exact ecuaţia (α) D-nii: I. BOGZA, E. M. CAŢICHI, GH. GH. CONSTANTINESCU, C. I. GHIŞOIU, C. I. ISTINIE-BREZUICA, I. V. MARTEŞ, L. M. A. NEGREA, GH. PANAITE, A. PĂRVU, I. C. SAVIN, GH. C. SPRINCEANĂ, I. C. VASILIU şi C. A. ZITTI.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4068. *Se spune că un automobil, mergând repede pe o şosea, poate să sară peste un şanţ, ce ar traversa şoseaua, fără să sufere nici un fel de sdruncinătură, în anumite condiţiuni.*

Cari sunt acele condiţiuni?

Să se dea şi o aplicaţie numerică.

CPT. I. LINTEŞ.

1. Presupunem că automobilul se reduce la un singur punct material ce s'ar afla în centrul său de greutate, atunci automobilul ar putea să sară peste un şanţ, care ar traversa şoseaua, dacă extremităţile şoselei, determinate de şanţ, ar fi tangente la traectoria balistică descrisă de centrul de greutate al automobilului.

Dacă neglijem rezistenţa aerului, atunci traectoria balistică se reduce la cunoscuta parabolă din vid:

$$1) \qquad y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2\alpha}$$

unde origina acelor coordonate este într'o muchie a şanţului, iar v este viteza automobilului când începe să sară şanţul şi α este unghiul ce îl face tangenta la şosea în marginea din origină (marginea iniţială a şanţului).

Unghiul pe care ar trebui să-l facă tangenta la şosea în marginea finală este:

$$2) \qquad \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx_1}{v^2 \cos^2\alpha} = \frac{y_1}{x_1} - \frac{gx_1}{2v^2 \cos^2\alpha}$$

unde x_1 şi y_1 sunt coordonatele marginei finale. Acest unghiu se deduce lesne derivînd pe y din 1) în raport de x şi înlocuind coordonatele finale.

2. In cazul real însă, automobilul se sprijină pe şosea cu roţile din faţă şi cele din spate, în consecinţă, de îndată ce roţile din faţă depăşesc marginea iniţială a şanţului, atunci — ele nemai având sprijin — cad în jos, producând o mişcare de rotaţie a automobilului, în jurul roţilor din spate. Prin urmare centrul de greutate deviază puţin.

In adevăr, dacă w este viteza verticală de cădere a centrului de greutate, de când primele roţi depăşesc marginea şanţului, atunci devierea traectoriei va fi datorită variaţiunilor:

$$dv = -w\sin\alpha \quad \text{şi} \quad d\alpha = -\frac{w\cos\alpha}{v}.$$

Şi în acest caz traectoria devine:

$$3) \quad y = x\,\mathrm{tg}\,(\alpha - d\alpha) - \frac{gx^2}{2\,(v - dv)^2\cos^2(\alpha - d\alpha)}.$$

Viteza de cădere w a centrului de greutate se deduce din egalarea spaţiului $w\,.\,\theta$, unde θ este timpul scurs dela trecerea roţilor din faţă peste marginea şanţului, până la trecerea roţilor din spate, cu spaţiul de cădere în vid $\frac{1}{2}g\theta^2$. Dar dacă d este depărtarea între roţile din faţă şi roţile din spate, atunci

$$\theta = \frac{l}{v}.$$

Prin urmare:

$$4) \quad w = \tfrac{1}{2}g\frac{l}{v}.$$

3. Dacă — în sfârşit — ţinem seamă şi de suspensiunea elastică (arcuri), precum şi de efectul pneumaticelor, atunci marginea a doua a şanţului trebue să fie scoborîtă cu o cantitate egală cu săgeata maximă de turtire a suspensiunei elastice şi pneumaticelor.

Aplicaţie numerică.

Fie $v = 30$ m/sec. (108 km/oră)

$l = 3$ m.

$\alpha = 5^0$.

In primul caz avem:

$$y = 0{,}0875\,.\,x - 0{,}0055\,.\,x^2 = 0{,}0055\,.\,x\,.\,(15{,}909 - x).$$

Şi în consecinţă lărgimea şanţului fiind x, extremităţile şoselei vor fi tangente la parabola obţinută în $x = 0$ şi $x = x$.

In cazul al doilea, avem:

$w = 0{,}4903$ m/sec.

$dv = -0{,}0428$ m/sec.

$d\alpha = -0^0\,55'\,59'',\,52.$

Deci traectoria va fi:

$$y = 0{,}0055 \,.\, x \,.\, (15{,}836 - x).$$

In cazul al treilea, dacă săgeata suspensiunei elastice şi a pneumaticelor ar fi 0,10 m, atunci avem:

$$y = 0{,}0055 \,.\, x \,.\, (15{,}836 - x) - 0{,}10.$$

CPT. COMANDOR I. LINTEŞ.

PROBLEMA 4093. *Dacă* p *este un număr prim, iar* A, m *şi* n *numere întregi ce satisfac condiţiunile:*

$$(m+1)\, n = \mathcal{M}.(p-1) \quad \text{şi} \quad A^n - 1 \not\equiv \mathcal{M}.p$$

să se arate că totdeauna avem:

$$A + A^{n+1} + A^{2n+1} + A^{3n+1} + \ldots + A^{mn+1} = \mathcal{M}.p.$$

CPT. COMANDOR GR. ZAPAN.

Să rezolvăm următoarea problemă mai generală:

Dacă x *este un număr întreg oarecare, iar* A, m *şi* n *numere întregi cari satisfac condiţiunile:*

$$(m+1)\, n = \mathcal{M}.\varphi(x) \quad \text{şi} \quad A^n - 1 \not\equiv \mathcal{M}.x$$

$\varphi(x)$ *fiind numărul numerelor prime cu* x *şi mai mici decât el, să se arate că totdeauna avem:*

$$A + A^{n+1} + A^{2n+1} + A^{3n+1} + \ldots + A^{mn+1} = \mathcal{M}.x.$$

Expresiunea dată este o progresie geometrică. Putem deci scrie:

$$A + A^{n+1} + A^{2n+1} + \ldots + A^{mn+1} = A \,.\, \frac{A^{(m+1)n} - 1}{A^n - 1}$$

de unde se vede că dacă $A = \mathcal{M}.x$, expresiunea dată este $\mathcal{M}.x$. Dacă însă $A \not\equiv \mathcal{M}.x$, cum $(m+1)\, n = \mathcal{M}.\varphi(x)$, avem conform teoremei lui FERMAT generalizată de EULER:

$$A^{(m+1)n} - 1 = A^{\mathcal{M}.\varphi(x)} - 1 = \mathcal{M}.x.$$

CPT. COMANDOR GR. ZAPAN.

Notă. Au rezolvat problema D-nii: N. ALDEA, I. CURCHI, H. IONESCU-BIS, M. MĂNESCU, D. MAVRODIN, N. MIHĂILEANU, MIRCEA-LEONTEA NEGREA, I. PAREPEANU, N. PATRAULEA, CRISTEA ŞTEFĂNESCU şi PETRU M. VARLAM.

PROBLEMA 4298. *Dintre toate triunghiurile având unghiurile* A, B *şi* C *aceleaşi, iar una din laturi egală cu unul din sinusurile unghiurilor date, care este acela de arie maximă?*

GH. NICULESCU.

Pentru a construi triunghiurile învederate de problemă ne vom folosi de un triunghiu ajutător de unghiuri date: $A > B > C$ şi în care, ca urmare, vom avea:

$$\sin A > \sin B > \sin C \quad ; \quad a > b > c \quad ; \quad h_c > h_b > h_a \qquad (1)$$

fie că unghiurile sunt toate ascuţite, fie că numai două.

Să luăm lungimile: sinA, sinB, sinC la aceeaşi scară şi cu ele să ducem paralele la fiecare din laturile triunghiului ajutător şi mărginite la perimetrul acestuia. Vom obţine toate triunghiurile prevăzute în problemă, în număr de 9, dintre cari 3 sunt egale între ele. Paralela de cea mai mare lungime fiind $\sin A = m$, triunghiul de arie maximă va fi căutat printre cele 3 triunghiuri de aceeaşi bază: $\sin A = m$ şi de vârfuri respectiv vârfurile A, B, C, ale triunghiului ajutător. Ori este uşor de văzut că triunghiul (m, C), având baza m şi pe C ca vârf are cea mai mare arie. Într'adevăr înălţimile celor 3 triunghiuri sunt direct proporţionale cu ale triunghiului ABC, cari sunt în ordinea de mărime arătată în (1). Problema propusă se poate deci reduce la următoarea:

Dacă la fiecare din laturile unui triunghiu ABC *ducem o paralelă de aceeaşi lungime* m *obţinem trei triunghiuri dintre cari aria cea mai mare o are acela care la vârful ce coincide cu al triunghiului dat are unghiul cel mai mic.*

Din asemănarea triunghiurilor ABC şi (m, C) găsim:

$$\text{aria } (m, C) = \frac{m^2}{c^2} S = \frac{\sin^2 A}{c^2} S = \frac{\sin^3 A \sin B}{2 \sin C} .$$

Maximul ariei (m, C) are loc odată cu maximul numărătorului şi minimul numitorului ultimei egalităţi, căci sinusurile au numai valori pozitive. In mod simplu şi direct se vede că acest maxim are loc pentru triunghiul dreptunghic în care:

$$A = 90^0 \quad ; \quad B = 89^0 59' 59'' \quad ; \quad C = 1''$$

admiţând că cel mai mic unghiu e cel de o secundă, iar valoarea este:

$$\text{max. ariei } (m, C) = \frac{\sin 89^0\, 59'\, 59''}{2 \sin 1''} .$$

Putem căuta şi maxime relative, cum am căuta, spre exemplu, printre triunghiurile înscrise într'un semicerc de diametru 2R, pe acela care face maximă aria (m, C) şi găsim:

$$\text{max. aria } (m, C) \cong R \times 1.$$

Soluţie trigonometrică dată de Domnul MIRCEA SC. NICHIFOR:

Să considerăm un triunghiu de unghiuri date: $A > B > C$. Suprafaţa este:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}.$$

Suprafeţele triunghiurilor din problemă se obţin dând pe rând valorile:

sinA, sinB, sinC pe rând lui a, b şi c şi obţinem:

$$a = \sin A \ , \quad S_1 = \frac{\sin A \sin B \sin C}{2};$$

$$a = \sin B \ , \quad S_1' = \frac{\sin^3 B \sin C}{2};$$

$$a = \sin C \ , \quad S_1'' = \frac{\sin B \sin^3 C}{2};$$

$$b = \sin A \ , \quad S_2 = \ldots \ ; \quad c = \sin A \ , \quad S_3 = \ldots$$

$$b = \sin B \ , \quad S_2' = \ldots \ ; \quad c = \sin B \ , \quad S_3' = \ldots$$

$$b = \sin C \ , \quad S_2'' = \ldots \ ; \quad c = \sin C \ , \quad S_3'' = \ldots$$

Rapoartele: $S_1 : S_1' : S_1'' = \sin^2 A : \sin^2 B : \sin^2 C$ ne arată că:

$$S_1 > S_1' > S_1''.$$

Analog obţinem:

$$S_2 > S_2' > S_2'' \quad \text{şi} \quad S_3 > S_3' > S_3'';$$

în fine rapoartele:

$S_3 : S_2 : S_1$ ne arată că $S_3 > S_2 > S_1$, adică:

Dintre toate triunghiurile având unghiurile aceleaşi, iar una din laturi egală cu sinusul unuia din unghiuri, acel triunghiu este de arie maximă, care are latura cea mai mică egală cu sinusul unghiului celui mai mare.

Acest rezultat este, evident, echivalent cu cel dat mai sus, ambele având darul de a reduce problema la următoarea construcţie elementară:

Se dă un triunghiu ABC în care $a > b > c$. Latura $AB = c$ (cea mai mică) se prelungeşte până în B′ astfel să avem $AB' = BC$. Din B′ se duce la BC o paralelă care întâlneşte prelungirea lui AC în C′. Triunghiul AB′C′ e cel cerut de problemă, de arie maximă, ţinând seamă că la o scară oarecare am luat $BC = \sin A$.

Observaţiune. Dacă la fiecare latură a unui triunghiu ducem câte-o paralelă egală respectiv (la o scară anumită) cu sinusul unghiului opus obţinem cele 3 triunghiuri egale de care s'a vorbit la începutul soluţiei.

Elevii plutonier major CEAUŞESCU VASILE şi plutonier NEGOIŢĂ CONST. (Lic. mil. Iaşi) tratând problema tot trigonometric s'au pus în cazul particular de mai sus şi au obţinut pentru cele 3 triunghiuri aceeaşi suprafaţă:

$$\sin A \sin B \sin C : 2$$

şi cum problema cere o arie maximă au afirmat că: $\sin A \sin B \sin C = \text{const.}$ pentrucă A, B şi C păstrează mereu aceeaşi valoare. In concluzie aria e maximă când $\sin A = \sin B = \sin C$, deci când: $A = B = C = 60^0$, adică pentru un triunghiu echilateral. Concluzia este exactă pentru cazul particular, dar erorile prin cari au ajuns la ea sunt:

a) Dacă A, B şi C păstrea ă mereu aceeaşi valoare la fel aceeaşi valoare va păstra şi produsul $\sin A \sin B \sin C$ şi atunci nu mai e cazul ca să mai căutăm un maxim;

b) Suma $\sin A + \sin B + \sin C$ se verifică cu uşurinţă că este variabilă dacă A, B şi C sunt unghiurile unui triunghiu Intr'adevăr pentru $A = B = C = 60^0$ suma este: $3\sqrt{3}/2$, iar pentru $A = 90^0$, $B = 45^0$, $C = 45^0$ suma e: $1 + \sqrt{2}$.

Vom ajunge la rezultat în felul următor:

$$S_1 \frac{\sin A \sin B \sin C}{2} = \frac{\sin A \sin B \sin (A+B)}{2} = \frac{\sin^2 A \sin 2B + \sin^2 B \sin 2A}{4}.$$

Trebuie să avem $A < 90^0$, $B < 90^0$ căci altfel unul din termenii sumei devine negativ Observăm că dacă înlocuim pe A cu B şi pe B cu A, expresiunea nu se schimbă ceea ce revine a căuta maximul lui

$$\frac{\sin^2 A \sin 2A}{2} = \sin^3 A \cos A.$$

Ecuaţia derivată — pentru $A < 90^0$ — ne dă $A = 60^0$, adică maximul are loc pentru un triunghiu echilateral, iar valoarea maximului este: $3\sqrt{3}/16$.

Soluţii bune dela Domnii: AVRAM N. C. (Sublocotenent) şi MIRCEA LEONTE NEGREA.

PROBLEMA 4410. *Se consideră ecuația:*

$$x^2+\alpha x+1=0, \tag{1}$$

și se notează cu: $P_n=x_1^n+x_2^n$, x_1 *și* x_2 *fiind rădăcinile ecuației (1).*

1. *Să se studieze natura rădăcinilor acestei ecuații.*

2. *Folosind faptul că* x_1 *și* x_2 *sunt rădăcinile ecuației (1), să se arate că avem*

$$P_{n+1}+\alpha P_n+P_{n-1}=0. \tag{2}$$

3. *Să se calculeze cu ajutorul relației (2) expresia:*

$$E=P_4+aP_3+bP_2+cP_1+dP_0.$$

4. *Presupunând că:* $4a=c$ *și* $d=b-\frac{1}{2}$, *să se găsească valorile lui* α *pentru care* $E=0$.

5. *Să se demonstreze formula*

$$P_0+P_1+P_2+\ldots+P_n=1-\frac{\alpha+1}{\alpha+2}P_{n+1}-\frac{1}{\alpha+2}P_{n+2}.$$

Ce devine această formulă pentru $\alpha=-2$?

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluție dată de D-nii: MIRCEA A. NEGREA-LEONTE, IANCU N. SAGER, IOAN I. BUZINCU, VASILE CEAUȘESCU, MIHAIL M. CHIRIȚĂ, VILHELM CSEKE și GRIGORE MARTEȘ.

1. Realizantul ecuației fiind α^2-4 ecuația va avea rădăcini când $\alpha\geqslant 2$ sau $\alpha\leqslant 2$. Când $\alpha=\pm 2$ ecuația admite o rădăcină dublă egală respectiv cu ∓ 1. Mai mult, cum suma rădăcinilor este egală cu $-\alpha$, iar produsul este egal întotdeauna cu 1, dacă $\alpha>2$ ecuația va admite două rădăcini negative, iar când $\alpha<2$ ecuația va admite două rădăcini pozitive.

2. x_1 și x_2 fiind rădăcini ale ecuației (1) va trebui să avem

$$x_1^2+\alpha x_1+1=0 \quad \text{și} \quad x_2^2+\alpha x_2+1=0$$

relații care înmulțite respectiv cu x_1^n și x_2^n și apoi adunate ne dau

$$(x_1^{n+2}+x_2^{n+2})+\alpha(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})+(x_1^n+x_2^n)=0,$$

care în baza notațiilor făcute nu este alta decât relația (2).

3. Cum:

$$P_0 = x_1^0 + x_2^0 = 2 \quad , \quad P_1 = x_1 + x_2 = -\alpha,$$

avem succesiv

$$P_2 = -\alpha P_1 - P_0 = \alpha^2 - 2,$$

$$P_3 = -\alpha P_2 - P_1 = -\alpha^3 + 3\alpha,$$

$$P_4 = -\alpha P_3 - P_2 = \alpha^4 - 4\alpha^2 + 2,$$

aşa încât

$$E = \alpha^4 - a\alpha^3 + (b-4)\alpha^2 - (c-3a)\alpha + 2(d-b+1).$$

4. Ţinând seamă de condiţiile din enunţ, ecuaţia care ne va da pe α va fi

$$\alpha^4 - a\alpha^3 + (b-4)\alpha^2 - a\alpha + 1 = 0$$

care este o ecuaţie reciprocă. Pentru a o rezolva vom nota ca de obiceiu

$$(3) \quad \alpha + \frac{1}{\alpha} = \beta, \quad \text{de unde} \quad \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \beta^2 - 2.$$

Ecuaţia care ne va da pe β va fi

$$\beta^2 - a\beta + b - 6 = 0,$$

care are drept rădăcini

$$(4) \qquad \beta = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 24}}{2}.$$

Pe de altă parte din (3) scoatem că valorile lui α sunt date de ecuaţiile

$$\alpha^2 - \beta\alpha + 1 = 0,$$

β având una din valorile (4). Avem deci

$$\alpha = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4}}{2},$$

sau încă, după ce am făcut toate calculele,

$$\alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 24} \pm \sqrt{2a^2 - 4b + 8 \pm 2a\sqrt{a^2 - 4b + 24}}}{4}$$

semnele din faţa radicalului $\sqrt{a^2 - 4b + 24}$ corespunzându-se. Se găsesc astfel pentru α patru valori.

5. Făcând în relaţia (2) pe n egal respectiv cu $0,1,\ldots,n$ găsim $n+1$ relaţii care adunate parte cu parte ne dau

$$(P_2+P_3+\ldots+P_{n+2})+\alpha(P_1+P_2+\ldots+P_{n+1})+(P_0+P_1+\ldots+P_n)=0,$$

sau, notând cu S suma din prima parte a relaţiei ce urmează să demonstrăm,

$$(S-P_0-P_1+P_{n+1}+P_{n+2})+\alpha(S-P_0+P_{n+1})+S=0,$$

sau

$$(\alpha+2)S-(\alpha P_0+P_1+P_0)+(\alpha+1)P_{n+1}+P_{n+2}=0,$$

şi cum:

$$P_0=2 \text{ şi } P_1=-\alpha, \text{ dacă } \alpha\neq -2$$

scoatem de aci că

$$S=1-\frac{\alpha+1}{\alpha+2}P_{n+1}-\frac{1}{\alpha+2}P_{n+2}.$$

Dacă $\alpha=-2$, atunci $x_1=x_2=1$ şi deci $P_n=2$ oricare ar fi n. Rezultă că

$$S=2(n+1),$$

deoarece suma S are $n+1$ termeni.

Observaţie. S'au mai primit soluţii şi dela D-ra GEORGETA ROMAŞCAN şi dela D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU, A. ARŞAVSCHI, C. CHIRIAC, C. N. GAVRILESCU, D. MAVRODIN, P. C. MAZILU, O. C. PETRESCU, TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI, DORIN N. THEODORESCU, AL. D. STOICA şi T. STOICESCU.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4529. *Să se rezolve sistemul:*

$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)=a_1$$
$$(x_2+x_3)(x_3+x_4)=a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x_{n-1}+x_n)(x_n+x_1)=a_{n-1}$$
$$(x_n+x_1)(x_1+x_2)=a_n.$$

CHIRIŢĂ MIHAIL.

Facem substituțiile:

(1) $x_1 + x_2 = X_1$, $x_2 + x_3 = X_2, \ldots$

$$x_{n-1} + x_n = X_{n-1}, \; x_n + x_1 = X_n.$$

Sistemul devine:

(2) $X_1X_2 = a_1$, $X_2X_3 = a_2 \ldots X_{n-1}X_n = a_{n-1}$, $X_nX_1 = a_n$.

Vom considera două cazuri:

$$n = 2m \quad \text{și} \quad n = 2m + 1.$$

1°. $n = 2m$. Considerăm sistemul (2). Din prima ecuație scoatem:

$$X_2 = a_1 . \frac{1}{X_1} .$$

Introducând această valoare în ecuația a doua, găsim:

$$X_3 = \frac{a_2}{a_1} X_1 .$$

Introducând valoarea lui X_3 în ecuația a treia,

$$X_4 = \frac{a_1 a_3}{a_2} . \frac{1}{X_1} .$$

Repetăm operația precedentă, și din penultima ecuație,

$$X_{2m} = \frac{a_1 . a_3 \ldots a_{2m-1}}{a_2 . a_4 \ldots a_{2m-2}} . \frac{1}{X_1}$$

și cum, din ultima ecuație

$$X_{2m} = a_{2m} \frac{1}{X_1}$$

egalând cele două valori ale lui X_{2m}, obținem condiția

$$\boxed{a_1 a_3 \ldots a_{2m-1} = a_2 a_4 \ldots a_{2m}} .$$

Presupunând condiția împlinită, avem X_2, $X_3 \ldots X_{2m}$ exprimați în funcție de X_1.

Să revenim la sistemul (1) și să extragem din prima ecuație valoarea lui x_2.

$$x_2 = X_1 - x_1,$$

valoare care introdusă în ecuația a doua dă:

$$x_3 = X_2 - X_1 + x_1.$$

Să introducem și valoarea lui x_3 în ecuația a treia,

$$x_4 = X_3 - X_2 + X_1 - x_1 \quad \text{etc.}$$

până când din penultima ecuație,

$$x_{2m} = X_{2m-1} - X_{2m-2} + \ldots - X_2 + X_1 - x_1,$$

iar din ultima ecuație

$$x_{2m} = X_{2m} - x_1.$$

Egalând cele două valori ale lui x_{2m}, rezultă

$$X_1 + X_3 + \ldots + X_{2m-1} = X_2 + X_4 + \ldots + X_{2m}.$$

Să înlocuim $X_2, X_3 \ldots X_{2m}$ prin valorile lor exprimate în funcție de X_1. Se găsește:

$$X_1^2\left(1 + \frac{a_2}{a_1} + \ldots + \frac{a_2\, a_4 \ldots a_{2m-2}}{a_1\, a_3 \ldots a_{2m-3}}\right) = a_1 + \frac{a_1 a_3}{a_2} + \ldots + \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2m-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2m-2}}.$$

Din această ecuație se obțin două valori pentru X_1, cu care calculăm prin formulele date mai sus pe X_2, $X_3 \ldots X_{2m}$ și cu acestea, pe x_2, $x_3 \ldots x_{2m}$ în funcție de x_1.

In rezumat, *dacă, $n = 2m$, sistemul este compatibil când*

$$a_1 a_3 \ldots a_{2m-1} = a_2 a_4 \ldots a_{2m},$$

obținându-se câte două valori pentru $x_2, x_3 \ldots x_n$ în funcție de x_1.

2^0. $n = 2m + 1$. Analog,

$$X_2 = a_1 \frac{1}{X_1}, \quad X_3 = \frac{a_2}{a_1} X_1, \quad X_4 = \frac{a_1 a_3}{a_2} \cdot \frac{1}{X_1} \ldots$$

iar din penultima ecuaţie,

$$X_{2m+1} = \frac{a_2 \cdot a_4 \ldots a_{2m}}{a_1 a_3 \ldots a_{2m-1}} X_1$$

pe când ultima ecuaţie dă :

$$X_{2m+1} = a_{2m+1} \frac{1}{X_1} .$$

Egalând cele două valori ale lui X_{2m+1}, avem o ecuaţiune de gradul II în X_1, *de unde*

$$X_1 = \pm \sqrt{\frac{a_1 a_3 \ldots a_{2m+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2m}}}$$

şi cu formulele scrise se deduc duble valori pentru $X_2, X_3 \ldots X_{2m+1}$.

Cum s'a procedat pentru n par, trecem la sistemul (1) şi extragem

$x_2 = X_1 - x_1$, $x_3 = X_2 - X_1 + x_1$, $x_4 = X_3 - X_2 + X_1 - x_1$, etc.,

iar din penultima ecuaţie,

$$x_{2m+1} = X_{2m} - X_{2m-1} + \ldots - X_1 + x_1$$

şi cum din ultima

$$x_{2m+1} = X_{2m+1} - x_1 ,$$

deducem :

$$x_1 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2 + X_3 - \ldots + X_{2m+1}) ,$$

deci două valori pentru x_1, pe care înlocuindu-le împreună cu valorile lui $X_1, X_2 \ldots X_{2m+1}$ în egalităţile ce dau pe $x_2, x_3 \ldots x_{2m+1}$, găsim şi pentru aceste necunoscute câte două valori.

Rezumând, *în cazul* $n = 2m + 1$ *avem oricare ar fi* $a_1, a_2 \ldots a_n$ *câte două valori pentru* $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Observare. La această problemă s'au primit două soluţii, a D-lui DIMITRIE MAVRODIN (student) şi a D-lui PANAIT MAZILU (elev inginer).

Soluţia D-lui DIMITRIE MAVRODIN foarte bună şi cu pricepere condusă, omite să observe că pentru cazul $n = 2m$, X_1 se poate determina. D-sa consideră pentru acest caz două condiţii şi doi parametrii x_1 şi X_1.

D-l PANAIT MAZILU observând că pentru $n = 2m$ sistemul este nedeterminat, nu mai studiază acest caz ; iar pentru rezolvarea sistemului în cazul $n = 2m + 1$ utilizează o altă cale, pe care o apreciem obositoare.

C. I. B.

PROBLEMA 4676 şi 4844. *Se cere un patrat de cinci cifre astfel ca numerile formate din primele sale 2 cifre şi cel format din ultima cifră să fie patrate perfecte ale căror rădăcini multiplicate să ne dea numărul format din cifra a treia şi a patra din patratul căutat.*

GH. VASILIU.

Fie

$$N = 1000a^2 + 10ab + b^2$$

forma patratului căutat de cinci cifre unde conform enunţului trebue ca:

$$a \leqslant 9, \quad \text{iar} \quad b \leqslant 3.$$

Patratul căutat fiind mai mare decât $900a^2$ urmează că putem scrie:

(1) $$N = 1000a^2 + 10ab + b^2 = (30a + m)^2$$

unde, deoarece $a \leqslant q$ şi $b \leqslant 3$, m trebue să fie < 16.

Din (1) deducem că:

dacă $b = 0$, m se termină cu 0

„ $b = 1$, m „ „ „ 1 sau 9

„ $b = 2$, m „ „ „ 2 sau 8

„ $b = 3$, m „ „ „ 3 sau 7

deci m este de una din formele $10k \pm b$, unde $k = 0,1$.

Să studiem cazul $m = 10k + b$.

Pentru $k = 0$, avem $m = b$, deci (1) devine:

$$100a^2 = 50ab$$

care dă:

fie $a = 0$ aceasta corespunzând soluţiunilor formale:

pentru $b = 0 \ldots N = 00000$

„ $b = 1 \ldots N = 00001$

„ $b = 2 \ldots N = 00004$

„ $b = 3 \ldots N = 00009$

fie $2a = b$ aceasta corespunzând soluţiunilor formale:

pentru $b = 0 \ldots N = 00000$

„ $b = 2 \ldots N = 01024 = 32^2$.

Pentru $k = 1$, avem $m = 10 + b$, deci (1) devine:

$$(2) \qquad 10a^2 = 60a + 10 + 5ab + 2b$$

care ne spune că trebue ca b = mult 5, deci $b = 0$. Inlocuind pe b în ecuaţia (2), vedem că pentru $k = 1$, nu există soluţii posibile. Să studiem cazul $m = 10k - b$.

In acest caz vom studia numai posibilitatea $k = 1$; — $k = 0$ fiind exclusă dela început. Inlocuind în (1) pe m prin $10 - b$ obţinem:

$$(3) \qquad b(7a + 2) = 10(6a - a^2 + 1).$$

Cum însă b nu poate fi multiplu de 10 — şi în particular nici multiplu de 5 — afară de cazul $b = 0$; caz studiat, rezultă că

$$7a + 2 = \text{mult } 10$$

care dă

$$a = 4 \text{ sau } a = 9.$$

Pentru $a = 4$, avem prin înlocuire pe $b = 0$ şi $m = 7$, deci

$$N = 16129 = 127^2,$$

iar pentru $a = 9$ prin înlocuire ajungem la o imposibilitate (căci b nu poate fi egal cu -4).

Soluţiile problemei sunt:

00000 , 00001 , 00004 , 00009 , 01024 şi 16129.

Au rezolvat bine problemele 4676 şi 4844 găsind toate soluţiile D-nii: ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE (lic. militar N. Filipescu) şi ŞAICHIN O. ADOLF (clasa VIII-a liceul „Matei-Basarab", Bucureşti).

PROBLEMA 4797. *Prin un punct* K *pe diagonala* BD *a unui paralelogram* ABCD *se duc paralele la laturi, care taie pe* AD *şi* BC *în* E *şi* F, *iar pe* AB *şi* CD *în* G *şi* H. *Prin punctul* K_1 *de intersecţie al dreptelor* AF *şi* GC *se duc paralele la laturile paralelogramului pe care le taie analog în punctele* E_1, F_1, G_1, H_1.

Să se arate că grupele de drepte (E_1B, AK, GE); (GE, E_1F_1, AH) *sunt concurente.*

LT. C. IONESCU-ŢIU.

Soluție dată de D-nii: VICTOR L. FLORESCU și DORIN THEODORESCU (Lic. militar „Mânăstirea Dealu").

Fie $K_1'(BD, G_1C)$ și $K_1''(BD, AF)$, avem:

$$\frac{\overline{K'_1B}}{\overline{K'_1D}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{DC}}\ ;\ \text{și}\quad \frac{\overline{K''_1B}}{\overline{K''_1D}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DM}},$$

$$M(AF, DC)\ ,\ N(BE_1, EF),$$

dar:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$$

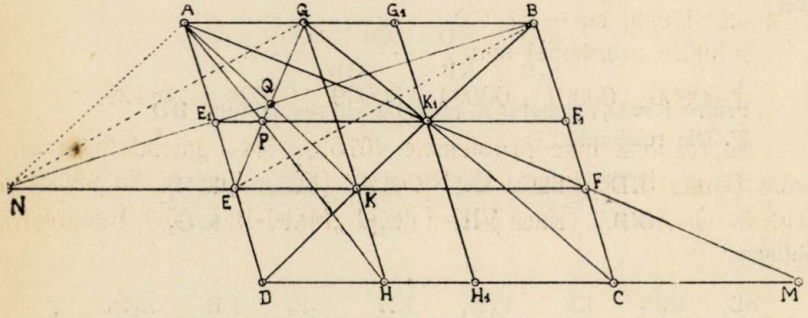
și din triunghiurile asemenea DEK și ABD deducem:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB} - \overline{EK}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB} - \overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{AB}}$$

și cum $\overline{AB} = \overline{DC}$ avem:

$$\frac{\overline{K'_1B}}{\overline{K'_1D}} = \frac{\overline{K''_1B}}{\overline{K''_1D}},$$

deci punctele K_1' și K_1'' se confundă în punctul K_1.



Din asemănări de triunghiuri avem:

$$\frac{\overline{E_1K_1}}{\overline{KN}} = \frac{\overline{BK_1}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{BF_1}}{\overline{BF}}\quad \text{și}\quad \frac{\overline{E_1K_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BF_1}}{\overline{BF}},$$

$\overline{AB} = \overline{KN}$, deci patrulaterul ABKN este un paralelogram și $\overline{E_1B}$ trece prin mijlocul lui $\overline{AK}$; $\overline{GE}$ trece deasemenea prin mijlocul lui $\overline{AK}$, deoarece $\overline{AK}$ și $\overline{GE}$ sunt diagonalele paralelogramului AEKG.

Dreptele $(\overline{E_1B}, \overline{AK}, \overline{GE})$ sunt concurente în punctul Q

Fie

$$P'(\overline{E_1F_1}, \overline{AH}) \text{ şi } P''(\overline{E_1F_1}, \overline{GE}),$$

avem:

$$\frac{\overline{E_1P'}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{AE_1}}{\overline{AD}} \text{ şi } \frac{\overline{E_1P''}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{NE}}{\overline{NF}} = \frac{GB}{\overline{AB} + \overline{GB}}.$$

Pe de altă parte

$$\frac{\overline{AE_1}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{GK_1}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{AB} + \overline{GB}}$$

deci:

$$\frac{\overline{E_1P'}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{E_1P''}}{\overline{DH}}$$

adică punctele P' şi P'' se confundă în punctul P, dreptele $\overline{GE}$, $\overline{E_1F_1}$, $\overline{AH}$ sunt concurente în P.

Observaţiuni. 1°. Ţinând seamă de relaţiunea:

$$\frac{\overline{K_1D}}{\overline{K_1B}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{GB}} \text{ şi } \frac{\overline{KD}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{EK}}{\overline{AB} - \overline{EK}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GB}},$$

deci:

$$\frac{\overline{K_1D}}{\overline{K_1B}} - \frac{\overline{KD}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{AB} - \overline{AG}}{\overline{GB}} = 1.$$

Pentru $K \equiv D_1$, punctul K_1 este mijlocul segmentului $\overline{BD}$.

2°. Din relaţiunile:

$$\frac{\overline{KD}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{KE}}{\overline{KF}} = \frac{\overline{KH}}{\overline{KG}}; \quad \frac{\overline{K_1D}}{\overline{K_1B}} = \frac{\overline{K_1E_1}}{\overline{K_1F_1}} = \frac{\overline{K_1H_1}}{\overline{K_1G_1}}$$

obţinem:

$$\frac{\overline{KE}}{\overline{KF}} - \frac{\overline{K_1E_1}}{\overline{K_1F_1}} = \frac{\overline{KE}}{\overline{KF}} - \frac{\overline{K_1H_1}}{\overline{K_1G_1}} = \frac{\overline{KH}}{\overline{KG}} - \frac{\overline{K_1E_1}}{\overline{K_1F_1}} = \frac{\overline{KH}}{\overline{KG}} - \frac{\overline{K_1H_1}}{\overline{K_1G_1}} = 1$$

$(AGG_1B) \equiv (AE_1ED)$.

3°. Locurile geometrice ale punctelor N şi Q, când K variază pe $\overline{BD}$, sunt drepte paralele cu $\overline{AD}$.

Soluţii analitice au dat D-nii: AL. POPESCU-ZORICA, (clasa VIII-a), SUBLT. M. GRUMĂZESCU, TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI şi GH. GH. CARDARA (studenţi la matematici).

C. I. Ţ.

PROBLEMA 4874. *Să se rezolve sistemul de ecuaţiuni:*

$$x+y+z=0$$
$$\Sigma\, xy^2z^3 = -108$$
$$\Sigma\, x^3y^5 = -3038.$$

PETRU P. COJOCARU.

Putem presupune că x, y, z sunt rădăcinile unei ecuaţii de gradul al III-lea a cărei formă, ţinând seama de prima ecuaţie a sistemului, este:

$$u^3+pu+q=0. \tag{1}$$

In acest caz a doua şi a treia ecuaţie a sistemului sunt funcţiuni, simetrice de rădăcini. In „Leçons d'algèbre supérieure" par G. SALMON pag. 503—513 este dată tabela funcţiunilor simetrice de rădăcini până la gradul al X-lea inclusiv, pentru ecuaţia generală de gradul n:

$$x^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots=0.$$

Dacă α, β, γ etc. sunt rădăcinile ecuaţiei, găsim:

$$\Sigma\,\alpha^3\beta^2\gamma = bcd-3d^2-3b^2e+4ce+7bf-12g$$

$$\Sigma\,\alpha^5\beta^3 = b^2c^3-2c^4-3b^3cd+6bc^2d+3b^2d^2-7cd^2+3b^4e-9b^2ce$$
$$+8c^2e+bde-4e^2-3b^3f+bcf+7df+8b^2g-8cg-8bh+8i.$$

Făcând aci:

$$\alpha=x \;;\; \beta=y \;;\; \gamma=z$$

apoi:

$$c=p \;;\; d=q \;;\; b=e=f=\ldots=i=0$$

găsim

$$\Sigma\, xy^2z^3 = -3q^2 = -108 \quad \therefore \quad q=\pm 6$$

şi

$$\Sigma\, x^3y^5 = -2p^4-7pq^2 = -3038$$

în care înlocuind pe q^2 obţinem:

$$p^4+126p-1519=0. \tag{2}$$

După teorema lui DESCARTES ecuaţia aceasta admite o rădăcină pozitivă şi una negativă, celelalte două fiind complexe. Căutând rădăcinile întregi găsim $p=-7$. Rădăcina pozitivă este iraţională $p=5,3\ldots$ Celelalte, complexe cojugate, le vom nota cu r şi $\bar{r}$

Din cele de mai sus deducem că x, y, z pot fi rădăcinile următoarelor ecuaţiuni:

(3) $u^3 - 7u \pm 6 = 0$ (5) $u^3 + ru \pm 6 = 0$

(4) $u^3 + 5,3\ldots u \pm 6 = 0$ (6) $u^3 + \bar{r}u \pm 6 = 0.$

Fiecare din acest *opt* ecuaţiuni ne dă câte trei rădăcini, care prin permutări dau 6 soluţiuni ale sistemului propus, deci în total 48 soluţiuni, aşa cum cere teorema lui BÉZOUT, căci ecuaţiunile sistemului sunt de grad 1, 6, 8.

Soluţiunile interesante sunt date de ecuaţia (3):

pentru $q = +6$ $x = 1$; $y = 2$; $z = -3$

„ $q = -6$ $x = -1$; $y = -2$; $z = 3$

şi celelalte deduse prin permutări.

După cum se vede rezolvarea sistemului depinde de determinarea coeficienţilor p şi q din ecuaţia (1), deci de exprimarea lui $\sum xy^2z^3$ şi $\sum x^3y^5$ în funcţie de p şi q.

Pentru aceasta o parte din corespondenţi au procedat prin calcul direct (exerciţiu frumos de calcul algebric):

D-rele: ANA C. GEREANŮ (studentă), VENERA TĂNĂSESCU (studentă) şi D-nii: S-LT. GR. MARTEŞ, S-LT. M. GRUMĂZESCU, O. MĂRCULESCU, TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI, IACOB GOLDBERG (lic. „M. Basarab" Buc.), NIC. V. NEDELCU (lic. mil. Cernăuţi), CONST. PANTELIMON. SANDU R. TURCU (lic. mil. Iaşi), MARCEL DIACONESCU (lic. „N. Filipescu") HERMAN REISCHER, ISAC I. SOLOMON (lic. „Internat" Iaşi).

Altă parte din corespondenţi au folosit relaţiile:

$$\sum \alpha^m \beta^n = S_m \cdot S_n - S_{m+n}$$

$$\sum \alpha^m \beta^n \gamma^p = S_m \cdot S_n \cdot S_p - S_{m+n} \cdot S_p - S_{n+p} \cdot S_m - S_{p+m} S_n + 2 S_{m+n+p}.$$

In care α, β, γ... sunt rădăcinile, iar:

$$S_i = \alpha^i + \beta^i + \gamma^i + \ldots \lambda^i.$$

Astfel au procedat D-nii: ADOLF O. ŞAICHIN (lic. „M. Basarab" Buc.), D-TRU RIPIANU şi IOAN STREDER (cl. VIII-a lic. mil. Iaşi).

D-l P. BOLDESCU scrie ecuaţia (1) sub forma:

$$u^3 + p_2 u + p_3 = 0$$

şi determină pe $\sum xy^2z^3$ şi $\sum x^3y^5$ prin *metoda ponderii* [1].

---

1) Se numeşte *pondere* a unei funcţiuni omogene suma indicilor fiecărui factor dintr'un termen. Astfel termenul $x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$ are ponderea $\alpha + 2\beta + 3\gamma$. Pentru informaţii mai amănunţite se poate consulta „Leçons d'algèbre supérieure" par G. SALMON pag. 85 ş. u.

Astfel Σxy^2z^3 fiind de pondere 6 trebue să avem:

$$\Sigma\, xy^2z^3 = \alpha p_2^3 + \beta p_3^2 .$$

Prin particularizări ale ecuației în u se determină α și β ($\alpha = 0$; $\beta = -3$). Tot așa $\Sigma\, x^3y^5$ are ponderea 8 deci:

$$\Sigma\, x^3y^5 = \gamma p_2^4 + \delta p_2 p_3^2 .$$

Determinarea lui γ și δ se face în același mod ($\alpha = -2$; $\beta = -7$).

PROBLEMA 4925. 1°. *Să se studieze variația funcției:*

$$y = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + \arcsin\frac{x}{a}$$

și să se construiască curba corespunzătoare.

2°. *Să se calculeze aria* $A(x)$ *mărginită de această curbă, de axa* ox *și de dreptele paralele cu* oy *având abscisele* x *și* a.

Să se calculeze cu două zecimale exacte aria $A\left(\frac{a}{2}\right)$.

TH. ANGHELUȚĂ.

Au rezolvat problema D-nii: MIHU CERCHEZ, AUREL I. CORNĂȚEANU (Lic. mil. Iași), ORIGEN MĂRCULESCU, S.-LT. GRIGORE MARTEȘ, ALEX. N. POPESCU-ZORICA, MILLU S. ROSENBLATT-ROTH (Lic. Internat Iași).

Soluție. Luăm ramura lui $\arcsin\frac{x}{a}$ aceea cuprinsă între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$; presupunem $a > 0$. Funcția este reală pentru valorile lui x din intervalul $(-a, a)$; ea este o funcție impară de x. Este suficient să studiem variația valorilor lui y când x ia valorile intervalului (o, a). In origină funcția este descontinuă.

Avem apoi:

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} .$$

Când x crește dela zero la a funcția y descrește dela $+\infty$ la $\frac{\pi}{2}$. Curba se construește lesne. Ea are origina ca centru, axa oy asimptotă și tangentele în punctele $x = \pm a$ paralele cu ox.

Aria cerută este dată de integrala

$$A(x) = \int_x^a y dx = \int_x^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx + \int_x^a \arcsin \frac{x}{a} dx.$$

Insă avem:

$$\int_x^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = a^2 \int_x^a \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} - \int_x^a \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

sau:

$$\int_x^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = -a \int_x^a \frac{d\frac{a}{x}}{\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

şi deci:

$$\int_x^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Folosind integrarea prin părţi găsim:

$$\int_x^a \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{a\pi}{2} - x \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Prin urmare avem:

$$A(x) = \frac{a\pi}{2} - 2\sqrt{a^2 - x^2} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - x \arcsin \frac{x}{a}.$$

De unde deducem:

$$A\left(\frac{a}{2}\right) = a\left[\frac{5\pi}{12} - \sqrt{3} + \log(2 + \sqrt{3})\right].$$

Insă:

$$\frac{5\pi}{12} = 1{,}308\ldots$$

$$\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$$

$$\log(2 + \sqrt{3}) = 1{,}314\ldots$$

şi deci:

$$A\left(\frac{a}{2}\right) = 0{,}89a$$

cu două zecimale exacte.

PROBLEMA 4960. *Să se rezolve ecuaţiunea :*

$$\sqrt{\sec^2 x + a\,\mathrm{tg}x} + \sqrt{\sec^2 x - a\,\mathrm{tg}x} = 1 + \mathrm{tg}x$$

şi să se verifice soluţiunile pentru $a = 2$.

LT. C. IONESCU-ŢIU.

1°. *Soluţiune* dată de D-nii: VICTOR L. FLORESCU (clasa VIII-a Lic. militar Mânăstirea Dealu), HORIA M. BODNĂRESCU (clasa VIII-a Seminarul pedagogic Bucureşti şi GH. M. DUMITRESCU (absolvent Lic. „Mihai Viteazul" Bucureşti).

Avem:

$$\sec x\left(\sqrt{1 + \tfrac{1}{2}a\sin 2x} + \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}a\sin 2x}\right) = \sec x\,(\sin x + \cos x)$$

$\sec x \neq \infty$. Prin ridicare la patrat se obţine:

$$2\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}a^2\sin^2 2x} = \sin 2x - 1.$$

După o nouă ridicare la patrat avem ecuaţiunea:

$$(1 + a^2)\sin^2 2x - 2\sin 2x - 3 = 0$$

de unde rezultă:

$$(1) \qquad x = \tfrac{1}{2}\arcsin\frac{1 \pm \sqrt{4 + 3a^2}}{1 + a^2}.$$

Pentru $a = 2$, se obţine:

$$\sin 2x = \frac{1 \pm 4}{5},$$ şi verifică numai $\sin 2x = 1$

sau

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Pentru ca să avem:

$$1 \geqslant \frac{1 \pm \sqrt{4 + 3a^2}}{1 + a^2} \geqslant -1,$$

găsim condiţiunea necesară când $\sec x \neq \infty$:

$$(2) \qquad -2 \leqslant a \leqslant 2.$$

2°. Pentru $a = \pm 2$ ecuaţiunea dată devine:

$$1 + \mathrm{tg}x + 1 - \mathrm{tg}x = 1 + \mathrm{tg}x, \text{ adică } x = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Condiţiunea (2) se mai poate obţine din inegalităţile:

$$\sqrt{\sec^2 x + a\,\mathrm{tg}x} \leqslant 1 + \mathrm{tg}x \quad \text{şi} \quad \sqrt{\sec^2 x - a\,\mathrm{tg}x} \leqslant 1 + \mathrm{tg}x.$$

Din $1 + \operatorname{tg} x > 0$, deducem că x nu poate fi în intervalele dela $\frac{\pi}{2}$ la $\frac{3\pi}{4}$ şi dela $\frac{3\pi}{2}$ la $\frac{7\pi}{4}$.

Pentru $x = \frac{\pi}{2}$, sau $\sec x = \infty$, ecuaţiunea dată se verifică pentru orice valoare finită a lui a; iar pentru $a = 0$ nu se verifică relaţiunea (1), singura soluţiune fiind dată de $\sec x = \infty$.

Atât din ecuaţiunea dată cât şi din relaţiunea (1), se observă că se poate înlocui a prin $-a$.

3°. D-nii: N. D ŞTEFĂNESCU, S.-LT. M. GRUMĂZESCU, LT. P. NEGOIŢĂ şi R. HERMAN au folosit relaţia $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, şi prin două ridicări la patrat au obţinut ecuaţiunea *reciprocă:*

$$3\operatorname{tg}^4 x + 4\operatorname{tg}^3 x + 2(1 - 2a^2)\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 3 = 0,$$

pe care au rezolvat-o.

4°. In ultimul timp s'a primit soluţiuni bune date de D-nii: A. I. CORNĂŢEANU, GH. M. DUMITRESCU, S. I. IANCU şi GH. B. N. IONESCU.

Nu s'a ţinut seama de soluţiunile care au dovedit că s'au lucrat împreună de mai mulţi corespondenţi.

C. I. Ţ.

PROBLEMA 4964. *Intrebuinţând câte o singură dată cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 să se scrie cinci numere de câte două cifre, care să fie în progresie aritmetică.*

V. THÉBAULT.

Fie

$$\div (ab - 2r).(ab - r).ab.(ab + r).(ab + 2r)$$

o progresie crescătoare în condiţiile enunţului. Suma termenilor acestei progresii este

$$S = 5 \times ab$$

şi fiindcă suma cifrelor termenilor progresiei este

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

urmează că S şi deci ab se divide prin 9; ab poate fi

$$09,\ 18,\ 27,\ 36,\ 45,\ 54,\ 63,\ 72,\ 81,\ 90.$$

Din acest şir se exclud 09 şi 18, pentru că ar urma ca cei doi termeni precedenţi ai progresiei să fie de forma $0m$, adică să se întrebuinţeze de mai multe ori cifra 0. De asemeni, pentru motiv analog se exclude 81 şi 90.

Rămân de examinat numerele:

27, 36, 45 54, 63 şi 72.

Fie

$$ab = 27 \quad \text{şi} \quad z_1u_1 \ , \ z_2u_2 \quad (\text{cu } z_1 < z_2)$$

termenii imediat precedent şi imediat următor. Avem:

$$27 = \frac{z_1u_1 + z_2u_2}{2}$$

$$\therefore \qquad 54 = 10(z_1 + z_2) + (u_1 + u_2)$$

care arată că $u_1 + u_2$ trebue să se termine cu 4 şi cum $u_1 + u_2 < 18$, nu putem avea decât:

(1) $\qquad u_1 + u_2 = 4 \qquad \therefore \quad z_1 + z_2 = 5$

(2) $\qquad u_1 + u_2 = 14 \qquad \therefore \quad z_1 + z_2 = 4.$

Ţinând seamă că cifrele u, z sunt diferite de 2 şi 7 şi că $z_1 < z_2$, egalităţile (1) dau următoarele posibilităţi:

u_1	0	1	3	4
u_2	4	3	1	0

z_1	0	1
z_2	5	4

Se formează toate numerele z_1u_1 , z_2u_2 combinând fiecare coloană a primului tablou cu fiecare coloană a tabloului al doilea şi se obţin progresiile:

$$\div\ 01.27.53 \quad \text{şi} \quad \div\ 03.27.51$$

care nu răspund enunţului, căci adăugând raţia la ultimul termen sau scăzând-o din primul se obţin sau numere de 3 cifre sau numere cu cifre care au fost întrebuinţate.

Egalităţile (2) dau:

u_1	5	6	8	9
u_2	9	8	6	5

;

z_1	0	1	4	5
z_2	5	4	1	0

din care se deduc soluţiile:

1°. $\qquad \div\ 05.16.27.38.49$

2°. $\qquad \div\ 09.18.27.36.45.$

Procedând la fel şi cu celelalte valori admisibile pentru *ab*, se mai găsesc soluţiunile

3°. $\div$ 01.23.45.67.89

4°. $\div$ 09.27.45.63.81

5°. $\div$ 10.32.54.76.98

6°. $\div$ 18.36.54.72.90

7°. $\div$ 50.61.72.83.94

8°. $\div$ 54.63.72.81.90.

Problema are deci 8 soluţiuni crescătoare şi 8 descrescătoare.

Se observă că la aceste soluţiuni se pot adăuga şi 16 progresii cu termeni numere zecimale de forma

$$\div 0{,}1\,.\,2{,}3\,.\,4{,}5\,.\,6{,}7\,.\,8{,}9 \text{ etc.}$$

Deci întru cât enunţul nu precizează dacă numerele trebue să fie întregi sau fracţionare, se poate conchide că problema are 32 de soluţiuni din care 16 de numere întregi şi 16 de numere fracţionare.

Notă. 1°. Au găsit, pe diferite alte căi, toate soluţiunile: D-ra SONIA TUDORAN (Şcoala centrală „M. Brâncoveanu", Bucureşti) şi D-nii: V. L. FLORESCU (Lic. militar Târgovişte), H. L. REISCHER (Lic. internat Iaşi) şi AL. I. ROHR (Lic. militar, Iaşi).

2°. D-l E. S. MODÂLCĂ (Lic. Traian, Turnu-Severin) nu a găsit soluţia 7).

3°. D-l M. AL. VASILESCU-STABU a găsit numai soluţiile 2), 3), 7) şi 8). D-sa este singurul care a examinat şi cazul soluţiilor de numere zecimale.

4°. D-l P. DRĂGHICESCU (Lic. militar Iaşi) a găsit numai soluţia 5).

5°. Una din soluţiunile primite va fi publicată la recreaţii.

6°. D-l V. THÉBAULT a propus această problemă şi în *Mathesis*, Vol. 41 pag. 350 cu Nr. 3033. Soluţia problemei din *Mathesis* încă nu s'a publicat.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 4975. *Intre* x *şi* y *avem relaţia:*

$$x + y = (2k + 1)\,\pi/3.$$

Se cere o relaţiune simplă simetrică de sinusuri care ar conduce la această relaţie şi la următoarea:

$$x - y = 2k'\pi.$$

I. IONESCU.

Soluție dată de D-l POPA D. MIRCEA (Elev clasa VII-a, Liceul Militar, Iași).

Relațiile date se pot scrie:

$$3x + 3y = 2k\pi + \pi,$$
$$x - y = 2k\pi,$$

de unde, prin adunări și scăderi, găsim:

$$4x + 2y = (2k + 2k' + 1)\pi \quad , \quad 2x + 4y = (2k - 2k' + 1)\pi,$$
$$2x + y = (k + k')\pi + \tfrac{1}{2}\pi \quad , \quad x + 2y = (k - k')\pi + \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$(2x + y) - (x + 2y) = 2k'\pi.$$

Arcele din paranteze diferind cu un număr pereche de π au același sinus; deci:

$$\sin(2x + y) = \sin(x + 2y).$$

Avem deci o relațiune simetrică de sinusuri, cum cere enunțul problemei. Ca să o putem admite trebue ca din ea să putem scoate relațiile date și numai pe ele. Pentru a cerceta acest lucru, trecem totul în partea întâia a egalității și avem:

$$\sin(2x + y) - \sin(x + 2y) = 2\sin\tfrac{1}{2}(x - y)\cos\tfrac{1}{2}(3x + 3y) = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}(x - y) = k'\pi \quad , \quad \tfrac{1}{2}(3x + 3y) = (2k + 1)\tfrac{1}{2}\pi,$$
$$x - y = 2k'\pi \quad , \quad x + y = (2k + 1)\pi/3,$$

care sunt tocmai relațiile date.

A găsit relația între sinusuri D-l I. V. JAREGHIE (Elev Liceul Militar Iași), prin inspirație, și a arătat că satisface enunțul. D-l C. PASCARU (Elev Liceul Militar Iași), a stabilit relația dintre sinusuri dar nu a dovedit că ea nu duce și la alte soluții decât cele din enunț.

PROBLEMA 4999. *Care numere de două cifre au același număr de divizori ca și răsturnatele lor?*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-l H. L. REISCHER (Elev Liceul Internat, Iași).

Avem 90 numere de două cifre. Dintre ele cele terminate cu 0 nu sunt soluții, nici chiar numai formal, căci $n0$ are pe lângă factorii lui n și pe ai lui 10.

Numerele formate din două cifre identice: *11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99* sunt soluţii căci răsturnatele lor sunt egale cu dânsele. Avem deci 9 soluţii, numere de două cifre multiplele lui 11.

Numerele prime *13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97* au ca răsturnate tot numere prime şi sunt deci soluţiuni. Ele sunt în număr de 8.

Celelalte numere prime de două cifre: 19, 23, 29, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 83, 89, care au 2 divizori, au ca răsturnate ale lor numerele compuse 91, 32, 92, 14, 34, 74, 35, 95, 16, 76, 38, 98 care au mai mult de 2 divizori. Aceste 24 numere nu pot fi soluţiuni ale problemei.

Eliminând numerele examinate până acum, ne mai rămân de cercetat următoarele 20 perechi de numere răsturnate:

12, 15, 18, 24, 25, 26, 27, 28, 36, 39, 45, 46, 48, 49, 56, 57, 58, 68, 69, 78.
21, 51, 81, 42, 52, 62, 72, 82, 63, 93, 54, 64, 84, 94, 65, 75, 85, 86, 96, 87.

La fiecare grupă de două numere răsturnate căutăm cel mai mare comun divizor, cu care dividem numerele şi le înlocuim cu câturile găsite. Obţinem tabloul:

4, 5, 2, 4, 25, 13, 3, 14, 4, 13, 5, 23, 4, 49, 56, 19, 58, 34, 23, 26.

7, 17, 9, 7, 52, 31, 8, 41, 7, 31, 6, 32, 7, 94, 65, 25, 85, 43, 32, 29.

Unde se găsesc unul sub altul două numere prime, corespunde la fracţiile primitive o soluţie. Găsim astfel 6 soluţii: *15* cu *51; 26* cu *62; 39* cu *93.*

Acolo unde în tabloul precedent e un număr prim cu unul compus, nu corespunde soluţie. Grupele ce mai rămân sunt:

25, 49, 56, 58.
52, 94, 65, 85,

sau desfăcându-le în factori:

5^2, 7^2, $2^3 . 7$, $2 . 29$
$2^2 . 13$; $2 . 47$; $5 . 13$; $5 . 17$.

Ele au respectiv ca număr de divizori:

2, 3, 8, 4.
6, 4, 4, 4.

Numai ultimele au acelaşi număr de divizori, şi deci avem soluţia *58* cu *85*.

Problema admite dar 25 soluţii:

11, 13, 15, 17, 22, 26, 31, 33, 37, 39, 44, 51, 53,

58, 62, 66, 71, 73, 77, 79, 85, 88, 93, 97, 99.

Au mai rezolvat bine problema D-ra LYDIA M. TUDORAN (elevă clasa IV-a, Şcoala Centrală, Bucureşti) şi D-l M. AL. VASILESCU-STABU (clasa VII-a b Liceul Lazăr, Bucureşti). D-lor însă au dat şi pe 49 cu 94 ca soluţie admiţând că 49 are *factorul dublu* 7, ceea ce nu intră în cazul enunţului.

EXERCIŢII

6. Se cere cel mai mic număr *abcd*, de 4 cifre diferite între ele astfel ca *cd* să fie dublul lui *ab*, iar $c + d$ să întrecă cu 1 suma $a + b$.

M. AL. VASILESCU-STABU.

R. Din condiţiile enunţului

(1) $$c + d = a + b + 1 \quad ; \quad cd = 2 \times ab$$

se deduce

(2) $$8c + 2 = 18a + d$$

$$\therefore \quad d = 2d' \quad \text{cu} \quad d' = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Dând lui d' pe rând aceste valori şi ducând apoi pe d în (2) şi (1) se găsesc pentru *abcd* valorile

1020 , 4692 , 3774 , 2856 , 1938

dintre care cea mai mică şi cu cifrele diferite între ele este 1938.

7. Să se găsească 2 numere întregi şi pozitive de acelaşi număr de cifre, astfel ca:

$$\frac{a}{b} = b,\ a.$$

MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU.

R. Avem:

$\frac{a}{b} = b + \frac{a}{10}$, sau: $\frac{10a}{b} = 10b + a$, sau: $10a = 10b^2 + ab$, de unde:

$$a = \frac{10b^2}{10 - b} \ (b \neq 0).$$

Conform datelor problemei trebue ca $b < 10$, deci şi $a < 10$.
Dând valori lui b, se obţine succesiv:

$b = 1$, $a = \frac{10}{9}$, inadmisibil ; $b = 2$, $a = 5$; $b = 3$, $a = \frac{90}{7} > 9$, inadmisibilă.

De aci se deduce că singura soluţie a problemei este:

$$\boxed{\frac{5}{2} = 2,5}.$$

PROBLEME PROPUSE

5029. Se cer trei numere având cŏdivizorul maximum 12 şi comultiplul minimum 6048.

ION IONESCU.

5030. In ce sistem de numeraţie, un număr de opt cifre de forma $abab cdcd$ este patratul unui număr de patru cifre de forma $mnmn$, aşa în cât numerele de câte două cifre ab şi mn să fie consecutive?

V. THÉBAULT.

5031. Dacă $2n+1$ este număr prim, să se arate că avem totdeauna:

$$\frac{(n+1).(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n} - (-1)^n = \mathcal{M}.(2n+1).$$

CPT.-COMANDOR GR. ZAPAN.

5032. Indicatorul indicatorului unui număr prim de patru cifre este 1008; care este acel număr?

CPT.-COMANDOR I. LINTEŞ.

5033. Să se construiască triunghiul ABC, căruia îi cunoaştem: distanţa dintre ortocentru şi unul din vârfuri; distanţa dela centrul cercului circumscris la bisectoarea corespunzătoare acelui vârf, unghiul făcut de această bisectoare cu latura corespunzătoare.

C. IONESCU-BUJOR.

5034. Fie ABCD un patrulater înscris în cercul O. Laturile fiecărui unghiu al patrulaterului intersectează tangenta dusă în vârful opus în două puncte. Se consideră patrulaterele formate de punctele obținute în acest fel pe tangentele în A și C și tangentele în B și D. Să se arate că aceste două patrulatere au punctul de întâlnire al diagonalelor comun.

THEODOR GH. COCEA.

5035. Să se construiască un triunghiu ABC, dreptunghic în A, știind că ipotenuza BC are o lungime dată și că înălțimea AA', bisectoarea BB' și mediana CC' sunt concurente.

Dacă S și S' sunt ariile triunghiurilor ABC și A'B'C', atunci

$$b^6 . S = a^6 S'.$$

GH. BASACOV.

5036. Fie $(\Delta) \equiv \overline{aoc}$ o transversală a triunghiului $(T) \equiv ABC$ înscris în cercul (O); (O_a), (O_b), (O_c) cercurile circumscrise triunghiurilor $Abc, \ldots$ și ω punctul lui MIQUEL al sistemului $(T - \Delta)$. Se consideră intersecțiile $(\overline{\omega O_a}, \Delta) \equiv \alpha, \ldots, (\overline{\omega O}, \overline{BC}) = A_1 \ldots$ Cercurile, $a\alpha A_1$ și analoagele, trec prin ω.

N. N. MIHĂILEANU.

5037. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{(1-x^2)(1-yz)}{x+z} = a(1+xy) \quad ; \quad \frac{(1-y^2)(1-zx)}{y+x} = b(1+yz)$$

$$\frac{(1-z^2)(1-xy)}{z+y} = c(1+xz).$$

S.-LT. POPESCU ADRIAN.

5038. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \sqrt{x}$$

și să se verifice soluțiunile aflate.

LT. C. IONESCU-ȚIU.

5039. Să se determine un punct M pe ipotenuza BC a unui triunghiu dreptunghiu ABC, astfel în cât $\overline{AM}$ să fie media armonică a segmentelor $\overline{BM}$ și $\overline{MC}$.

GH. D. SIMIONESCU.

5040. Arcele a, b, c fiind oarecare, notăm cu:

$$A = \cos 2a \sin^2(b-c) \quad , \quad A' = \sin 2a \sin^2(b-c);$$

B, B' ; C, C' expresiunile deduse prin permutări circulare.

Să se demonstreze identitatea:

$$\Sigma A^2 - 2\Sigma AB \equiv \Sigma A'^2 - 2\Sigma A'B'.$$

MIRCEA ADAM.

5041. Să se demonstreze că rădăcinile ecuațiunei:

$$\frac{a\cos 3x + (b-a)\cos 2x + (2a+c)\cos x - (2a+b+c)}{2a\cos 2x + 2(a+b)\cos x + 3a + 2b + c} = \sin^8\frac{x}{2} - \cos^8\frac{x}{2} + 1$$

sunt independente de a, b, c.

G-L GH. BUICLIU.

5042. Se consideră funcțiunea $y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)$ și se cere:

1°. Presupunând că y este cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$ să i se studieze variațiunea și să i se facă graficul.

2°. Notăm cu A, B, C punctele respectiv de abscisă $-1, 0, +1$. Să se găsească ecuațiunile tangentelor în aceste puncte la curbă.

3°. Să se calculeze aria mărginită de curbă și de dreapta AC.

GH. TH. GHEORGHIU.

5043. Notând cu S_i media abaterilor, după legea lui GAUSS, luate în valori absolute, la puterea i, să se demonstreze că avem:

$$\frac{S_n}{S_{n-k}} S_2^{\frac{k}{2}} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{k}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-k+1} x\,dx.$$

GH. ZAPAN.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Anonim (5017); *Bedreag C. M.* (4908, 5017); *Bodnărescu M. Horia* (4983, 5004, 06, 11, 17, 24, P); *Borş C.* (N); *Canari A. Vlad* (4996); *Cetăţeanu St.* (5017, N); *Cleanoveanu C. M.* (5000, 17); *Cornăţeanu I. A.* (4458, 96, 520, 633, 83, 766, 884, 5017); *Diaconescu D. I.* (4844, 80, 81, 931, 83, 5017); *Gligor N. I.* (5017); *Herman L. R.* (4717, 5015); *Jareghie V. Ioan* (4804, 990, 5020); *Leibovici S.* (5003); *Măgeanu I. Nicolae* (4996); *Mărculescu Origen* (4994, 5004, 25); *Mihăilescu D. D-tru* (4996); *Mironescu I. D-tru* (4996); *Miroslav St. T.* (5017); *Modâlcă S. Emil* (4928, 84, 88, 96, 5005, 16, 17); *Petrescu Achile* (5017); *Petrescu Iulian* (5006, 17, 25); *Popa D. Mircea* (4967); *Popa I. M.* (5017); *Popescu F. C.* (4996); *Reischer Herman* (4863, 5017); *Rohr I. Al.* (4717, 989, 95); *Roşca St. Gh.* (4745, 990, 5000); *Roşculeţ Marcel* (4781, 970, 5007, A, E); *Rosenblatt S. Milu (Roth)* (4909, 25, 28, 35, 89, 95, 5005); *Sacter O.* (4533, 5025); *Şaichin O. A.* (4822, 85, 923, 84, E); *Segal Joe* (4581, 815, 5024); *Solomon I. Isac* (4717, 935, 5017, E); *Ţiţeica I. Ilie* (A); *Topalescu Gh.* (4996); *Tudoran Lydia* (5017); *Tudoran M. Sonia* (5017); *Turcu R. Sandu* (4573, 983, 89); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (4590, 652, 64, 5000, 15, 17, 21).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anual şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu** şi **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă). (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi St. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie.* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I. Ediţia II-a revăzută şi adăogită, 1923. (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice. (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice. (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii

Abonamentul anual (9 numere). Lei 50

Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa :

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot. C. D. IONESCU-ŢIU

C. 52.852

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIV

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1938

BIBLIOTECA CENTRALA
„ASSACHIANA"
SIBIU

SUMARUL

1. Sărbătorirea D-lui Profesor Ion Ionescu de către corpul profesoral al Şcoalei Politechnice din Bucureşti. . . . . *Cpt. Comandor I. Linteş.*
2. O problemă de construcţie. . . . . *O. N. Ţino.*
3. Note Matematice: 10 — 13.
4. Bibliografie.
5. Cereri.
6. Diverse.
7. Probleme rezolvate: 3052, 3702, 4232, 4442, 4507, 4622, 4834, 4837, 4845, 4941, 4980, 4988, 4998.
8. Exerciţii: 8.
9. Probleme propuse: 4904, 5044 — 5058.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1938

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stan,** Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan; Al. D. Bunescu,** Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1938 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5002, 09, 10, 13, 14, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 36, 37, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

SĂRBĂTORIREA D-LUI PROFESOR ION IONESCU DE CĂTRE CORPUL PROFESORAL AL ŞCOALEI POLITECHNICE DIN BUCUREŞTI

Corpul profesoral al Şcoalei Politechnice din Bucureşti a sărbătorit, printr'o masă colegială, în seara de 19 Noemvrie 1938, pe D-nii profesori: ION IONESCU, EUGEN ŞTEFĂNESCU şi D-l conferenţiar GHEORGHE PANTAZI, cu ocazia trecerei la pensie.

Printre sărbătoriţi se găseşte un „stâlp" al *Gazetei Matematice*, Domnul ION IONESCU, de acum înainte, Inginer Inspector în Retragere şi Profesor onorar al Şcoalei Politechnice din Bucureşti. Un puternic stâlp, construit, nu din beton, nici din oţel, ci dintr'o fericită închegare de: suflet, caracter, energie, pricepere şi muncă.

Gazeta Matematică, din rândurile căreia corpul profesoral al Şcoalei Politechnice din Bucureşti este din plin alimentat, a luat parte la această sărbătorire printr'un impozant număr de membri.

Masa s'a servit la „Asociaţia Finanţei şi Marei Industrii" din Calea Victoriei 163, adică la aşa zisul „Club al Miliardarilor".

Cu câteva ore înaintea sărbătorirei, un coleg dela „Gazetă" îşi exprima oarecum un fel de părere de rău pentru că sărbătorirea fusese organizată într'un local de înalt lux.

— Nu cadrează cu modestia şi sobrietatea D-lui profesor ION IONESCU, zicea el.

Mărturisesc sincer că argumentarea colegului mă convinsese, avea dreptate.

Aşa dar, pregătit nefavorabil sufleteşte, intru în „Clubul Miliardarilor" la orele *21* fără câteva minute. Contrast însă, impresie bună, chiar foarte bună. Un local foarte frumos, foarte elegant. Pe loc am schimbat de părere faţă de colegul meu, căruia — dacă l'aş fi putut trage mai deoparte — i-aş fi vorbit astfel: « Modestia şi sobrietatea D-lui profesor ION IONESCU a fost şi va rămâne pururi un rar exemplu. Domnia Sa nu a fost niciodată în Marea Finanţă sau în Marea Industrie, deci materialmente n'a fost nici când miliardar, dar pe tărâmul ingineresc, pe tărâmul profesoral, pe tărâmul matematic, D-l profesor ION IONESCU a fost un „mare miliardar". Timp de *44* de ani Domnul profesor ION IONESCU a fost în „Marea Industrie de ingineri", de aceea cu drept cuvânt

poate fi socotit „cel mai mare fabricant de ingineri de înaltă valoare".

Se cuvine dar ca sărbătorirea acestui miliardar „*sui generis*" să se facă în fosta regească incintă, astăzi sediul Asociaţiei Finanţei şi Marei Industrii. »

* * *

S'a servit masa.

După masă D-l Rector VASILESCU-KARPEN citeşte o scrisoare din partea D-lui GH. PANTAZI, care îşi scuză absenţa, apoi aduce sincere mulţumiri sărbătoriţilor în numele corpului profesoral al Şcoalei Politechnice din Bucureşti, pentru frumoasa lor activitate profesorală şi le face frumoase urări.

Vorbesc apoi pe rând :

D-l profesor BUŞILĂ, cel mai vechiu profesor al Şcoalei Politechnice, după D-l Rector VASILESCU-KARPEN şi cel mai vechiu fost elev al D-lui profesor ION IONESCU, exprimă admiraţie şi dragoste pentru sărbătoriţi, cari vor rămâne vii exemple pentru Şcoala Politechnică.

D-l profesor ARAPU, evidenţiază o serie de mari calităţi ale celor trei sărbătoriţi.

D-l profesor ŞTEFĂNESCU RADU povesteşte câteva frumoase amintiri în legătură cu „cei trei deblocaţi".

Domnii ingineri: TOMESCU şi VICTOR POPESCU exprimă sărbătoriţilor şi în special D-lui profesor ION IONESCU adânca recunoştinţă a foştilor elevi.

D-l profesor MANOILESCU, nu în calitate de preşedinte al A. G. I. R.-ului, ci în calitate de „cel mai turbulent fost elev al D-lui profesor ION IONESCU", mărturiseşte cu o desăvârşită eleganţă, că printre cele mai frumoase amintiri ce le păstrează dela D-l profesor ION IONESCU sunt lucrările de *Statică Grafică*, de care s'a servit ulterior drept model şi în alte ramuri de activitate.

D-l profesor ION IONESCU, spune D-l MANOILESCU, s'a ridicat dela om şi a creat o şcoală, astăzi D-sa este o adevărată „Instituţie". Golul lăsat de profesorul pensionat astăzi, nu va putea fi umplut nici măcar teoretic.

Apoi, după o serie de duioase amintiri, povesteşte cu un fin humor, despre D-l profesor EUGEN ŞTEFĂNESCU; D-l MANOILESCU compară pe cei doi sărbătoriţi prezenţi cu zeul romanilor

Janus, care avea două fețe : una severă și dreaptă, alta blândă și înțelegătoare, una arătând aspra realitate, alta orizonturile ideale și închee făcând calde urări zeului *Janus*, pe care îl sărbătorim astăzi.

Urmează răspunsul sărbătoriților.

Primul se ridică D-l profesor ION IONESCU, dar un prelung ropot de aplauze îl împiedică să vorbească.

Aplauze ! câte nu se cheltuesc în omenire : la teatru, la circ, la adunări politice, mai ales la adunări politice aranjate. Și ce banale au devenit! Foarte mulți chiar își mărturisesc sila de a mai aplauda vreodată. Totuși în clipa când D-l profesor ION IONESCU s'a ridicat să vorbească, acel spontan ropot de aplauze suna altfel. Parcă nu mai erau simple lovituri de palme, ci — față de potolita atmosferă care a domnit în tot timpul mesei — acele aplauze căpătaseră un caracter cu totul semnificativ, un fel de descătușare sufletească.

Doamne, dar să fim sinceri și să recunoaștem cinstit, oare cei prezenți veniseră acolo să se veselească pentru vreo isbândă? Nicidecum. Ei veniseră, cu inima strânsă, să asiste la formalitățile de îmbătrânire a unor „dascăli" de mare valoare intelectuală și morală, formalități al căror criteriu este vârsta, iar nu calitățile și potențialul omului.

Și atunci cum să nu sune altfel acel general ropot de aplauze? In acel moment era micul mijloc, al celor prezenți, de a-și manifesta dragostea și recunoștința față de cel ce se ridicase să vorbească.

Apoi tăcere.

D-l profesor ION IONESCU începe, cu o ascunsă emoție, astfel :

« Aceasta este ultima lecție pe care o fac în calitate de profesor al Școalei Politechnice. »

O scurtă pauză.

Tăcerea se accentuiază.

Privirile tuturor încremenesc, iar ochii multora se înrourează.

Ultima lecție a unui mare profesor . . . ! ?

Ah ! ce fior dureros a străpuns inimile celor de față.

. . . . . .

Ecce homo!

. . . . . .

D-l profesor ION IONESCU continuă apoi :

La Sărbătorirea de acum doi ani şi ceva pe care D-voastră împreună cu ingineri, foşti elevi ai mei, şi cu elevii Secţii Construcţiilor aţi făcut-o pentru cinstirea activităţii mele profesorale în Învăţământul technic superior, am expus pe larg modul cum am intrat în acest învăţământ, peripeţiile prin care am trecut şi ideile mele conducătoare în chestiuni de instrucţiune şi educaţiune technică. Cei ce nu au asistat la acea Sărbătorire pot găsi acea Cuvântare în *Gazeta Matematică* şi în *Buletinul Societăţii Politechnice.*

De atunci am continuat cursurile şi lucrările fără nicio abatere dela directivele pe care mi le impusesem acum 37 ani, atât ca Profesor de catedră şi de lucrări, cât şi la celelalte îndatoriri profesionale. In special, am ascultat de conştiinţa mea pentru îndeplinirea datorii, iar nu de părerile diriguitoare, şi mai ales interesate, ale altora. Am susţinut tot timpul că elevii trebuesc selecţionaţi, îndrumaţi, ţinuţi de scurt, iar nu lăsaţi în libertate, căci pierd timpul în mod nefolositor şi că dacă noi nu vom face acest lucru în Şcoală, va veni reacţiunea din afară, cum a şi venit prin măsurile legale din ultimul timp.

Mi s'a spus şi mie, ca şi colegului A. G. IOACHIMESCU la masa de despărţire de anul trecut, că făceam opoziţie în Consiliul Profesoral şi în Comitetul de Direcţie. Nu am avut niciodată asemenea intenţiuni; pentru a lua conducerea Şcoalei am fost solicitat în trei rânduri şi am refuzat. Am ţinut numai ca părerile mele să rămână scrise pentru a fi văzute de viitorii istorici ai şcoalei. Am convingerea nestrămutată că atunci când cei copleşiţi de forţe exterioare vor putea judeca liber, vor vedea că o opoziţie desinteresată este mai folositoare de cât un reptilism cu tendinţe. De altfel, când ai pornit pe o linie ferată ca să poţi duce poveri mari mai repede, nu te poţi abate din linia trasată dela început, fără deraiere. Dacă însă ai pornit pe o şosea, te mai poţi abate la dreapta sau la stânga din calea dreaptă spre a face loc altora ca să iasă înainte sau să nu te ciocneşti cu dânşii.

Odată cu plecarea mea din Şcoală, aţi lăsat să se rupă unele din stăvilarele pe care le întreţineam eu închise. Dacă aş fi un egoist, mi-ar părea bine, căci s'a dovedit că ceea ce puteam face eu nu mai pot face alţii. Calitatea de Profesor onorar, ce mi s'a dat prin Lege îmi dă datoria morală de a lupta mai departe

pentru onoarea Şcoalei; în special, cu toată desistarea Şcoalei în procesul deschis contra substituirilor de elevi prin ingineri la lucrarea proiectelor, eu voiu duce înainte procesul ca parte civilă, căci reputaţiunea unui profesor suferă când elevii săi ies incapabili.

In arhivele Şcoalei vor rămâne petiţiuni, reclamaţii, memorii contra activităţii mele profesorale făcute de elevi şi de protectori ai lor; am însă şi eu o arhivă din care pot extrage multe. Astfel, înainte de pensionare, la 8 Septemvrie, un grup de ingineri tineri şi de elevi ingineri mi-au trimis o scrisoare în care îmi arată unele lipsuri ale Şcoalei şi prin care îmi cer concursul pentru îndreptare. Scrisoarea mi-a venit după Legea din 12 August în urma căreia eu m'am considerat virtualmente pensionar. Iată ce se spune la punctul 6 din acea scrisoare:

„Cu toate că existau selecţiuni serioase, totuşi se mai strecurau elemente slabe şi atunci când exista o stavilă puternică care nu lăsa să treacă; aceia ce nu erau bine pregătiţi se potmoleau. Ce oare se va face Secţia Construcţiilor când D-voastră veţi fi obligaţi să vă retrageţi la pensie? Nu am fi făcut această constatare şi nu am fi îndrăsnit să vă deranjem dacă D-voastră a-ţi mai fi rămas încă profesor, căci atunci D-voastră singur o frânaţi, dar acum?“

Când un tren merge pe o pantă repede, dacă un frânar pleacă trebue pus altul; aici este rolul D-voastră; nu trebue să vă bizuiţi că Legea nouă este severă şi va avea efecte binefăcătoare, căci ceea ce se poate face de oameni de acţiune nu se poate realiza prin legi.

In ceea ce priveşte pensionarea mea s'a spus că eu aşi fi amărît. Nici de cum; eu am cerut singur pensionarea încă de acum trei ani şi am fost reţinut de Comitetul de Direcţiune şi de Ministru, prin darea unui conferenţiar ca ajutor. — In *Gazeta Matematică* care a apărut la 15 Septemvrie m'am trecut pe lista membrilor ca Inginer Inspector general în retragere şi ca Profesor onorar. Eram dar pregătit pentru a deveni pensionar. Modul însă în care s'a făcut pensionarea m'a desgustat, şi aceasta am spus-o peste tot. Legea pensiilor cere ca autoritatea să anunţe punerea la pensie cu 2 luni înainte; legea servitorilor cere o anunţare cu 15 zile înainte de licenţiere. Pe noi ne-a anunţat la 30 Septemvrie că suntem pensionaţi pe a doua zi. A trebuit să întrerup lucrările de

darea de note la examene, şi să alerg în goana mare cu automobilul prin oraş pentru ca să adun acte şi să fac cererea de pensionare în aceeaşi zi, căci de o depuneam a doua zi nu mai luam pensie pe Octomvrie, pentru care de altfel nu mi s'a dat carnet nici până azi. Pe de altă parte adresa de încunoştiinţarea pensionării nu era făcută altfel de cum s'ar face pentru oricare funcţionar inferior? Regretatul ELIE RADU la pensionarea sa mi-a spus plângând că anunţarea de scoatere la pensie i s'a făcut pe o hârtie poligrafiată identică cu aceea care s'a trimes şi uşierilor Ministerului scoşi la pensie! Eu nu am plâns, dar cred că sunteţi de aceeaşi părere ca şi mine că modul de pensionare se putea face mai altfel pentru un funcţionar care a servit Statului 44 ani din care 37 ani ca profesor şi de aci displăcerea pe care am manifestat-o după pensionare.

Prin adresa D-voastră după primul Consiliu profesoral din Octomvrie şi prin cuvântările D-voastră de astă seară aţi ridicat după sufletul meu o mare parte din nemulţumirile de care vorbii.

Vă mulţumesc cu sinceritate pentru manifestarea pe care aţi făcut-o pentru activitatea mea profesorală prin participarea la această masă şi prin cuvântările pe care le-aţi ţinut. Vă urez succese în cariera D-voastră şi o pensionare într'o atmosferă mai înălţătoare.

Să trăiţi. CPT. COMANDOR I. LINTEŞ.

O PROBLEMĂ DE CONSTRUCŢIE

Fiind dat triunghiul ABC, *să se înscrie în unghiul* BAC, *numai cu rigla şi compasul, un segment de dreaptă* $\overline{DE}$ *(punctele* D *şi* E *aparţinând respectiv laturilor* AB *şi* AC *ale unghiului* BAC) *astfel ca:*

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}.$$

1. Să examinăm problema în primul rând cu ajutorul geometriei analitice. Să luăm în acest scop sistemul de axe ortogonale având origina în punctul A, pe AB ca axă a absciselor şi perpendiculara AY pe AB ca axă a ordonatelor. Să însemnăm coordonatele punctelor B, C, D, E în felul următor:

$$B(b, c) \; ; \; C(c, c\,\mathrm{tg}A) \; ; \; D(\lambda, o) \; ; \; E(\mu, \mu\,\mathrm{tg}A).$$

Condițiunile problemii care determină pe λ și μ sunt:

$$(\lambda - b)^2 = (\mu - c)^2 + (\mu - c)\operatorname{tg}^2 A = (\mu - \lambda)^2 + \mu^2 \operatorname{tg}^2 A \qquad (1)$$

din care deducem următoarele două sisteme:

$$(2) \quad \begin{cases} \mu - c = (\lambda - b)\cos^2 A \\ (\lambda - b)^2 = (\mu - \lambda)^2 + \mu^2 \operatorname{tg}^2 A \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \mu - c = (b - \lambda)\cos^2 A \\ (\lambda - b)^2 = (\mu - \lambda)^2 + \mu^2 \operatorname{tg}^2 A. \end{cases}$$

Rezolvând primul sistem, avem:

$$\mu = c + (\lambda - b)\cos^2 A \qquad (4)$$

și punând: $\lambda - b = x$ ecuațiunea a doua devine:

$$x^2 = [(c - b) - x \sin^2 A]^2 + [c + x \cos^2 A]^2 \operatorname{tg}^2 A,$$

sau încă:

$$\cos^2 A \cdot x^2 - 2b \sin^2 A \cdot x - [(c - b)^2 + c^2 \operatorname{tg}^2 A] = 0. \qquad (5)$$

Formând cantitatea de sub radical, avem:

$$R \equiv b^2 \sin^4 A + (c - b)^2 \cos^2 A + c^2 \sin^2 A > 0. \qquad (6)$$

Așa dar acest sistem dă totdeauna două soluțiuni.

In cazul sistemului al doilea, punând: $b - \lambda = x$, avem:

$$\mu = c + x \cos^2 A, \qquad (7)$$

iar ecuațiunea a doua a sistemului devine:

$$3\cos^2 A \cdot x^2 + 2[2c - b(1 + \cos^2 A)]x + [(c - b)^2 + c^2 \operatorname{tg}^2 A] = 0. \qquad (8)$$

Realizantul acestei ecuațiuni, este:

$$R \equiv c^2 - 2bc(2 - \cos^2 A) + b^2(1 - \cos^2 A + \cos^4 A)$$

care dă pentru $\left(\frac{c}{b}\right)$ două rădăcini reale pozitive (căci $r \equiv 3\sin^2 A > 0$);

ca urmare dacă $\left(\frac{c}{b}\right)$ are valoarea în afară de intervalul rădăcinilor lui $R = 0$, problema mai admite încă două soluțiuni.

Așa dar, în cazul când $A \neq \frac{\pi}{2}$ problema are cel puțin două soluțiuni și cel mult patru. In ce privește însă construcțiunea cu rigla și compasul a acestor soluțiuni, forma rădăcinilor ecuațiunilor în x o arată suficient că ea este anevoioasă pe această cale.

In cazul când $A = \frac{\pi}{2}$, axele ortogonale sunt AB şi AC, deci:

$$B(b, o) \; ; \; C(o, c) \; ; \; D(\lambda, o) \; ; \; E(o, \mu).$$

Condiţiunile care determină pe λ şi μ sunt în acest caz următoarele:

$$(\lambda - b)^2 = \lambda^2 + \mu^2 = (\mu - c)^2$$

care se descompune, ca în cazul general, în două sisteme, dintre care numai unul dă soluţiunile reale, anume:

$$\lambda = -c \pm \sqrt{2bc} \quad ; \quad \mu = -b \pm \sqrt{2bc}$$

semnele corespunzându-se; construcţia punctelor D şi E este prin urmare uşoară şi imediată pe această cale.

In cele ce urmează dăm o metodă geometrică simplă pentru construirea soluţiunilor în cazul general, dedusă din examinarea problemii pe calea elementară a geometriei pure.

2. Ca în orice problemă de construcţie presupunem problema rezolvată. Fie DI şi EI bisectoarele unghiurilor BDE şi DEC; M, N, P picioarele perpendicularelor duse din I pe BD, DE, EC.

Având

$$\overline{BD} = \overline{DE} \; , \; \overline{DI} = \overline{DI} \text{ şi } \sphericalangle BDI = \sphericalangle IDE \; \therefore \; \Delta BDI = \Delta IDE,$$

de unde $\therefore \; \overline{BI} = \overline{IE}$. In acelaşi fel, având

$$\overline{ED} = \overline{EC} \quad \therefore \quad \overline{ID} = \overline{IC}.$$

De altă parte, punctul I fiind pe bisectoarele

$$DI \text{ şi } EI \; \therefore \; \overline{IM} = \overline{IN} = \overline{IP}$$

şi cum

$$\overline{BI} = \overline{EI} = \overline{EI} \; \therefore \; \Delta IMB = \Delta IPE = \Delta INE,$$

de unde rezultă că:

$$\sphericalangle MIB = \sphericalangle PIE = \sphericalangle NIE = \beta. \qquad (1)$$

Tot astfel, având

$$\overline{IP} = \overline{IM} = \overline{IN} \text{ şi } \overline{IC} = \overline{ID} = \overline{ID} \; \therefore \; \Delta IPD = \Delta IMD = \Delta INC,$$

de unde rezultă:

$$\sphericalangle CIN = \sphericalangle DIP = \sphericalangle DIM = \alpha. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) urmează imediat că:

$$\sphericalangle BID = \sphericalangle DIE = \sphericalangle EIC = \alpha + \beta.$$

Dar:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sphericalangle BDE \quad \text{şi} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sphericalangle DEC,$$

deci:

$$\alpha + \beta = \pi - \frac{1}{2}(\sphericalangle BDE + \sphericalangle DEC) = \pi - \frac{1}{2}(\sphericalangle AED + \sphericalangle DAE + \sphericalangle ADE + \sphericalangle DAE) = \pi - \frac{1}{2}(\pi + A) = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}.$$

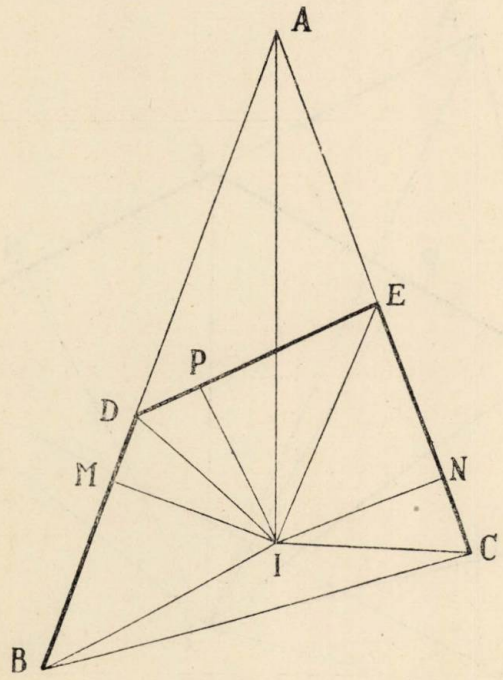


Fig. 1.

Aşa dar, avem relaţiunea:

$$\sphericalangle BID = \sphericalangle DIE = \sphericalangle EIC = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}. \qquad (3)$$

a) Să presupunem acum că punctul I este interior triunghiului BAC (Fig. 1). In acest caz, avem:

$$\sphericalangle BIC = 2\pi - \frac{3\pi}{2} + \frac{3A}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{3A}{2}. \qquad (4)$$

Pentru ca problema să fie posibilă în acest fel trebue ca să avem :

$$\frac{\pi}{2}+\frac{3A}{2}<\pi, \quad \text{sau} \quad \boxed{A<\frac{\pi}{3}}. \tag{5}$$

b) Dacă presupunem punctul I exterior triunghiului ABC (Fig. 2) avem :

$$\sphericalangle BIC = 3 \sphericalangle DIE = \frac{3\pi}{2}-\frac{3A}{2}.$$

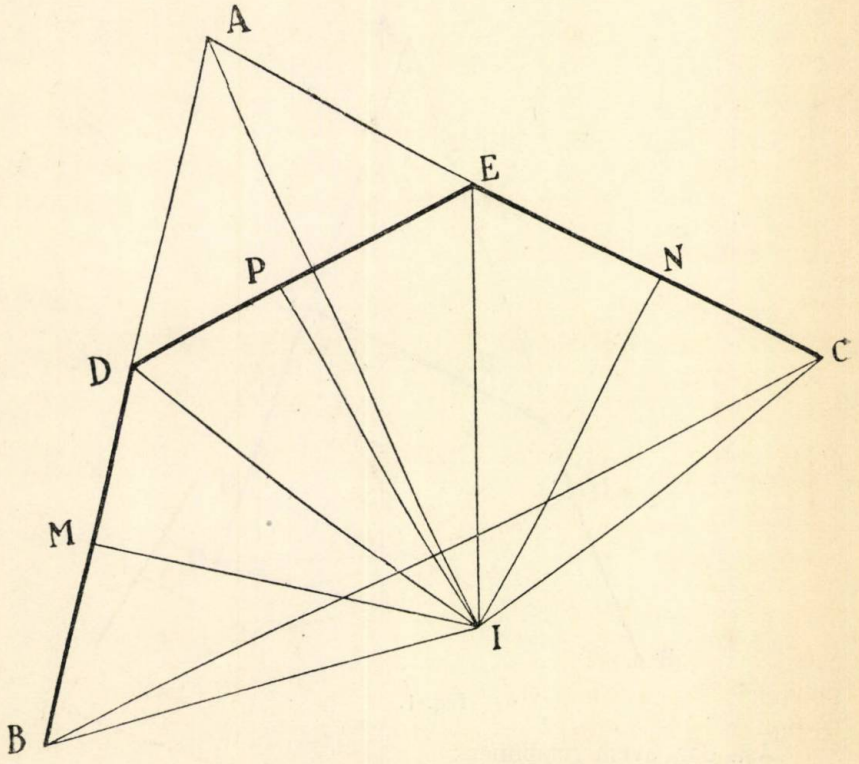


Fig. 2.

Acest caz are loc dacă

$$0<\frac{3\pi}{2}-\frac{3A}{2}<\pi \quad \therefore \quad \boxed{A>\frac{\pi}{3}}. \tag{6}$$

c) In cazul când punctul I se găseşte chiar pe latura BC, avem relaţiunea:

$$\frac{\pi}{2}+\frac{3A}{2}=\pi, \text{ sau încă: } \boxed{A=\frac{\pi}{3}}. \qquad (7)$$

Observăm pe lângă cele de mai sus că punctul I aparţine totdeauna bisectoarei AI a unghiului BAC, rezultă următoarea construcţiune pentru segmentul DE cerut:

a) $A<\frac{\pi}{3}$. Pe latura $\overline{BC}$ descriem către interiorul triunghiului BAC un segment de cerc capabil de unghiul $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3A}{2}\right)$; intersecţia lui cu bisectoarea unghiului BAC dă punctul I. Ducem perpendicularele $\overline{IM}$ şi $\overline{IN}$ respectiv pe AB şi AC. Măsurăm pe BA segmentul $\overline{MD}=\overline{CN}$ şi pe CA segmentul $\overline{NE}=\overline{BM}$. Unind punctele D şi E, avem segmentul $\overline{DE}$ căutat.

b) $A>\frac{\pi}{3}$. Pe latura $\overline{BC}$ descriem un segment de cerc capabil de unghiul $\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{3A}{2}\right)$ în afara triunghiului BAC. Intersecţia lui cu bisectoarea unghiului BAC dă punctul I. Restul ca în cazul precedent.

c) $A=\frac{\pi}{3}$. Punctul I este piciorul bisectoarei unghiului BAC pe latura BC. Restul ca în cazul (*a*).

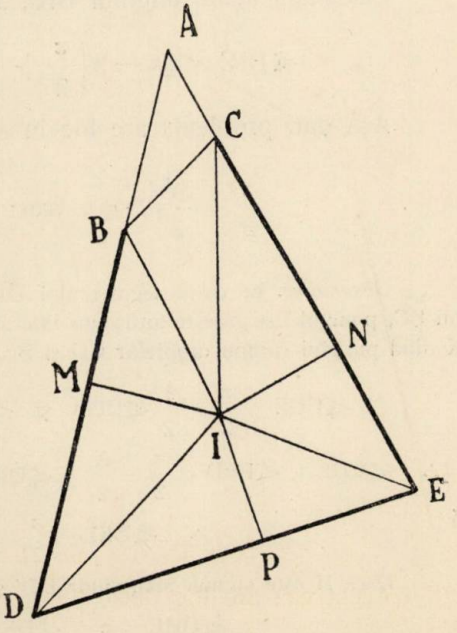


Fig. 3.

3. Să presupunem acum că ar exista o soluţie $\overline{DE}$ înscris în unghiul BAC şi exterior triunghiului ABC de partea laturei BC (Fig. 3). Fie I punctul comun bisectoarelor DI şi EI ale unghiurilor ADE şi AED; apoi $\overline{IM}$, $\overline{IN}$, $\overline{IP}$ respectiv

perpendicularele duse din I pe AB, AC, DE. Deoarece $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$ deducem că avem:

$$\Delta DIB = \Delta DIE \quad \text{şi} \quad \Delta EIC = \Delta EID,$$

de unde

$$\overline{IE} = \overline{IB} \quad \text{şi} \quad \overline{ID} = \overline{IC}.$$

Apoi, avem imediat:

$$\Delta IMD = \Delta IPD = \Delta INC \quad \text{şi} \quad \Delta INE = \Delta IPE = \Delta IMB$$

din care rezultă că:

$$\overline{DM} = \overline{DP} = \overline{NC} \quad \text{şi} \quad \overline{EN} = \overline{EP} = \overline{MB}. \tag{8}$$

$$\sphericalangle MID = \sphericalangle DIP = \sphericalangle NIC = \alpha \quad \text{şi} \quad \sphericalangle NIE = \sphericalangle EIP = \sphericalangle MIB = \beta. \tag{9}$$

Urmează, că:

$$\sphericalangle BID = \sphericalangle DIE = \sphericalangle EIC = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}. \tag{10}$$

Calculând acum unghiul BIC, avem:

$$\sphericalangle BIC = 2\pi - 3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{3A}{2}. \tag{11}$$

Aşa dar, problema are loc în acest caz, dacă

$$\frac{\pi}{2} - \frac{3A}{2} > 0, \quad \text{sau:} \quad \boxed{A < \frac{\pi}{3}}. \tag{12}$$

Observare. In cazul segmentului $\overline{DE}$ exterior triunghiului de partea lui BC, punctul I se găseşte totdeauna interior patrulaterului BCED. In adevăr, K fiind punctul comun dreptelor CD şi BE, avem:

$$\sphericalangle CDE = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sphericalangle CED \quad \text{şi} \quad \sphericalangle BED = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sphericalangle BDE$$

$$\therefore \quad \sphericalangle CDE + \sphericalangle BED = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2} = \sphericalangle DIE \quad \therefore \quad \sphericalangle DIE + \sphericalangle DKE = \pi$$

$$\therefore \quad \sphericalangle DKE = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Dacă H este comun înălţimilor DD' şi EE' ale triunghiului DKE, avem:

$$\sphericalangle DHE = \pi - \sphericalangle DKE = \sphericalangle DIE.$$

Aşa dar, punctul H fiind interior triunghiului DKE, iar I, fiind pe segmentul de cerc DHE şi interior unghiurilor CED şi BDE, punctul I este interior patrulaterului BCED.

Din cele ce preced, urmează că în cazul când $A < \frac{\pi}{3}$, problema admite a doua soluție, exterioară triunghiului ABC, de partea laturei BC, pe care o construim în modul următor:

Pe segmentul de dreaptă BC și în afara triunghiului BAC construim un segment de cerc capabil de unghiul $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3A}{2}\right)$, care determină pe bisectoarea unghiului BAC punctul I. Ducem perpendicularele $\overline{IM}$ și $\overline{IN}$ respectiv pe AB și AC; apoi prelungim pe $\overline{BM}$ cu segmentul $\overline{MD} = \overline{CN}$ și pe segmentul $\overline{CN}$ cu $\overline{NE} = \overline{BM}$. Unind punctele D, E avem segmentul căutat.

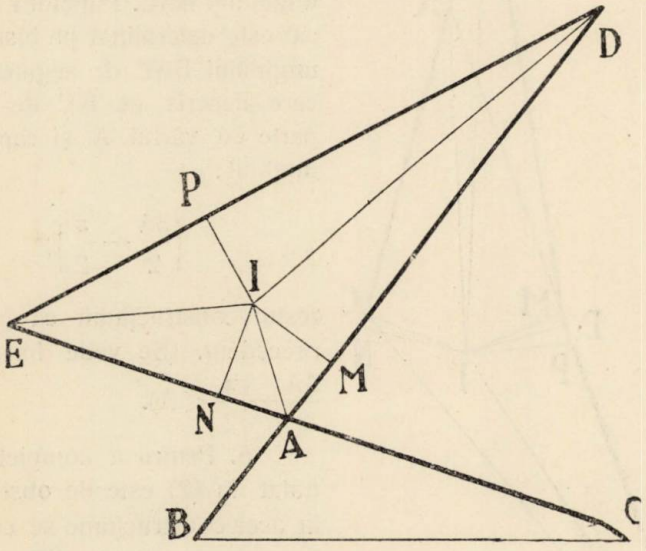


Fig. 4.

4. Să presupunem că există o soluțiune DE înscrisă în unghiul DAE opus la vârf unghiului BAC (Fig. 4). Fie DI și EI bisectoarele unghiurilor ADE și AED; apoi $\overline{IM}$, $\overline{IN}$, $\overline{IP}$ perpendicularele din I respectiv pe AB, AC, DE. Având $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$, deducem, ca în cazurile precedente, că:

$$\overline{DP} = \overline{DM} = \overline{CN} \quad ; \quad \overline{EP} = \overline{EN} = \overline{BM};$$

$$\sphericalangle PID = \sphericalangle DIM = \sphericalangle CIN = \alpha \quad \text{și} \quad \sphericalangle PIE = \sphericalangle EIN = \sphericalangle BIM = \beta$$

din care rezultă:

$$\sphericalangle DIE = \sphericalangle EIC = \sphericalangle BID = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}.$$

De altă parte, avem:

$$\sphericalangle BID + \sphericalangle DIE + \sphericalangle EIC - \sphericalangle BIC = 2\pi \quad \therefore \quad \sphericalangle BIC = \frac{3A}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

Urmează că acest caz are loc, dacă $A > \frac{\pi}{3}$.

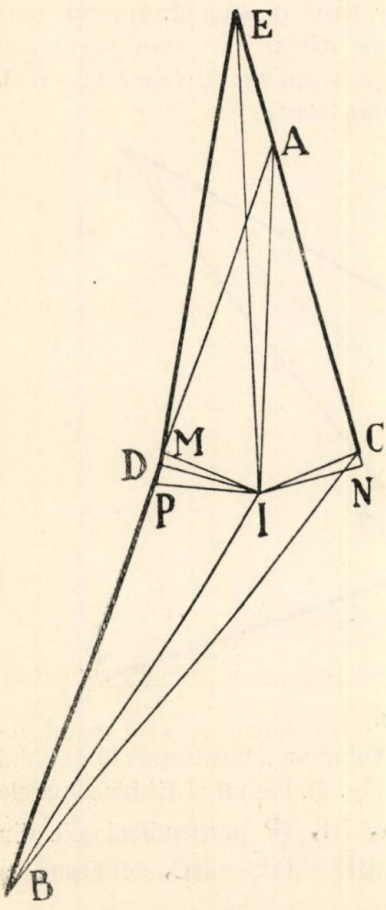


Fig. 5.

Aşa dar, în cazul când $A > \frac{\pi}{3}$, pe lângă soluţia interioară triunghiului BAC, mai este o soluţie $\overline{DE}$ în unghiul opus la vârf unghiului BAC. Punctul I în acest caz este determinat pe bisectoarea unghiului BAC de segmentul de cerc descris pe $\overline{BC}$ de aceeaşi parte cu vârful A şi capabil de unghiul:

$$\left(\frac{3A}{2} - \frac{\pi}{2}\right);$$

restul construcţiunii ca în cazul precedent. (Se vede imediat că $\frac{3A}{2} - \frac{\pi}{2} < A$).

5. Pentru a completa cazul tratat la (2) este de observat că în acea construcţiune se cuprinde ipoteza în plus, că $\overline{BM}$ este mai mic ca $\overline{NA}$, lucru care n'are loc întotdeauna.

Să presupunem că în triunghiul ABC ($\overline{AC} < \overline{AB}$) există o soluţie $\overline{DE}$ astfel că punctul D aparţine laturei $\overline{AB}$, iar punctul E prelungirei laturei $\overline{CA}$. (Fig. 5). Fie DI şi EI bisectoarele unghiurilor BDE şi DEC, iar $\overline{IM}$, $\overline{IN}$, $\overline{IP}$ perpendicularele duse respectiv pe AB, AC, DE. Având $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$ rezultă $\overline{IB} = \overline{IE}$ şi $\overline{ID} = \overline{IC}$;

apoi având $\overline{IM} = \overline{IN} = \overline{IP}$ deducem:

$$\Delta INE = \Delta IPE = \Delta IMB \quad \therefore \quad \overline{PE} = \overline{NE} = \overline{BM}$$
$$\Delta IPD = \Delta IMD = \Delta INC \quad \therefore \quad \overline{PD} = \overline{MD} = \overline{CN}$$

şi

$$\sphericalangle PIE = \sphericalangle BIM = \sphericalangle EIN = \beta \; ; \; \sphericalangle PID = \sphericalangle MID = \sphericalangle CIN = \alpha,$$

dar:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sphericalangle DEA \; ; \; \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sphericalangle EDB,$$

de unde:

$$\beta - \alpha = \frac{1}{2}(\sphericalangle EDB - \sphericalangle DEA) = \frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle BAC) = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}.$$

Dacă presupunem acum punctul I interior triunghiului ABC, avem:

$$\sphericalangle BIE + \sphericalangle EIC = 3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \quad \therefore \quad \sphericalangle BIC = \frac{\pi}{2} + \frac{3A}{2}.$$

Scriind că $\sphericalangle BIC < \pi$, rezultă că trebue să avem pentru acest caz $A < \frac{\pi}{3}$.

In cazul când I este exterior triunghiului ABC, avem:

$$\sphericalangle BIC = 3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right),$$

deci scriind condiţiunea ca $\sphericalangle BIC < \pi$, rezultă că trebue pentru acest caz să avem:

$$A > \frac{\pi}{3}.$$

Aşa dar, în cazul când $A < \frac{\pi}{3}$, punctul I este determinat de segmentul de cerc descris pe $\overline{BC}$ către vârful A şi capabil de unghiul $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3A}{2}\right)$ pe bisectoarea interioară a unghiului BAC. Dacă $\overline{BM}$ este *mai mic* ca $\overline{NA}$ avem cazul de figură (1); dacă $\overline{BM}$ este mai mare ca $\overline{NA}$ avem cazul de figură (5). In cazul când $A > \frac{\pi}{3}$, punctul I este determinat pe bisectoarea interioară a unghiului A de segmentul de cerc descris pe $\overline{BC}$ în exteriorul triunghiului BAC şi capabil de unghiul $\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3A}{2}\right)$. Dacă $\overline{BM}$

este mai mic ca $\overline{NA}$ suntem în cazul figurei (2); dacă $\overline{BM}$ este mai mare ca $\overline{NA}$ suntem în cazul figurei (6).

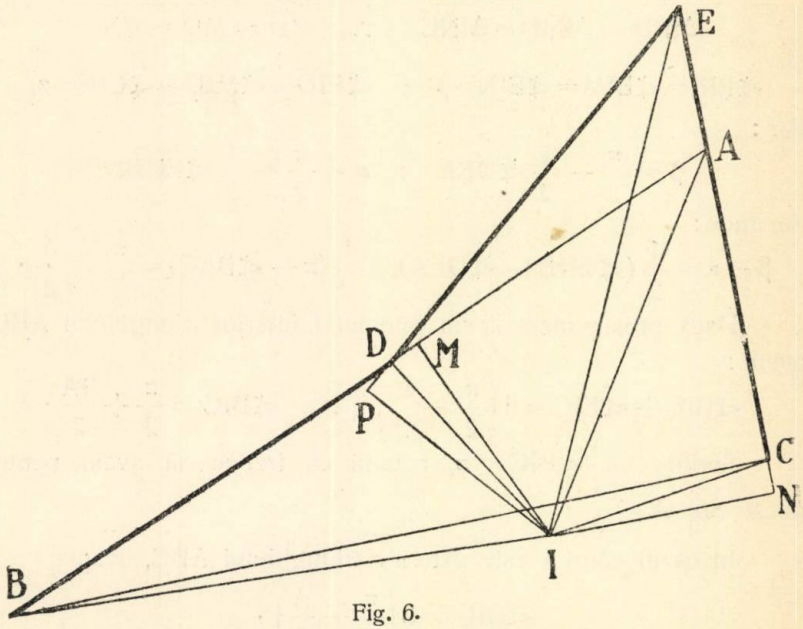


Fig. 6.

6. Până aci segmentele $\overline{BD}$ și $\overline{CE}$ au avut față de $\overline{BA}$ și $\overline{CA}$ aceeași orientare. Să presupunem acum că segmentele $\overline{BD}$ și $\overline{CE}$ au orientări contrarii; anume să presupunem că $\overline{BD}$ este de același sens cu $\overline{BA}$, iar $\overline{CE}$ de sens contrar cu $\overline{CA}$. In acest caz de figură segmentul $\overline{DE}$ traversează latura $\overline{BC}$ (Fig. 7). Fie EI și DI bisectoarele unghiurilor CED și BDE; apoi $\overline{IM}$, $\overline{IN}$, $\overline{IP}$ perpendicularele pe BA, CA, DE. Deoarece

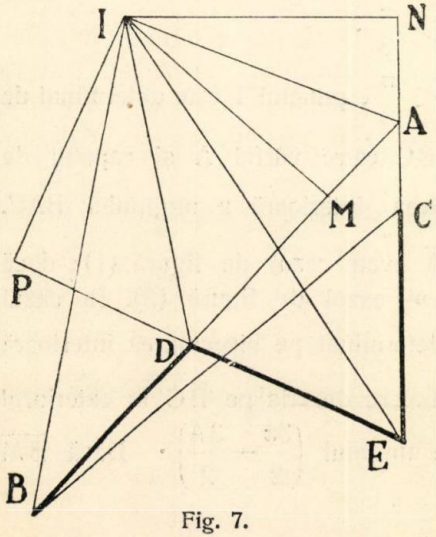


Fig. 7.

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC},$$

deducem ca în cazurile precedente, că

$$\overline{IB} = \overline{IE} \quad \text{și} \quad \overline{ID} = \overline{IC},$$

şi de aci relaţiunea următoare:

$$\Delta IMB = \Delta INE = \Delta IPE \quad ; \quad \Delta INC = \Delta IMD = \Delta IPD$$

şi ca urmare:

$$\overline{BM} = \overline{NE} = \overline{PE} \quad \text{şi} \quad \overline{MD} = \overline{NC} = \overline{DP}$$

$$\sphericalangle BIM = \sphericalangle EIN = \sphericalangle EIP \quad \text{şi} \quad \sphericalangle CIN = \sphericalangle DIM = \sphericalangle DIP,$$

din care rezultă:

$$\sphericalangle BID = \sphericalangle DIE = \sphericalangle EIC;$$

dar

$$\sphericalangle DIE = \tfrac{1}{2} \sphericalangle BDE - \tfrac{1}{2} \sphericalangle DEA = \tfrac{1}{2} \sphericalangle BAC.$$

Punctul I fiind de aceeaşi parte cu A faţă de BC, avem:

$$\sphericalangle BIC = 3 \sphericalangle DIE = \frac{3A}{2}.$$

Ducem prin B o dreaptă BG care să facă cu BA de aceeaşi parte cu vârful C un unghiu egal cu $\frac{A}{2}$, care taie pe AC în G. Punctul I este intersecţia cercului BGC cu bisectoarea exterioară AL' a unghiului BAC; dar bisectoarea AL' taie cercul BGC în două puncte distincte sau confundate sau rămâne exterioară cercului; ca urmare pentru un triunghiu dat problema poate avea două soluţiuni, o soluţiune dublă, sau nici o soluţiune de felul celei din fig. 7. Pentru ca acest caz să poată fi posibil, trebue în primul rând să avem neapărat:

$$\frac{3A}{2} < \pi, \quad \text{sau} \quad A < \frac{2\pi}{3}.$$

Cazul de figură mai presupune că unghiul A nu poate fi $\geqq \frac{\pi}{2}$. In adevăr, dacă A ar fi $\geqq \frac{\pi}{2}$, am avea $\overline{DE} > \overline{EA}$, deci $\overline{EC} > \overline{EA}$, contrar ipotezei $\overline{EC} < \overline{EA}$.

7. Să presupunem acum cazul de figură unde D se găseşte pe prelungirea lui $\overline{BA}$, iar E pe prelungirea lui $\overline{AC}$ (Fig. 8); având $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$ şi $\overline{AC} < \overline{AB}$ (de exemplu), prin acelaşi procedeu ca în cazurile precedente, găsim:

$$\sphericalangle DIE = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\pi - A) = \pi - \frac{A}{2}.$$

a) Dacă punctul I este de aceeaşi parte cu A faţă de BC, avem:

$$\sphericalangle BIC = 2\pi - 3\left(\pi - \frac{A}{2}\right) = \frac{3A}{2} - \pi,$$

deci pentru ca acest caz să poată avea loc, trebue ca $A > \frac{2\pi}{3}$.

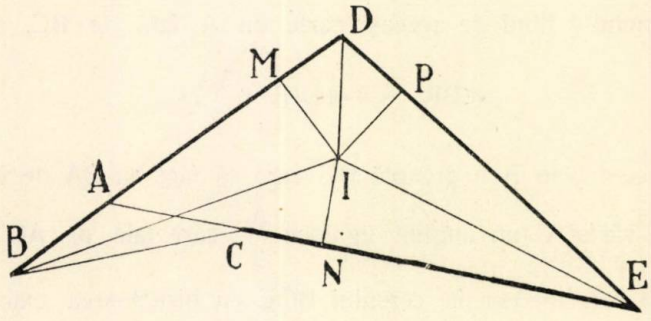


Fig. 8 *a.*

b) Dacă punctul I este de partea opusă lui A faţă cu BC, avem:

$$\sphericalangle BIC = 3\left(\pi - \frac{A}{2}\right) - 2\pi = \pi - \frac{3A}{2},$$

şi pentru ca acest caz să poată avea loc, trebue ca $A < \frac{2\pi}{3}$; însă de altă parte unghiul BAC trebue să fie mai mare ca $\frac{\pi}{2}$, căci altfel segmentul $\overline{EA}$ care este mai mare ca $\overline{EC}$, este mai mic ca $\overline{DE}$, contrar ipotezei. Deci cazul de figură presupus aci nu poate avea loc pentru triunghiurile în care $A \leqq \frac{\pi}{2}$.

In cazul (*a*), segmentul de cerc descris pe $\overline{BC}$ de aceeaşi parte cu A şi capabil de unghiul ascuţit $\left(\frac{3A}{2} - \pi\right)$ dă două soluţiuni pentru punctul I situate în cele două unghiuri suplementare unghiului BAC.

In cazul (*b*) segmentul de cerc descris pe $\overline{BC}$ de partea opusă lui A şi capabil de unghiul $\left(\pi - \frac{3A}{2}\right) < \frac{\pi}{4}$, dă două soluţiuni distincte, o soluţiune dublă, sau nici una după cum bisectoarea exterioară a unghiului BAC taie în două puncte, este tangentă, sau nu taie segmentul de cerc construit.

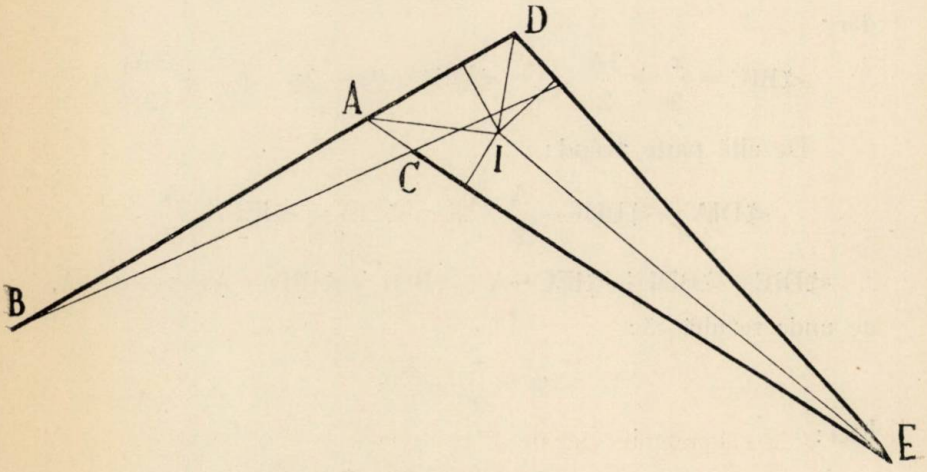


Fig. 8 *b*.

Apropiind acest din urmă rezultat al subcazului (*b*) de cel tratat la (6), deducem că posibilitatea unuia exclude pe a celuilalt, putând ca nici unul din ele să nu dea soluţiuni pentru unele triunghiuri pentru care $A < \frac{2\pi}{3}$.

Rezumând, problema în general are cel puţin *două soluţiuni* şi cel mult *patru* pentru un triunghiu dat.

8. In cele ce preced, presupunând problema rezolvată am dedus un procedeu geometric, pentru fiecare caz în parte, prin

care construim segmentul $\overline{DE}$. Pentru o întemeiere mai riguroasă a acestui procedeu geometric în construirea segmentului $\overline{DE}$, vom demonstra că reciproc elementele construcțiunii sunt suficiente să arătăm că segmentul $\overline{DE}$ este egal cu $\overline{BD}$ și $\overline{EC}$. Să limităm această demonstrație la primul caz examinat la (2).

Avem:

$\sphericalangle BAI = \sphericalangle IAC$; deci $\overline{IM} = \overline{IN}$; apoi $\overline{MD} = \overline{NC}$ și $\overline{NE} = \overline{BM}$.

Unim punctul I cu B, D, E, C. Avem imediat:

$\Delta BIM = \Delta INE$; $\Delta IMD = \Delta INC$ $\therefore$ $\overline{IB} = \overline{IE}$; $\overline{ID} = \overline{IC}$;

apoi

$\sphericalangle IBD = \sphericalangle IEC$; $\sphericalangle IDB = \sphericalangle ICE$; $\sphericalangle DIB = \sphericalangle CIE = \varphi$;

dar:

$$\sphericalangle BIC = \frac{\pi}{2} + \frac{3A}{2} \quad \therefore \quad \sphericalangle DIE = 2\pi - 2\varphi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3A}{2}\right)$$

De altă parte având:

$$\sphericalangle DIA = \sphericalangle BDI - \frac{A}{2} \quad \text{și} \quad \sphericalangle EIA = \sphericalangle IEC - \frac{A}{2}$$

$$\therefore \quad \sphericalangle DIE = \sphericalangle BDI + \sphericalangle IEC - A = \sphericalangle BDI + \sphericalangle IBD - A = \pi - \varphi - A,$$

de unde rezultă că:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2},$$

deci:

$$\sphericalangle DIE = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2} - A = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} = \varphi.$$

Urmează imediat, că

$$\Delta BID = \Delta DIE,$$

de unde se deduce, că:

$$\overline{DE} = \overline{BD}.$$

c. c. t. d.

(Va urma) O. N. ȚINO.

NOTE MATEMATICE

10. **Acum o sută de ani în lumea matematică.** *Date culese în bibilioteca Seminarului Matematic din Iaşi din revistele timpului.* Cităm din memoriul lui J. LIOUVILLE. „*Sur la théorie des équations différentielles linéaires et sur le développement des fonctions en séries*". (Journal de Mathématiques, t. 3, Ire série, 1838, p. 561) care generalizează problema — azi clasică — a lui STURM-LIOUVILLE, punând astfel o bază pentru studiul sistematic al problemelor „bine puse" sau „definite" din teoria ecuaţiilor diferenţiale.

„Cea mai mare parte a problemelor din fisica matematică conduce la ecuaţii cu derivate parţiale pe care le putem considera, cel puţin în prima aproximaţie, ca liniare. In linii generale problema constă din integrarea acestor ecuaţii, satisfăcând totodată la unele condiţiuni definite, relative fie la câteva puncte singulare ale sistemului material de care ne ocupăm, fie la stadiul iniţial al temperaturilor sau la starea vibratorie a moleculelor sale. Metoda pe care o urmează obişnuit geometrii pentru a atinge acest scop, consistă în a reprezenta integrala cerută printr'o sumă a unui număr infinit de integrale particulare, care verifică toate condiţiunile date cu excepţia acelora care se referă la stadiul iniţial. Fiecare din aceste integrale particulare trebue să satisfacă la o anume ecuaţie diferenţială ordinară, uşor de determinat, care conţine şi câte un parametru variabil cu dânsa. Se are de rezolvat două chestiuni bine distincte. In primul rând aceea a discuţiei ecuaţiei diferenţiale căreia satisfac integralele particulare ale căror mulţimea constitue entitatea generală căutată şi, în al doilea, studiul acestei expresiuni generale şi determinarea constantelor arbitrare pe care le mai conţine, în scopul de a satisface şi la condiţiunile definite, neglijate în primul moment.

Aceste două chestiuni vor face obiectul prezentului memoriu într'o tratare pur analitică, făcându-se astel abstracţie de aplicaţiunile lor la cutare sau cutare problemă concretă...".

11. *Curiozităţi numerice.* La pagina 357, Vol. XLIII, *Gazeta Matematică*, s'au publicat identităţi de forma

$$A^n + B^n + C^n + D^n = E^n + F^n + G^n + H^n$$

valabile pentru $n = 1, 2, 3$.

Astfel de identităţi se pot găsi cu ajutorul relaţiunilor

$$(t-28x)^n+(t-3x)^n+(t+3x)^n+(t+28x)^n=(t-24x)^n+(t-8x)^n+(t+8x)^n+(t+24x)^n$$

$$(t-29x)^n+(t-3x)^n+(t+3x)^n+(t+29x)^n=(t-27x)^n+(t-11x)^n+(t+11x)^n+(t+27x)^n$$

$$(t-29x)^n+(t-8x)^n+(t+8x)^n+(t+29x)^n=(t-28x)^n+(t-11x)^n+(t+11x)^n+(t+28x)^n$$

în care t şi x sunt arbitrare, iar n este 1, 2 şi 3.

Pentru $t = 30$, $x = 1$ obţinem de exemplu egalităţile

$$2^n+27^n+33^n+58^n=3^n+22^n+38^n+57^n$$

$$1^n+27^n+33^n+59^n=3^n+19^n+41^n+57^n$$

$$1^n+22^n+38^n+59^n=2^n+19^n+41^n+58^n$$

adevărate pentru fiecare din valorile 1, 2, 3 ale lui n.

A. MOESSNER.

12. 1) *Asupra problemei: 2356.* („G. M.", XLI — 149).

Se cere simplificarea expresiunei:

$$E=\frac{[(\alpha^2+\beta^2)^4+(\alpha^2-\beta^2)^4+(2\alpha\beta)^4]^2}{(\alpha^2+\beta^2)^8+(\alpha^2-\beta^2)^8+(2\alpha\beta)^8}.$$

Iată o soluţie fără prea multe calcule:

Fie:

$$\alpha^2+\beta^2=x \quad ; \quad \alpha^2-\beta^2=y \quad \text{şi} \quad 2\alpha\beta=z$$

atunci avem:

$$x^2=y^2+z^2,$$

apoi:

$$E=\frac{(x^4+y^4+z^4)^2}{x^8+y^8+z^8}=1+2.\frac{x^4(y^4+z^4)+y^4z^4}{x^8+y^8+z^8}.$$

Cum mai avem:

$$x^4=y^4+z^4+2y^2z^2$$

$$x^8=y^8+z^8+6y^4z^4+4y^6z^2+4y^2z^6.$$

Observăm că:

$$x^4(y^4+z^4)+y^4z^4=y^8+z^8+3y^4z^4+2y^6z^2+2y^2z^6$$

$$x^8+y^8+z^8=2[y^8+z^8+3y^4z^4+2y^6z^2+2y^2z^6].$$

Deci înlocuind, avem :

$$E = 2.$$

2) *Asupra problemei : 4379.*

Ecuaţia generală :

$$(\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x)^n = \sin^n x + \cos^n x + \operatorname{tg}^n x$$

pentru n impar, admite şi soluţiile ecuaţiei din problemă când $n = 3$.

I. L.

13. *Punctul 2⁰* al rezolvirii exerciţiului Nr. 34 din G. M. Vol. XLIII, pag. 558, este eronat.

Se verifică imediat, considerând cazul particular al cercului sau cazul unui segment de dreaptă.

In acelaşi sens mi-au atras atenţiunea şi D-nii M. SARIAN şi V. EKSTEIN.

Ultimul îmi trimete chiar o generalizare a întregului exerciţiu, considerând că segmentul a, face un unghiu φ cu tangenta la curba închisă (C).

Atunci aria cuprinsă între curba (C) şi curba descrisă de extremitatea segmentului $\overline{MM'} = a$, este egală cu :

$$\text{aria } (M') - \text{aria } (M) = \int_0^l a \sin\varphi \, ds + \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} a^2 \, d\alpha \qquad (1)$$

Pentru cazurile particulare $\varphi = 0$ şi $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ avem :

1⁰. aria (M') — aria $(M) = \pi a^2$

2⁰. aria (M') — aria $(M) = al + \pi a^2$.

M. I. F.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Buenos-Aires. Tomul 126. Fascicola 2. August 1938. Seriile simple şi duble ale lui DIRICHLET de J. C. VIGNAUX.

Idem. Tomul 126. Fascicola 3. Septemvrie 1938. Asupra transformării BELTRAMI-POINCARÉ şi generalizarea formulei lui RIEMANN de JUAN CARLOS VIGNAUX.

Boletin Matematico. Buenos-Aires. An. XI. Nr. 15. Octomvrie 1938. O generalizare a ecuaţiunilor diferenţiale omogene de S. SISPANOV. O generalizare a ecuaţiunilor diferenţiale omogene de M. O. GONZALES. Soluţiuni în numere întregi a lanţului multigrad de A. GLODEN.

Idem. An. XI. Nr. 16. Octomvrie 1938. Buenos-Aires.

Buletinul Institutului Român pentru Betoane, Construcţii şi Drumuri. Anul III. Nr. 7—9. Iulie-Septemvrie 1938. Bucureşti.

Bulletin of the American Mathematical Society. Volumul 44. Nr. 9. Partea I. Septemvrie 1938. Menasha, Wis. New-York.

Idem. Volumul 44. Nr. 9. Partea II. Septemvrie 1938.

Idem. Volumnl 44. Nr. 10. Octomvrie 1938. O nouă metodă de însumare pentru seriile divergente de W. A. MERSMAN. Asupra lemei lui SCWVARZ de E. F. BECKENBACH.

Journal de Mathématiques élémentaires pulicat de H. VUIBERT. Paris. An. 63. Nr. 3. 1 Noemvrie 1938.

Idem. An. 63. Nr. 4. 15 Noemvrie 1938.

Pitagora. Revistă de matematici. Craiova. Anul IV. Nr. 2. Noemvrie 1938. Asupra triunghiurilor care au acelaşi centru de greutate de CEZAR COŞNIŢĂ. Asupra formulei binomului de EUG. VIŞA.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVIII. Nr. 9. 15 Noemvrie 1938. Asupra soluţiunilor întregi ale ecuaţiunii diofantiene $x^2 + axy + by^2 = z^k$. O proprietate a sferei osculatoare la o curbă strâmbă de C. BORŞ.

Sphinx. Revue mensuelle des question récréatives. Bruxelles. An. VIII. Nr. 12. Decemvrie 1938.

Suplimentul Gazetei Matematice. An. V. Nr. 3. 1 Decemvrie 1938. Exerciţii rezolvate şi exerciţii propuse.

MIHAIL MANOILESCU. *Incercări în filozofia ştiinţelor economice.* Prelegeri anuale de deschidere a cursului de economie politică la Şcoala Politechnică Bucureşti.

V. THÉBAULT. *Notes de geometrie.* (Extras din Mathesis 1938).

CPT. C-DOR I. LINTEŞ. *Viteza avioanelor şi războiul de mâine.* (Extras din revista Aeronauticei 1938).

CERERI

Răspuns la Cererea Nr. 278.

La cele spuse de D-l V. GHIŢESCU în No. 2, pag. 83—84, am de adăogat următoarele:

1. După afirmaţiunea D-lui G. ŢITEICA, care în timpul ocupaţiunii inamice a fost în Bucureşti, devastarea Liceului Sf. Sava a fost făcută de Turci, nu de Nemţi.

2. Fotografia dată la pag. 83 este făcută înainte de 1881, căci pe dosul ei este scris: „*Franz Duschek*, photograful Curţei J. SELLE DOMNITORUL CAROL I". Deci este anterioară întemeierii Regatului Român. Fotografia reprezintă dar pe C. DUMITRESCU pe timpul când era student.

3. Pe C. DUMITRESCU l'am avut profesor de matematici timp de cinci ani la Şcoala comercială din Bucureşti. Era un profesor eminent, şi preda nu numai Aritmetica, ci şi Geometria elementară, Algebra şi Teoria operaţiunilor financiare. Poseda bine matematicile: nu era problemă pe care o luam de prin cărţi şi pe care nu o puteam, face fără ca arătând-o lui să nu ne-o facă imediat. In tot timpul celor cinci ani nu a absentat decât în o singură lecţie din anul şcolar 1886—1887 când a trimis în locul său pe Profesorul de Geografie M. BRĂTILĂ, care ne-a spus că C. DUMITRESCU absentează pentru că este dus la Concursul pe care îl trece pentru ocuparea catedrei de matematici dela Sf. Sava; deci cam de pe atunci a fost profesor la acel Liceu.

4. Dela un fost elev al său, dela acel Liceu, mi s'a spus că, după ce se făcuse mai bine şi a eşit dela Casa de sănătate, la prima lui oră de curs dela Liceu s'a dus acolo să-şi facă lecţia. In clasă a găsit pe un tânăr suplinitor, pe care l'a luat de gât şi l'a dat afară spunându-i: *«Ce lesne vă este să vă cocoţaţi pe catedre fără să treceţi concursuri!»*.

5. Fiind cam mic de statură, elevii îi ziceau *«Bimbirică»*.

I. IONESCU.

DIVERSE

a) Şedinţele Societăţii „Gazeta Matematică".

Joi 1 Decemvrie a. c., a avut loc şedinţa Comisiunei pentru acordarea bursei „PROFESOR ION IONESCU".

Au luat parte la şedinţă D-nii: GL. GH. BUICLIU, Profesor ION IONESCU, Ing. CR. MATEESCU şi Ing. D. STAN din membrii prevăzuţi la art. 7 al regulamentului bursei, precum şi D-l Ing. A. IOANOVICI, ca informator.

Comisiunea a acordat, cu începere de la 15 Octomvrie 1938 două burse din fondul „PROFESOR ION IONESCU":

O bursă D-lui Locot. C. N. AVRAM şi o bursă D-lui Locot. I. C. ŞOVA, ambii elevi în anul III, secţia construcţii a Şcoalei Politechnice Regele Carol II.

Fiecare bursă este de câte 3000 lei lunar, şi se plăteşte în condiţiile art. 8 al regulamentului.

b) **Sporirea Bibliotecii.**

JOSEPH NEUBERG. Cours d'Algèbre supérieure. Paris et Liège 1907.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

BOGDAN G. IONESCU. Tratat de algebră elementară pentru şcoalele secundare. Bucureşti 1900.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

JOSEPH BERTRAND. Traité d'Algèbre. Première partie. Paris 1869.
Donată de D-l LT. C. IONESCU-ŢIU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3052. *Fie* M *un număr oarecare de* m *cifre. Se desparte* M *în grupe de câte* 2n *cifre dela dreapta spre stânga şi fie* M_1 *suma acestor grupe. Se desparte de asemenea şi* M_1 *în grupe de câte* 2n *cifre şi fie* M_2 *suma acestor noui grupe. Se repetă mereu această operaţiune, până se capătă un număr* M_i, *de cel mult* 2n *cifre.*

Să se demonstreze congruenţa :

$$M \equiv M_i \qquad \text{mod. } (10^n + 1)$$

unde :

$$n \leqslant \frac{1}{2} m.$$

CPT. COMANDOR GR. ZAPAN.

I. *Soluţie şi generalizare* dată de D-l AL. TAUBER (Botoşani).

1) *Fie* M *un număr oarecare de* m *cifre. Se desparte* M *în grupe de câte* pn *cifre dela dreapta spre stânga şi fie* M_1 *numărul obţinut luând suma acestor grupe când* p *este par, sau diferenţa dintre suma grupelor de ordin par şi a celor de ordin impar, când* p *este impar. Se procedează la fel cu* M_1 *şi se obţine în aceleaşi condiţii numărul* M_2. *Se repetă mereu această operaţiune, până ce se capătă un număr* M_i, *de cel mult* pn *cifre. Să se demonstreze congruenţa :*

$$M \equiv M_i \qquad \text{mod. } (10^n + 1)$$

unde :

$$n \leqslant \frac{1}{p} . m.$$

Fie:

$$M = G_k \cdot 10^{(k-1)pn} + G_{k-1} \cdot 10^{(k-2)pn} + \ldots + G_2 \cdot 10^{pn} + G_1 .$$

Dar:

$$10^n = \mathcal{M}(10^n + 1) - 1$$
$$\therefore \quad 10^{pn} = \mathcal{M}(10^n + 1) + (-1)^p$$
$$\therefore \quad 10^{2pn} = \mathcal{M}(10^n + 1) + (-1)^{2p}$$
$$\therefore \quad 10^{3pn} = \mathcal{M}(10^n + 1) + (-1)^{3p}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Deci:

$$M = \mathcal{M}(10^n + 1) + G_1 \cdot (-1)^p + G_2 \cdot (-1)^{2p} + G_3 \cdot (-1)^{3p} + \ldots$$

Insă:

$$G_1 \cdot (-1)^p + G_2 \cdot (-1)^{2p} + G_3 \cdot (-1)^{3p} + \ldots = M_1 .$$

Deci:

$$M = \mathcal{M}(10^n + 1) + M_1$$
$$\therefore \quad M \equiv M_1 \qquad \text{mod. } (10^n + 1).$$

Analog se constată că:

$$M_1 \equiv M_2 \ , \ M_2 \equiv M_3 , \ldots , \ M_{i-1} \equiv M_i \qquad \text{mod. } (10^n + 1).$$

Deci:

$$M \equiv M_i \qquad \text{mod. } (10^n + 1).$$

2) *Fie* M *un număr oarecare de* m *cifre. Se desparte* M *în grupe de câte* pn *cifre, dela dreapta spre stânga, şi fie* M_1 *suma acestor grupe. Se procedează la fel cu* M_1 *şi se obţine în aceleaşi condiţii numărul* M_2. *Se repetă mereu această operaţiune până se capătă un număr* M_i, *de cel mult* pn *cifre. Să se demonstreze congruenţa:*

$$M \equiv M_i \qquad \text{mod. } (10^n - 1).$$

Demonstraţia este analoagă celei de mai sus.

II. *Soluţie* dată de D-l MARTINIAN BOGDAN (Caracal).

Având în vedere corolarul dela pag. 114, G. M. XXIV şi aplicaţiunile lui, observăm că M_i este restul diviziunii lui M prin $(10^{2n} - 1)$, adică avem:

$$M \equiv M_i \qquad \text{mod. } (10^{2n} - 1)$$

şi cum:

$$10^{2n} - 1 = (10^n + 1)(10^n - 1)$$

rezultă:

$$M \equiv M_i \qquad \text{mod. } (10^n + 1)$$

c. c. t. d.

Notă. 1. Alte soluţii bune s'au primit dela D-nii: MIRCEA I. ADAM, † CONST. I. GEORGESCU, † OVIDIU G. POPEA, MARIN ŞTEFAN şi WILHELM I. SOLOMON.

2. Au generalizat problema pentru sistemul de numeraţie în baza *b*, D-nii: † OVIDIU G. POPEA şi MARIN ŞTEFAN.

3. Toţi corespondenţii observă că relaţiunea dată în această problemă este satisfăcută şi de modulul $10^n - 1$, şi deci de $10^{2n} - 1$.

4. D-l AL. TAUBER observă că această problemă ne poate folosi la *facerea probei unei înmulţiri.*

In adevăr, dacă:

$$A \cdot B = C$$

atunci vom avea şi:

$$A_i \cdot B_i \cdot C_i \quad \text{mod. } (10^n + 1) \text{ sau } (10^n - 1).$$

PROBLEMA 3702. *Se scrie alfabetul de 25 litere dela* a *la* z *şi se numerotează acele litere cu numerele* 1 — 25.

Numele unui matematician din secolul XVIII îl scriem cu numerele corespunzătoare literelor, unul după altul, fără separaţiune. El apare atunci sub forma ABCCBACD, *în care literele mari indică cifre,* A *vine dela un număr de o cifră, iar celelalte dela numere de două cifre, reprezentând literele alfabetului. Se mai ştie că*

$$A + B + C = D.$$

Se cere numele matematicianului.

M. G. PAMFIL.

Soluţie dată de D-l EMANUEL ROSENBLATT, liceul com. israelite Galaţi.

Considerăm alfabetul şi numerele corespunzătoare literelor sale:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*x*	*y*	*z.*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Numele matematicianului este format din literele corespunzătoare numerelor: A, BC, CB, A, CD. Aceste numere sunt, evident, aşezate în dreptul literelor din alfabet. Cel mai mare număr, din acelea aşezate sub literele din alfabet, fiind 25, urmează că literele B, C nu pot avea decât valorile 1 şi 2. Aceste cifre fiind diferite (B, C), una din ele are valoarea 1 şi cealaltă 2.

Aşa dar:

$$B = 1,\ C = 2 \quad \text{sau} \quad B = 2,\ C = 1.$$

Avem:

$$B + C = 3.$$

Inlocuind în ecuaţia $A + B + C = D$, obţinem:

$$(1) \qquad A + 3 = D.$$

A este diferit de B şi C; B şi C fiind reprezentate prin 1 şi 2, rezultă că A poate fi 3, 4, 5, 6. Valorile 7, 8, 9 nu pot fi atribuite lui A în baza relaţiei (1), unde D este cel mult 9.

Deoarece A este cel puţin 3, din (1) se vede că D este cel puţin 6.

Din analiza anterioară, reţinem:

B poate fi 1 sau 2;
C „ „ 1 sau 2;
A „ „ 3, 4, 5, 6;
D „ „ 6, 7, 8, 9.

Deoarece $D > 5$ şi numărul $CD < 25$, urmează că $C = 1$; deci $B = 2$. Pentru A şi D folosim relaţia (1).

Numele matematicianului poate fi de forma:

3 . 21 . 12 . 3 . 16
4 . 21 . 12 . 4 . 17
5 . 21 . 12 . 5 . 18
6 . 21 . 12 . 6 . 19.

Inlocuind numerele prin literele corespunzătoare din alfabet, numele matematicianului trebue căutat printre următoarele:

culcp, duldq, euler, fulfs.

Aşa dar numele matematicianului este EULER.

Au rezolvat bine problema D-nii: N. ALDEA, ILIE N. ALIMAN, IOAN BOIAN, G. P. BOERESCU, VLADIMIR CRIVĂŢ, VASILE G. DRĂGUŢ, ION FILIP, P. I. GHIŞOIU, CONST. HEYTMANEK, SORIN I. ISCU, CONST. D. IONESCU-ŢIU, HAR. P. IONESCU, M. D. MOTOC, AUREL PÂRVU, CORNELIU N. POPESCU, AL. C. RAICU şi D. ŞERBAN-ULMENI.

PROBLEMA 4232. *Să se determine* n *astfel încât expresiunea*

$$E = (x+y)^n + (-x)^n + (-y)^n$$

să se dividă

1. *Prin:*

$$x^2 + xy + y^2$$

2. *Prin:*

$$(x^2 + xy + y^2)^2.$$

I. B. FLORESCU.

Făcând $y = tx$ în expresiunile date se obţine:

$$E = x^n [(t+1)^n + (-t)^n + (-1)^n] = x^n E_1$$

$$P = x^2 [t^2 + t + 1] = x^2 P_1$$

$$P^2 = x^4 [t^2 + t + 1]^2 = x^4 P_1^2.$$

Fie 1, α, α^2 rădăcinile cubice ale unităţii. Se ştie că

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \alpha^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

şi se poate verifica uşor că

(1) $$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

(2) $$(\alpha + 1)^2 = \alpha$$

(3) $$\alpha^{3m} = 1.$$

In fine se vede că dacă $n = 1$, expresiunea E devine zero şi deci problema nu are sens. Avem deci $n > 1$.

I. *Condiţiunile ca* E *să se dividă prin* P. De oarece $n > 1$, x^n se divide totdeauna prin x^2. Deci pentru ca E să se dividă prin P este necesar şi suficient ca E_1 să se dividă prin

$$P_1 = (t^2 + t + 1) = (t - \alpha)(t - \alpha^2)$$

sau ceea ce este tot una, trebue ca E_1 să se anuleze pentru t egal cu α şi cu α^2.

1^0. E_1 *se anulează pentru* $t = \alpha$. Trebue determinat n aşa ca

(4) $$(\alpha + 1)^n + (-\alpha)^n + (-1) = 0.$$

Deosebim două cazuri:

a) $n = 2p$ şi *b)* $n = 2p + 1$

Cazul a). Ducând pe *a)* în (4) şi ţinând seamă de (2) găsim că trebue să avem

(5) $$\alpha^{2p} + \alpha^n + 1 = 0.$$

Comparând pe p cu divizorul 3 se vede că (5) nu poate fi adevărată când $p = 3m$ pentru motivul dela (3).

In schimb pentru

$$p = 3m + 1 \qquad \text{sau} \qquad p = 3m + 2$$

(5) devine respectiv identităţile

$$\alpha^2 . \alpha^{6m} + \alpha . \alpha^{3m} + 1 \equiv 0$$

$$\alpha . \alpha^{6m+3} + \alpha^2 . \alpha^{3m} + 1 \equiv 0.$$

Trecând acum dela p la n se vede că în cazul *a)* suma E se divide prin P când

$$\boxed{n = 6m \pm 2}.$$

Cazul b). Analog cu *a)* trebue ca

(6) $$(\alpha + 1)\alpha^p - \alpha^{2p+1} - 1 = 0.$$

Pentru

$$p = 3m \quad \text{şi} \quad p = 3m + 2$$

se găsesc identităţile

$$(\alpha + 1)\alpha^{3m} - \alpha . \alpha^{6m} - 1 \equiv 0$$

$$(\alpha + 1)\alpha^2 . \alpha^{3m} - \alpha^2 . \alpha^{6m+3} - 1 \equiv 0$$

pe când pentru

$$p = 3m + 1$$

(6) devine

$$\alpha^2 + \alpha - 1 \not\equiv 0.$$

Deci în cazul *b)*, E se divide prin P când

$$\boxed{n = 6m \pm 1}$$

2°. E_1 *se anulează pentru* $t = \alpha^2$. Trebue să avem

$$(\alpha^2 + 1)^n + (-\alpha^2)^n + (-1)^n = 0$$

sau, ceea ce este tot una.

(7) $$(-\alpha)^n + (-\alpha^2)^n + (-1)^n = 0.$$

Şi aici se deosebesc două cazuri:

Cazul a'. Când $n = 2p$ şi (7) devine

$$\alpha^{2p} + \alpha^{4p} + 1 = 0$$

care este adevărată pentru

$$p = 3m + 1 \quad \text{şi} \quad p = 3m + 2$$

ceea ce dă pentru n valorile

$$\boxed{n = 6m \pm 2}$$

găsite şi *a)* cazul 1°.

Cazul b'. Când $n = 2p + 1$ egalitatea (7) devine

$$\alpha \cdot \alpha^{2p} + \alpha^2 \cdot \alpha^{4p} + 1 = 0$$

care este adevărată pentru

$$p = 3m \quad \text{şi} \quad p = 3m + 2$$

$$\therefore \quad \boxed{n = 6m \pm 1}.$$

Centralizând rezultatele găsite până aici se vede că E se divide prin P când $n > 1$ şi

$$\boxed{n = 6m \pm 1} \quad \text{şi} \quad \boxed{n = 6m \pm 2}.$$

II. *Condiţiunile ca* E *să se dividă prin* P^2. Trebue ca $n > 3$ căci altfel gradul lui E ar fi mai mic decât gradul lui P. In acest caz x^n se divide totdeauna prin x^4. Mai trebue căutate condiţiile ca E_1 să se dividă prin P_1^2, sau ceea ce este tot una, va trebui ca derivata lui E_1 să se anuleze pentru rădăcinile derivatei lui P_1^2. Avem:

$$E_1' = n[(t+1)^{n-1} - (-t)^{n-1}]$$

$$(P_1^2)' = 2(2t+1)(t^2+t+1).$$

Rădăcinile derivatei egalată cu zero, sunt

$$-\tfrac{1}{2} \; ; \; \alpha \; ; \; \alpha^2.$$

Se vede că

$$E_1'(-\tfrac{1}{2}) = n[(-\tfrac{1}{2}+1)^{n-1} - (\tfrac{1}{2})^{n-1}] \equiv 0$$

ori care ar fi n.

E_1' devine pentru $t = \alpha$:

$$E_1'(\alpha) = n[(\alpha+1)^{n-1} - (-\alpha)^{n-1}]$$

sau ţinând seamă de (1)

$$E_1'(\alpha) = n[(-\alpha^2)^{n-1} - (-\alpha)^{n-1}].$$

Pentru $n = 2p$ paranteza devine

$$-\alpha^{4p-2} + \alpha^{2p-1} = \alpha^{2p-1}[1 - \alpha^{2p-1}]$$

care se anulează pentru

$$2p - 1 = 3m \qquad \therefore \qquad \boxed{n = 3m+1}.$$

Pentru $n = 2p+1$ se găseşte

$$E_1'(\alpha) = n[(\alpha+1)^{2p} - (-\alpha)^{2p}] = n\alpha^{2p}(\alpha^{2n} - 1)$$

care se anulează pentru

$$p = 3m \qquad \therefore \qquad \boxed{n = 3m+1}.$$

In fine pentru $t = \alpha^2$ se găseşte

$$E_1'(\alpha^2) = n[(\alpha^2+1)^{n-1} - (-\alpha^2)^{n-1}]$$

care se anulează pentru

$$\boxed{n = 3m+1}.$$

Combinând rezultatele dela I cu cele dela II se vede că E *se divide simultan şi prin* P *şi prin* P^2 *atunci când* $n > 3$ şi

$$\boxed{n = 6m+1} \text{ sau } \boxed{n = 6m-2}.$$

Notă. 1°. Soluţia precedentă este redijată după soluţia trimisă de D-l D. D, MAVRODIN (când era elev în clasa VII-a la Liceul „M. Eminescu", Bucureşti).

2°. D-nii: G. G. CONSTANTINESCU şi M. I. PREDESCU au dat numai soluţia parţială $6m \pm 1$ pentru I.

3°. D-l V. CEAUŞESCU a dat soluţia parţială $6m + 1$ care convine ambelor cazuri.

4°. D-nii: V. CEAUŞESCU şi M. I. PREDESCU au folosit indicaţiunile date în *Revista Matematică din Timişoara* Vol. XIII, pag. 97 în articolul *O problemă de divizibilitate* de G-L GH. BUICLIU.

5°. Nu menţionăm numele rezolvitorilor, care de şi au întrebuinţat raţionamente bune, totuşi au găsit din cauza greşelilor de calcul rezultate de forma $3m \pm 1$.

GH. B.

PROBLEMA 4442. a, b, c *fiind 3 numere întregi şi pozitive, să se rezolve în numere întregi şi pozitive sistemul*

$$x+a=x(a-y)\ ,\quad y+b=y(b-z)\ ,\quad z+c=z(c-x).$$

TIBERIU POPOVICIU.

Soluţie. Din cele trei ecuaţii deducem:

$$(1)\quad a=\frac{x(y+1)}{x-1}=1+y+\frac{y+1}{x-1}\ ,\quad b=1+z+\frac{z+1}{y-1}\ ,$$

$$c=1+x+\frac{x+1}{z-1}\ .$$

Rezultă că numerile:

$$(2)\qquad X=\frac{y+1}{x-1}\ ,\quad Y=\frac{z+1}{y-1}\ ,\quad Z=\frac{x+1}{z-1}$$

trebue să fie întregi şi (evident) pozitive. E evident deasemenea că x, y, z trebue să fie egali cel puţin cu 2.

Observăm acum că:

$$XYZ=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{y+1}{y-1}\right)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)>1,$$

presupunând x, y, z întregi şi pozitivi. Cel puţin unul din numerile X, Y, Z este deci >1. Să presupunem, pentru fixarea ideilor

$$X\geqq 1\ ,\quad Y\geqq 1\ ,\quad Z\geqq 2.$$

Aceste inegalităţi se mai pot scrie

$$y\geqq x-2\ ,\quad z\geqq y-2\ ,\quad x\geqq 2z-3,$$

din care se deduce

$$x\geqq 2(y-2)-3=2y-7\geqq 2(x-2)-7=2x-11 \text{ sau } x\leqq 11.$$

Rezultă apoi

$$11\geqq 2z-3\ ,\quad z\leqq 7\ ,\quad 7\geqq y-2\ ,\quad y\leqq 9.$$

Ţinând seamă de faptul că dacă

$$x=x_0\ ,\quad y=y_0\ ,\quad z=z_0$$

e o soluţie, orice permutare circulară a numerilor x_0, y_0, z_0 este deasemenea o soluţie, e destul a determina pe x, y, z astfel ca

$x \leqq 11$, $y \leqq 9$, $z \leqq 7$ şi ca numerile (2) să fie întregi. Observăm că odată valorile lui x, y, z găsite rezultă, prin formulele (1), valorile corespunzătoare ale lui a, b, c. Prin un număr finit de încercări putem deci rezolva complet problema. Găsim astfel soluţiile

x	y	z	a	b	c
2	2	2	6	6	6
4	2	2	4	6	10
6	4	2	6	4	14
3	3	3	6	6	6
5	3	3	5	6	9
8	6	4	8	6	12
7	5	3	7	5	12
11	9	7	11	9	14

Precum şi încă 12 soluţii care se obţin prin permutări circulare. Total 20 de soluţii.

Observare. Condiţia ca numerile a, b, c să fie pozitive e superfluă.

Generalizare. Mai general fie sistemul:

$$x_i + y_i = x_i (y_i - x_{i+1}) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad , \quad x_{n+1} = x_1 .$$

Dacă se presupune că numerile y_i sunt întregi, acest sistem *nu are decât un număr finit de soluţii în necunoscutele x_i întregi şi pozitive.* Demonstraţia se face exact ca mai sus. Se poate observa că prin permutări circulare deducem noi soluţii din o soluţie deja găsită. Trebue ca numerile

$$X_i = \frac{x_i + 1}{x_i - 1} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

să fie întregi (pozitive). Trebue deasemenea ca $x_i \geqq 2$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Avem $X_1 X_2 \ldots X_n > 1$, din care se deduce ca mai sus că, de ex.,

$$x_{i+1} \geqq x_i - 2 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \quad , \quad x_1 \geqq 2x_n - 3.$$

Rezultă că e destul a încerca numerile x_i astfe ca

$$x_i \leqq 4n - 1 - 2(i-1) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sistemul are efectiv soluţii. De exemplu:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 2 \quad , \quad y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 6$$

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 3 \quad , \quad y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 6$$

$$x_i = 4n - 1 - 2(i-1) \quad , \quad y_i = x_i \quad , \quad y_n = 2x_n$$

$$i = i, 2, \ldots, n \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

A rezolvat foarte bine problema, găsind toate soluţiile, D-l GH. CONSTANTINESCU. S'au mai primit două soluţii inexacte.

T. P.

PROBLEMA 4507. *Să se rezolve ecuaţiunea:*

$$x^4 - 4a^2 x + a^2(1-2a) = 0.$$

TUDOR STOICESCU.

I. Fie în general ecuaţiunea:

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Vom căuta să descompunem primul membru într'o diferenţă de două patrate. Pentru aceasta vom scrie:

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r \equiv \left(x^2 + \frac{n}{2}x + \lambda\right)^2 - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma),$$

unde α, β, γ, depinde de n, p, q, r, λ, iar λ trebue determinat astfel ca $\beta^2 = 4\alpha\gamma$.

(Exercices Méthodiques de Math. Générales, p. MARCEL-YVON, p. 130). Se găseşte:

$$\alpha = \frac{n^2}{4} + 2\lambda - p, \; \beta = n\lambda - q, \; \gamma = \lambda^2 - r,$$

unde λ verifică ecuaţia de gr. III-lea:

$$(n\lambda - q)^2 - (n^2 + 8\lambda - 4p)(\lambda^2 - r) = 0.$$

In cazul problemei de faţă avem:

$$n = p = 0, \; q = -4a^2, \; r = a^2(1-2a).$$

Ecuaţia în λ devine:

$$16a^4 - 8\lambda[\lambda^2 - a^2(1-2a)] = 0,$$

care se mai scrie:

$$\lambda^3 - a^2(1-2a)\lambda - 2a^4 = 0,$$

şi se vede numaidecât rădăcina $\lambda = a$ de unde:

$$\alpha = 2a,\ \beta = 4a^2,\ \gamma = 2a^3,$$

şi ecuaţia se mai poate scrie:

$(x^2+a)^2 - 2a(x+a)^2 = 0$, şi se descompune în:

$x^2 - \sqrt{2a}\,x + (1-\sqrt{2a})\,a = 0$ şi $x^2 + \sqrt{2a}\,x + (1+\sqrt{2a})\,a = 0$.

cu rădăcinile:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2a} \pm \sqrt{2a(2\sqrt{2a}-1)}}{2};\quad x_{3,4} = \frac{\sqrt{2a} \pm \sqrt{-2a(1+2\sqrt{2a})}}{2}.$$

II. *Metoda lui* DESCARTES (Niewenglowski, Cours d'Algèbre, Tome II, p. 453).

Ecuaţia:

$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0$, se descompune în: $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ şi:

$$x^2 + \alpha' x + \beta' = 0, \text{ unde: } \alpha = \frac{A}{2} + z,\ \alpha' = \frac{A}{2} - z,$$

iar şi β' satisfac relaţiile:

$$\beta + \beta' = z^2 + p - \frac{n^2}{4},\ z(\beta' - \beta) = q - \frac{n}{2}\left(z^2 + p - \frac{n^2}{4}\right),$$

unde z e o rădăcină a ecuaţiei de gradul al 3-lea în z^2:

$$z^2\left[\left(z^2 + p - \frac{n^2}{4}\right)^2 - 4r\right] - \left[\frac{n}{2}\left(z^2 + p - \frac{n^2}{4}\right) - q\right]^2 = 0,$$

şi dacă punem:

$$z^2 + p - \frac{n^2}{4} = y, \text{ rezolvanta ia forma mai simplă:}$$

$$\left(y + \frac{n^2}{4} - p\right)\left(y^2 - 4r\right) - \left(\frac{n}{2}y - q\right)^2 = 0.$$

In cazul problemei 4507 rezolvanta în y devine:

$$y\left[y^2-4a^2(1-2a)\right]-16a^4=0,$$

sau:

$$y^3-4a^2(1-2a)y-16a^4=0.$$

de unde:

$$y=2a, z^2=y=2a,\ \alpha=\sqrt{2a}, \alpha'=-\sqrt{2a}, \beta=a\left(\sqrt{2a}+1\right),$$

$$\beta'=a(1-\sqrt{2a}).$$

obţinem aceeaşi descompunere ca în prima soluţie.

III. *Altă metodă* (Niewenglowski, cours d'Algèbre, Tome II, p. 458).

Fie ecuaţia:

$$x^4+nx^3+px^2+qx+r=0,$$

punem:

$x^2=y$ şi considerăm ecuaţia:

$$y^2+nxy+py+qx+r+\lambda(x^2-y)=0,$$

formăm ecuaţia în λ relativă la conicele:

$$y^2+nxy+py+qx+r=0\ ,\ x^2-y=0.$$

Fie λ_1 o rădăcină reală a ecuaţiei în λ. Vom avea:

$$y^2+nxy+py+qx+r+\lambda_1(x^2-y)=(ux+vy+w)(u'x+v'y+w').$$

Inlocuind y cu x^2, avem de rezolvat ecuaţiile:

$$u\lambda+vx^2+w=0\ ,\ u'x+v'x^2+w'=0.$$

In cazul problemei ecuaţia în λ devine:

$$\lambda^3-4a^2(1-2a)\lambda+16a^4=0$$

cu rădăcina $\lambda_1=-2a$, şi ecuaţia devine:

$$y^2-4a^2x+a^2(1-2a)-2a(x^2-y)\equiv(y+a)^2-2a(x+a)^2.$$

Ajungem la aceeaşi descompunere.

DIMITRIE MAVRODIN
Student

IV. *Soluție* dată de D-l O. IANCULESCU.

Ecuația dată se poate pune sub forma:

$$(x^2+a)^2-2a(x+a)^2=0$$

$$\therefore\ [(x^2+a)+(x+a)\sqrt{2a}]\,[(x^2+a)-(x+a)\sqrt{2a}]=0$$

de unde rezultă imediat:

$$x_{1,2}=\frac{\sqrt{2a}}{2}\left[1\pm\sqrt{2\sqrt{2a}-1}\right]$$

$$x_{3,4}=\frac{\sqrt{2a}}{2}\left[-1\pm\sqrt{2\sqrt{2a}-1}\right].$$

Au mai rezolvat problema 4507 D-ra MARGARETA CARACUDOVICI și D-nii: MARCEL AMĂRĂȘTEANU, EM. BLAGA, I. BOGDAN, V. BUCUR, I. BUZINCU, P. COJOCARU, A. CORNĂȚEANU, C. COTESCU, CĂLIN-ION DIMITRIU, I. ENACHE, V. GADIDOV, C. GAVRILESCU, C. GHIȘOIU, EMIL DE HERBAY, AL. JIPA, D. MIHALCEA, MIRCEA-LEONTE NEGREA, C. PRODAN, SERGIU TARASIUC.

PROBLEMA 4622. a, b, c *fiind laturile unui triunghiu, să se arate că avem, oricare ar fi unghiul* φ, *inegalitatea:*

$$a^2\leqslant\frac{b^2}{\cos^2\varphi}+\frac{c^2}{\sin^2\varphi}\ .$$

N. CIORĂNESCU.

1°. *Soluție* dată de D-nii: MIRCEA L. A. NEGREA (Brăila), I. ȚIȚEICA și FLORESCU VICTOR (Lic. mil. „N. Filipescu"). Plecând dela inegalitatea evidentă:

$$(b\,\mathrm{tg}\varphi-c\,\mathrm{cotg}\varphi)^2\geqslant 0$$

se obține desvoltând:

$$b^2\,\mathrm{tg}^2\varphi+c^2\,\mathrm{cotg}^2\varphi-2bc\geqslant 0$$

$$b\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\right)+c^2\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-1\right)-2bc\geqslant 0$$

$$\frac{b^2}{\cos^2\varphi}+\frac{c^2}{\sin^2\varphi}\geqslant(b+c)^2.$$

Având $b + c > a$, urmează cu atât mai mult:

$$\frac{b^2}{\cos^2\varphi} + \frac{c^2}{\sin^2\varphi} \geqslant a^2.$$

D-l L. A. NEGREA observă că egalitatea nu poate avea loc, decât în cazul:

$$b = a\cos^2\varphi \qquad c = a\sin^2\varphi.$$

Intr'adevăr, ar trebui să avem:

$$\left(\frac{b}{a\cos\varphi}\right)^2 + \left(\frac{c}{a\sin\varphi}\right)^2 = 1$$

de unde:

$$(1) \qquad b = a\cos\varphi.\cos u \qquad c = a\sin\varphi.\sin u$$

dar a, b, c fiind laturile unui triunghiu propriu sau impropriu, avem $b + c \geqslant a$, şi ţinând seama de (1), avem:

$$\cos(\varphi - u) \geqslant 1$$

de unde $u = \varphi$.

2°. *Soluţie* dată de D-nii: BAL LASCU (student Cluj), P. DOBRESCU (elev S. P. O.), MARTEŞ GRIGORE (şc. Navală), CHIRIŢĂ MIHAIL (şc. Marină C-ţa). Inegalitatea dată devine:

$$(1) \qquad a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi \leqslant b^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi$$

înlocuind $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$,

obţinem $a^2\sin^4\varphi - (a^2 - b^2 + c^2)\sin^2\varphi + c^2 \geqslant 0.$

Realizantul este:

$$(a^2 - b^2 + c^2)^2 - 4a^2c^2 = [(a+c)^2 - b^2][(a-c)^2 - b^2]$$
$$= -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = -2^4.S^2$$

S fiind suprafaţa triunghiului de laturi a, b, c.

Rezultă că inegalitatea (1), este adevărată.

S'au mai primit soluţiuni bune dela D-nii: I. BUZINCU (abs. lic. mil. Iaşi) şi C. GAVRILESCU (şc. preg. of. Buc.).

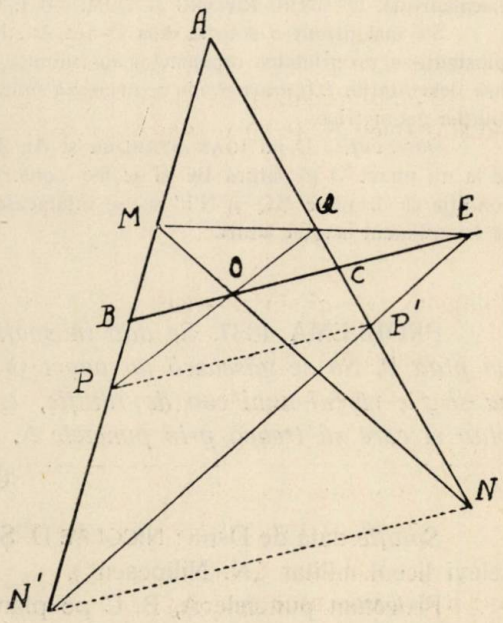
Dela D-nii A. CĂLINESCU (R. de Vede), M. VASILESCU STABU (lic. M. Viteazul — Alba Iulia), D-ra A. VASILESCU (lic. Carmen Silva — Timişoara) şi dela un ANONIM s'au primit soluţiuni incomplete.

PROBLEMA 4834. *Prin mijlocul laturii* BC *a triunghiului* ABC *se duc două drepte arbitrare* D *şi* D'. *Dreapta* D *taie laturile* AB *şi* AC *respectiv în punctele* M *şi* N, *iar paralela dusă din* N *la* BC *taie latura* AB *în* N'.

Dreapta D' *taie laturile* AB *şi* AC *respectiv în* P *şi* Q, *iar paralela dusă prin* P *la* BC *taie latura* AC *în* P'. *Să se arate că dreptele* N'P' *şi* MQ *se întâlnesc pe latura* BC *a triunghiului.*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţia I-a dată de D-nii: NIC. D. ŞTEFĂNESCU, VICTOR FLORESCU (elevi liceul militar „N. Filipescu"), I. I. CRĂCIUN, IOAN V. JAREGHIE, DINU TR. MIRONESCU, CONST. V. PANTELIMON, MIRCEA D. POPA, AL. I. ROHR, I. STREDER (elevi liceul militar Iaşi), M. AL. VASILESCU-STABU (Alba-Iulia), SANDU R. TURCU (Brăila), ADOLF O. ŞAICHIN (liceul Matei Basarab, Bucureşti), GH. B. N. IONESCU (liceul Ploeşti) şi AUREL I. CORNĂŢEANU.



Notăm cu O mijlocul laturii BC şi presupunem că dreptele N'P' şi MQ ar tăia latura BC în două puncte diferite E' şi E.

Teorema lui MENELAUS, aplicată transversalelor MN şi PQ, ne dă:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 1;$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

Deoarece $\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = -1$,

iar PP' şi NN' sunt paralele la BC, rezultă:

$$(1) \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = -\frac{\overline{N'A}}{\overline{N'B}} \; ; \quad \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = -\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'C}} .$$

Aceeaşi teoremă, aplicată transversalelor MQE şi N'P'E', ne dă:

$$(2)\quad \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 1 \;;\; \frac{\overline{E'B}}{\overline{E'C}} \cdot \frac{\overline{P'C}}{\overline{P'A}} \cdot \frac{\overline{N'A}}{\overline{N'B}} = 1.$$

Ţinând seamă de relaţiile (1), relaţiile (2) ne dau $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{E'B}}{\overline{E'C}}$, ceea ce arată că punctele E şi E' sunt confundate, deci N'P' şi MQ se întâlnesc în acelaşi punct pe BC.

Soluţia II-a dată de D-nii: PAUL DOBRESCU (Greci-Ilfov), M. C. POSTELNICESCU şi RADU APOSTOL (lic. mil. „N. Filipescu").

Din relaţiile (1) dela prima soluţie rezultă că diviziunile (ABMN') şi (ACQP') sunt armonice şi având punctul A comun, dreptele BC, MQ, N'P' ce unesc punctele omoloage sunt concurente.

Au rezolvat problema pe cale analitică D-nii: SUBLT. MIRCEA GRUMĂZESCU, GH. GH. CARDARA (student Bucureşti), TR. PREDOESCU-ŢÂNŢĂRENI (bacalaureat), DUMITRU RIPIANU şi DUMITRU I. CIOC (lic. mil. Craiova).

S'a mai primit o soluţie dela D-nul AL. POPESCU-ZORICA (Bucureşti), folosindu-se proprietatea rapoartelor anarmonice egale, ce au un punct comun, însă desvoltările *trigonometrice* ce urmează sunt prea lungi faţă de simplitatea soluţiei geometrice.

Observaţii: D-nii IOAN STREDER şi AL. ROHR demonstrează că dacă se ia un punct O pe latura BC şi se fac construcţiile indicate în problemă, condiţia ca dreptele MQ şi N'P' să se întâlnească pe BC este ca punctul O să fie mijlocul acestei laturi.

PROBLEMA 4837. *Se dau în spaţiu trei puncte* A, B, C *şi un plan* P. *Să se găsească un punct* O *situat în planul* P *astfel ca să fie vârful unui con de rotaţie, cu axa perpendiculară pe plan şi care să treacă prin punctele* A, B, C.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de D-nii: NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU şi I. I. ŢIŢEICA (elevi liceul militar „N. Nilipescu").

Proectăm punctele A, B, C pe planul P în *a*, *b*, *c*.

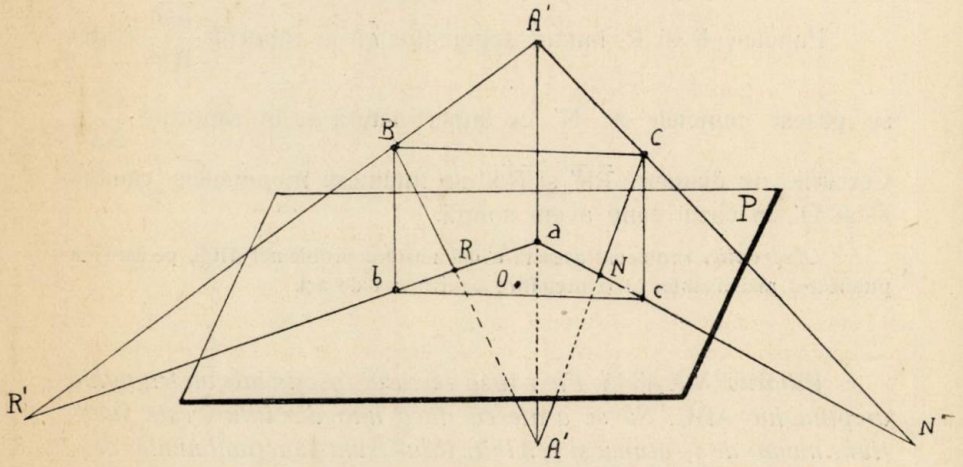
Deoarece axa conului e perpendiculară pe plan e evident că generatoarele OA, OB, OC sunt egal înclinate pe planul P, făcând cu acesta complementele unghiurilor pe care le face cu axa. Deci triunghiurile dreptunghice O*a*A, O*b*B, O*c*C sunt asemenea.

Rezultă:

$$(1) \qquad \frac{\overline{Oa}}{\overline{Aa}} = \frac{\overline{Ob}}{\overline{Bb}} = \frac{\overline{Oc}}{\overline{Cc}}$$

sau:

$$(1') \qquad \frac{\overline{Oa}}{\overline{Ob}} = \frac{\overline{Aa}}{\overline{Bb}} \; ; \; \frac{\overline{Ob}}{\overline{Oc}} = \frac{\overline{Bb}}{\overline{Cc}} \; ; \; \frac{\overline{Oc}}{\overline{Oa}} = \frac{\overline{Cc}}{\overline{Aa}}.$$



Relaţiile (1′) arată că punctul O se găseşte la intersecţia a trei locuri geometrice, anume trei cercuri situate în planul P. Astfel prima relaţie (1′) arată că punctul O e pe cercul ale cărui puncte au raportul distanţelor la a şi b constant şi egal cu $\frac{\overline{Aa}}{\overline{Bb}}$. A doua şi a treia relaţie arată că O se găseşte pe celelalte două cercuri analoage. Aceste trei cercuri au aceeaşi axă radicală [1]), deci au în general *două* puncte comune O şi O′, ceea ce arată că există în general *două* conuri ce satisfac problema.

Condiţia ca cercurile să se taie este:

$$(2) \quad \overline{Aa}\cdot\overline{Oa} + \overline{Bb}\cdot\overline{Ob} \geqslant \overline{Cc}\cdot\overline{Oc}\,;\, \overline{Bb}\cdot\overline{Ob} + \overline{Cc}\cdot\overline{Oc} \geqslant \overline{Aa}\cdot\overline{Oa}$$

$$\overline{Cc}\cdot\overline{Oc} + \overline{Aa}\cdot\overline{Oa} \geqslant \overline{Bb}\cdot\overline{Ob}\ [2]).$$

1) A se vedea „G. M." Vol. XLIII, pag. 215, problema 4709.
2) Idem.

In cazul când relaţiile (2) devin egalităţi punctele O şi O' se confundă şi avem o singură soluţie. Când relaţiile (2) nu sunt satisfăcute nu avem nici o soluţie.

Din cele spuse mai sus rezultă că e suficient să se construiască două din cele trei cercuri. Să le luăm de ex. pe cele relative la laturile *ab* şi *ca*. Construim simetricul A' al lui A faţă de planul P şi luăm intersecţiile:

$$R \equiv (ab,\ BA') \quad ; \quad R' \equiv (ab,\ AB).$$

Punctele R şi R' împart segmentul $\overline{ab}$ în raportul $\frac{\overline{Aa}}{\overline{Bb}}$. La fel se găsesc punctele N, N' ce împart latura $\overline{ac}$ în raportul $\frac{\overline{Cc}}{\overline{Aa}}$. Cercurile de diametre $\overline{RR'}$ şi $\overline{NN'}$ se întâlnesc în punctele căutate O şi O', în cazul când avem soluţii.

Observaţie. Problema aceasta a dat naştere problemei 4709, pe care am publicat-o mai înainte, ca o pregătire pentru cea de aci.

PROBLEMA 4845. *Fie* r *raza cercului înscris într'un triunghiu dreptunghic* ABC. *Să se arate că dacă una din laturi este funcţiune numai de* r, *atunci şi celelalte laturi sunt funcţiuni numai de* r.

Caz particular $\overline{AB} = 3r$, *să se arate că* $\overline{AC} = 4r$ *şi* $\overline{BC} = 5r$.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

Soluţie dată de D-nii: G. G. CONSTANTINESCU (licenţiat), BOIAN EMIL (liceul militar, Tg.-Mureş), CIOC DUMITRU (liceul militar, Craiova), CONSTANTINESCU VASILE-C.-OLT (liceul militar, Tg.-Mureş), FLORESCU VICTOR (liceul militar, Târgovişte), MODÂLCĂ EMIL (liceul T.-Severin), POPA MIRCEA (liceul militar, Iaşi) şi SOLOMON ISAC (liceul internat, Iaşi).

Fie A_1, B_1, C_1 punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului; avem:

$$\overline{AB_1} = \overline{AC_1} = r \quad ; \quad \overline{BC_1} = \overline{BA_1} = y \quad ; \quad \overline{CA_1} = \overline{CB_1} = x.$$

Luăm în primul caz una din catete funcţie numai de r; $\overline{AB} = f(r)$ şi vom avea:

$$\overline{AC} = r + x \quad ; \quad \overline{BC} = x + y = \overline{AB} - r + x = f(r) - r + x.$$

Aplicând teorema lui PITAGORA în triunghiul ABC obținem:

$$[f(r) - r + x]^2 = [f(r)]^2 + (r + x)^2,$$

sau, desvoltând și reducând termenii asemenea:

$$2xf(r) - 4rx = 2rf(r),$$

de unde:

$$x = \frac{rf(r)}{f(r) - 2r}.$$

Deducem de aici expresia celorlalte laturi în funcție de r; adică:

$$\overline{AB} = f(r) \; ; \; \overline{AC} = r + \frac{rf(r)}{f(r) - 2r} = \frac{2rf(r) - 2r^2}{f(r) - 2r};$$

$$\overline{BC} = f(r) - r + \frac{rf(r)}{f(r) - 2r}.$$

Luăm cazul al doilea când ipotenuza e funcțiune numai de r:

$$(x + y) = f(r).$$

Expresiile catetelor vor fi în acest caz:

$$\overline{AC} = r + x \quad ; \quad \overline{AB} = r + f(r) - x.$$

Aplicând din nou teorema lui PITAGORA vom avea:

$$[f(r)]^2 = (r + x)^2 + [r + f(r) - x]^2,$$

Desvoltând și reducând termenii asemenea obținem ecuația

$$x^2 - xf(r) + rf(r) + r^2 = 0,$$

de unde rezultă valoarea lui x în funcție numai de r și prin urmare și expresiile catetelor vor fi numai funcție de r.

In cazul particular cerut, utilizăm formulele obținute mai sus când una din catete e funcție de r:

$$\overline{AB} = 3r \; ; \; \overline{AC} = r + \frac{3r^2}{r} = 4r \quad \text{și} \quad \overline{BC} = 3r - r + \frac{3r^2}{r} = 5r$$

Observări: 1. D-nii: BODNĂRESCU HORIA (Seminarul Pedagogic, București), CETĂȚEANU STELIAN (Liceul Șincai, București), CORNĂȚEANU AUREL (Liceul militar, Cernăuți), DIACONESCU ION (Liceul T.-Severin), DOVGAN GHEORGHE, GVIAZDOMORSCHI E. R. (Liceul militar, Cernăuți), IONESCU STELIAN (Liceul militar, Cernăuți), PĂDUREȚ VASILE, PARAIPAN C-TIN, VASILESCU-STABU ALEX. au rezolvat problema luând numai cazul unei catete funcție de r.

2. D-nii: LOCOT. NEGOIȚĂ P. și IONESCU GHEORGHE, PETRESCU ACHILE, POPESCU ZORICA AL. au considerat cazuri particulare ale funcției $f(r)$.

3. D-l CARDARA GHEORGHE (student) a dat o soluție analitică incompletă.

4. D-l TILICĂ ȘTEFAN a considerat și cazul triunghiului isoscel, arătând că proprietatea subsistă, dacă presupunem una din laturi funcțiune numai de raza cercului înscris.

A. N.

PROBLEMA 4941. *Cum se au numerele:*

$$N_1 = 3^\alpha! \quad \text{și} \quad N_2 = 3^{\alpha-1}!\, 3^{3^{\alpha-1}+2\alpha-1}$$

unul față de celălalt?

MAIOR I. LINTEȘ.

Soluție dată de D-l CONST. PASCARU (Clasa VI-a Liceul Militar Iași).

Avem:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{(3^{\alpha-1}+1)(3^{\alpha-1}+2)\ldots 3^\alpha}{3^{3^{\alpha-1}+2\alpha-1}}$$

$$= \frac{(3^{\alpha-1}+1)(3^{\alpha-1}+2)\ldots[3^{\alpha-1}+(3^\alpha - 3^{\alpha-1})]}{3^{3^{\alpha-1}+2\alpha-1}}.$$

Știm însă că avem:

$$(a+1)(a+2)\ldots(a+k) > a^k.$$

Prin urmare:

$$(3^{\alpha-1}+1)(3^{\alpha-1}+2)\ldots[3^{\alpha-1}+(3^\alpha - 3^{\alpha-1})] > (3^{\alpha-1})^{3^\alpha - 3^{\alpha-1}}$$

$$> 3^{2(\alpha-1)3^{\alpha-1}}.$$

Vom compara acum numerele:

$$A = 3^{2(\alpha-1)3^{\alpha-1}} \quad \text{și} \quad B = 3^{3^{\alpha-1}+2\alpha-1}.$$

Pentru aceasta vedem că:

$$\frac{A}{B} = 3^x \text{ unde } x = -3^\alpha + 2\alpha \cdot 3^{\alpha-1} - 2\alpha + 1$$

și pentru $\alpha = 1$ avem $x = -2$

„ $\alpha = 2$ „ $x = 0$

„ $\alpha > 2$ „ $x > 0$.

Prin urmare pentru $\alpha > 2$ vom avea:

$$A > B \quad \text{adică} \quad N_1 > N_2.$$

Pentru $\alpha = 2$ avem:

$$N_1 = 9! \quad = 362880$$

$$N_2 = 3!\ 3^6 = \quad 4374.$$

Pentru $\alpha = 1$ avem:

$$N_1 = 3! = 6$$

$$N_2 = 3^2 = 9.$$

Deci numai pentru $\alpha = 1$ avem $N_1 < N_2$, pentru $\alpha > 1$ avem $N_1 > N_2$.

Notă. Dacă luăm în general numerele:

$$N_1 = a^{\alpha}! \text{ şi } N_2 = a^{\alpha-1}!\ a^{a^{\alpha-1}+(a-1)\alpha-1}$$

atunci procedând analog ca mai sus, avem:

$$x = (\alpha - 1)\, a^{\alpha} - \alpha \cdot a^{\alpha-1} - \alpha(a-1) + 1$$

unde se observă lesne că pentru $\alpha \geqslant 3$ şi $a > 1$ avem $x > 0$ deci în acest caz vom avea $N_1 > N_2$.

Pentru $\alpha = 1$ avem:

$$N_1 = a! \quad \text{şi} \quad N_1 = a^{a-2}$$

unde pentru $a > 4$ se vede lesne că $N_1 < N_2$.

Pentru $\alpha = 2$ avem:

$$N_1 = a^2! \quad \text{şi} \quad N_2 = a!\ a^{a^2-1}.$$

Cum însă:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{(a+1)(a+2)\ldots[a+(a^2-a)]}{a^{a^2-1}}$$

şi cum numărătorul este mai mare ca a^{a^2-1} urmează că pentru $a \geqslant 3$ avem $N_1 > N_2$.

2) Se ştie că produsul numerelor prime cu a^{α}, a fiind prim, şi mai mici decât a^{α} este:

$$\Pi(a^{\alpha}) = \frac{a^{\alpha}!}{a^{\alpha-1}!\ a^{a^{\alpha-1}}}.$$

Atunci dacă :

$$N_1 = a^{\alpha}! \quad \text{şi} \quad N_2 = a^{\alpha-1}!\, a^{a\alpha-1+\beta}$$

avem :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\Pi(a^{\alpha})}{a^{\beta}} .$$

Or, pentru ca $N_1 > N_2$ va trebui ca să avem :

$$\beta < \frac{\log . \Pi(a^{\alpha})}{\log . a} .$$

I. L.

PROBLEMA 4980. *Fie* O, O′ *două cercuri tangente în* R. *O secantă dusă prin* R *taie pe* O *în* M *şi pe* O′ *în* N. *Tangentele în* M *şi* N *la* O *şi* O′ *întâlnesc în* Q *şi* P *tangenta în* R *la cele două cercuri. Diametrele* QO *şi* PO′ *taie cercurile* O *şi* O′ *în* A′, B′ *şi* A, B, *iar secanta* MN *în* C′ *şi* C.

Să se arate :

1°. *Că punctele* α, β, γ, δ *de intersecţie a perechilor de drepte* AB′ *şi* BA′, PB′ *şi* BQ, AC′ *şi* CA′, PC′ *şi* CQ *se află pe o dreaptă* Δ.

2°. *Dreptele* Δ *şi* MN *fac un unghiu constant, oricare ar fi poziţia lui* MN.

G-L AL. GHEORGHIEŞ.

Soluţia. 1°. Consider cazul mai general când R este unul din centrele de asemănare a două cercuri. Razele O′N, OM fiind în acest caz paralele rezultă că tangentele PN, QM sunt paralele deci

$$\text{(1)} \qquad \sphericalangle OMR = \sphericalangle O'NR.$$

Apoi patrulaterele inscriptibile O′NPR, OMQR dau

$$\sphericalangle O'PR = \sphericalangle O'NR \quad \text{şi} \quad \sphericalangle OQR = \sphericalangle OMR$$

sau ţinând seamă de (1), se găseşte :

$$\sphericalangle O'PQ = \sphericalangle OQP$$

şi deci PO′ este paralelă cu QO.

Din triunghiurile asemeni PAR, QA′R de o parte şi ARO′, A′RO de alta se deduce

$$\text{(2)} \qquad \frac{PA}{QA'} = \frac{PR}{QR} = \frac{AR}{A'R} = \frac{O'A}{OA'} .$$

Triunghiurile PNB, QMB′ având laturile paralele sunt asemeni. Din aceste triunghiuri și NO′B asemeni cu MOB′ avem

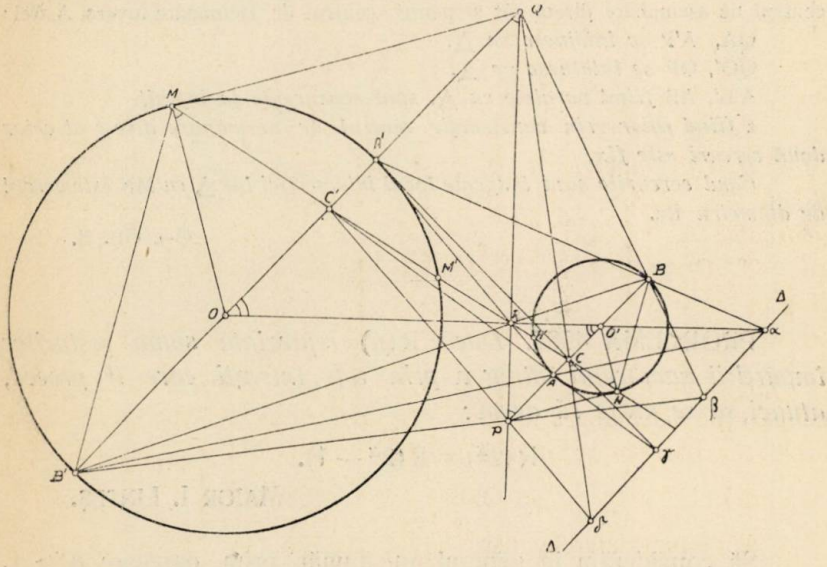
$$(3) \qquad \frac{PB}{QB'} = \frac{BN}{B'M} = \frac{O'B}{OB'} = \frac{O'A}{OA'}.$$

La fel triunghiurile ARC, A′RC′ dau

$$(4) \qquad \frac{AC}{A'C'} = \frac{RC}{RC'} = \frac{AR}{A'R} = \frac{O'A}{OA'}$$

și PCR, QC′R

$$(5) \qquad \frac{PC}{QC'} = \frac{RC}{RC'} = \frac{O'A}{OA'}.$$



Ținând seamă de rapoartele egale (2), (3), (4), (5) și considerând triunghiurile αOQ, βB′Q tăiate de PB, paralela cu bazele OQ, QB′ se găsește

$$\frac{\beta B}{\beta Q} = \frac{\beta P}{\beta B'} = \frac{PB}{QB'} = \frac{O'A}{OA'} = \frac{\alpha B}{\alpha A'}$$

ceea ce arată ca αβ este paralelă cu AB și A′B′. La fel se arată că αγ, γδ sunt paralele cu AB, deci α, β, γ, δ sunt colineare.

2°. Pentru cazul particular al problemei, PO′ fiind perpendiculară pe MRN, rezultă că și Δ este perpendiculară pe MN.

Notă. 1. Soluţii foarte bune, bazate pe propietăţile figurilor omologice s'au primit dela D-nii: M. AL. VASILESCU-STABU (Liceul Lazăr, Bucureşti); GH. CÂRDEIU, AL. I. ROHR (Liceul militar, Iaşi); M. N. ROŞCULEŢ şi H. M. BODNĂRESCU (Liceul Titu Maiorescu, Bucureşti).

2. D-l D. RIPIANU a dat soluţia exactă prin geometria analitică.

3. D-l M. AL. VASILESCU-STABU îşi termină soluţia cu observaţia că *« deoarece în demonstraţie nu am folosit decât faptul că diametrii* AB, A'B' *sunt paraleli şi* PQ ⊥ OO' *prima parte e adevărată şi când* O, O' *nu sunt tangente »*.

4. Observaţia D-lui VASILESCU-STABU este justă, dar condiţiile ca diametrele să fie paralele şi PQ ⊥ OO' nu sunt suficiente. Trebue ca R să fie centrul de asemănare al celor două cercuri aşa cum am arătat în soluţia de mai sus.

Figura mai prezintă unele proprietăţi interesante, valabile atât pentru centrul de asemănare direct cât şi pentru centrul de asemănare invers. Astfel:

QA, A'P *se întâlnesc pe* Δ.

QO', OP *se întâlnesc pe* Δ.

A'B', AB *fiind paralele cu* Δ, *sunt concurente la infinit.*

α *fiind chiar prin construcţie centrul de asemănare direct al celor două cercuri este fix.*

Când cercurile sunt tangente locul intersecţiei lui Δ *cu* MN *este cercul de diametru* Rα.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4988. *Dacă* R(n) *reprezintă suma resturilor împărţirii numărului întreg* n *prin toţi întregii care îl preced, atunci să se arate că avem:*

$$R(2^\alpha) = R(2^\alpha - 1).$$

MAIOR I. LINTEŞ.

Să considerăm în general un număr prim oarecare $p > 1$. Notând cu r_i restul împărţirii lui $(p^\alpha - 1)$ prin i, cu r'_i restul împărţirii lui p^α prin i şi ţinând seamă de egalităţile evidente:

$$p^\alpha - 1 = i.q + r_i \quad \text{şi} \quad p^\alpha - 1 = p^\beta (p^{\alpha-\beta} - 1) + p^\beta - 1$$

deducem că avem:

$r'_i = r_i + 1$ când i nu este puterea lui p şi $r_i = p^\beta - 1$;

$r'_i = 0$ când $i = p^\beta$ ($\beta = 0, 1, \ldots$)

şi numai în acest caz deoarece p este prim.

Atunci putem scrie:

$$R(p^\alpha - 1) = \sum_{i \neq p\beta}^{i=p^\alpha-2} r_i + \sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha-1} (p^\beta - 1)$$

$$= \sum_{i \neq p\beta}^{i=p^\alpha-2} r_i + \frac{p^\alpha - p}{p-1} - \alpha + 1$$

și

$$R(p^\alpha) = \sum_{i \neq p\beta}^{i=p^\alpha-1} r'_i = r'_{p^{\alpha-1}} + \sum_{i \neq p\beta}^{i=p^\alpha-2} (r_i + 1)$$

$$= 1 + \sum_{i \neq p\beta}^{i=p^\alpha-2} r_i + p^\alpha - 2 - \alpha$$

căci avem $r'_{p^{\alpha-1}} = 1$.

In consecință:

$$R(p^\alpha) - R(p^\alpha - 1) = p^\alpha - \alpha - 1 - \frac{p^\alpha - p}{p-1} + \alpha - 1$$

sau:

$$R(p^\alpha) - R(p^\alpha - 1) = \frac{(p-2)(p^\alpha - 1)}{p-1}.$$

Pentru $p = 2$ suntem în cazul problemei.

Observare. Ținând seamă de relația de mai sus, se poate afirma că *2* este singurul număr care se bucură de proprietatea enunțată în problema 4988.

PETRE BOLDESCU.

Notă. 1) In *«Théorie des Nombres»* par LUCAS, pag. 374 se dă relația:

$$R(n) + \sigma(n) = R(n-1) + 2n - 1.$$

unde $\sigma(n)$ reprezintă suma divizorilor lui n.

Pentru $n = p^\alpha$ găsim relația de mai sus. Pentru $n = 2^\alpha$ găsim cazul problemei: *4988.*

2) D-l A. O. ŞAICHIN a dat o soluție problemei *4988* pe o cale ceva mai lungă.

3) D-l E. S. MODÂLCĂ arată că problema generală se găsește în *«Exercices d'Arithmétiques»* par FRITZ-PATRIC et CHEVREL la chestiunea No. *397*, unde se dă relația generală:

$$R(n) + \sigma(n) = R(n-1) + 2n - 1.$$

I. L.

PROBLEMA 4998. 1°. *Să se studieze variația funcției*

$$y = \frac{1 + x \log x}{1 + x}$$

și să se calculeze cu două zecimale exacte valoarea lui x, *pentru care* y *este minimum. Să se deducă apoi că ecuația*

$$1 + x \log x = 0$$

n'are rădăcini reale. Se va stabili acest rezultat și direct.

2°. *Să se determine numerile* α, β, γ *așa ca ecuația*

$$y - \alpha - \beta(x-1) - \gamma(x-1)^2 = 0$$

să aibă rădăcina triplă 1.

3°. *Funcția* y *satisface o ecuație diferențială de ordinul întâi cu coeficienți raționali în* x. *Să se formeze această ecuație și să se integreze. Să se determine curbele integrale care trec prin punctul* $x = 1$, $y = 0$.

TH. ANGHELUȚĂ.

Au rezolvat problema D-nii: MIHU CERCHEZ (Chișinău) și D-TRU RIPIANU (Student Univ. Cluj), dând bune soluții.

Funcția este reală în intervalul $(o, +\infty)$. Primele două derivate sunt

$$y' = \frac{x + \log x}{(1+x)^2} \quad , \quad y'' = \frac{2 - x + \frac{1}{x} - 2\log x}{(1+x)^3}.$$

Derivata y' are o singură rădăcină reală cuprinsă în intervalul $(o, 1)$, după cum se vede lesne figurând curbele

$$y_1 = -x \quad , \quad y_2 = \log x$$

și luând intersecția lor. Pentru această rădăcină α funcția y este minimum. Când se crește dela zero la α funcția y descrește dela 1 la $\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha}$ și apoi y crește dela această valoare la $+\infty$ când x crește dela α la $+\infty$. Deci curba nu taie axa x, după cum se vede și direct. Se găsește $\alpha = 0{,}56$. Derivata y'' are o singură rădăcină reală așezată în intervalul (1, 2). Se deduce aceasta ușor luând intersecția iperbolei

$$y_1 = 2 - x + \frac{1}{x}$$

cu

$$y_2 = 2 \log x.$$

2°. Ecuaţia şi cu primele două derivate trebue să aibă rădăcina $x = 1$.

Se găseşte astfel:

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad , \quad \beta = \frac{1}{4} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{8}.$$

Ecuaţia trebuind să fie de ordinul întâi şi cu coeficienţi raţionali în x, vom obţine-o eliminând pe $\log x$ între y şi y'. Obţinem astfel ecuaţia cerută

$$x(1+x)\,y' - y + 1 - x = 0.$$

Ecuaţia fiind lineară se integrează după metoda cunoscută şi se găseşte integrala generală

$$y = \frac{1 + ax + x\log x}{1+x}$$

a fiind o constantă oarecare.

Toate integralele trec prin punctul $x = 0$, $y = 1$. Niciuna nu trece prin origină. Integrala cerută este

$$y = \frac{1 - x + x\log x}{1+x}.$$

EXERCIŢII

8. Pe două axe date Δ_1 şi Δ_2 se dau punctele fixe A_1 şi A_2 şi se iau punctele mobile M_1 şi M_2, pe aceste axe, astfel ca raportul dintre $\overline{M_1A_2}$ şi $\overline{M_2A_2}$ să fie egal cu un număr dat k. Pe dreapta M_1M_2 se ia punctul P astfel ca să împartă segmentul de dreaptă M_1M_2 în acelaşi raport dat k. Se cere locul geometric al punctelor P.

AL. I. GUŢU.

R. *a)* Se duce prin A_1 dreapta D perpendiculară pe bisectoarea unghiului format de direcţiunile positive ale axelor Δ_1 şi Δ_2. Prin M_1 ducem paralela M_1N_1 la Δ_2 şi fie N_1 punctul ei de intersecţie cu dreapta D. Se uneşte N_1 cu A_2. Punctul de intersecţie al dreptei N_1A_2 cu dreapta M_1M_2 este un punct P al locului. In adevăr avem:

$$M_1A_1 = M_1N_1 \ , \ \frac{PM_1}{PM_2} = \frac{N_1M_1}{A_2M_2} = \frac{M_1A_1}{M_2A_2} = k.$$

Fie acum B_1 punctul de intersecţie al dreptei D cu Δ_2.

Dacă din P se duce paralela PH la D, H fiind punctul de intersecţie al acestei paralele cu Δ_2, avem:

$$(1) \qquad k = \frac{PM_1}{PM_2} = \frac{PN_1}{PA_2} = \frac{HB_1}{HA_2}.$$

Punctul H împarte segmentul de dreaptă B_1A_2 fix, în raportul constant k.

Locul geometric al punctelor P este aşa dar dreapta perpendiculară pe bisectoarea unghiului format de sensurile positive ale axelor Δ_1 şi Δ_2 şi care trece printr'un punct fix H determinat prin relaţiunea (1).

PROBLEME PROPUSE

4904 [1]). Produsul numerilor prime cu un număr dat şi mai mici decât el este 37182145; care este acel număr?

MAIOR I. LINTEŞ.

5044. Axa unei străzi are o porţiune rectilinie de 80 m şi alta de 120 m făcând între ele un unghiu de 90°. Părţile rectilinii sunt racordate cu un cuadran de 60 m rază. Strada are 12 m lăţime cu trotuare de 1 m.

Un călător care ar merge pe lângă casele din partea concavă (a caselor) ce drum ar parcurge? Dar pe lângă trotuarul din partea convexă? In aceste cazuri, care ar fi drumul cel mai scurt de parcurs dacă s'ar merge şi peste stradă? I. IONESCU.

5045. Dacă $P_x(y)$ reprezintă produsul numerelor prime cu y din şirul natural al primelor x numere, să se arate că:

$$P_{2n}(n) = \mathcal{M}.n.$$

CPT.-COMANDOR I. LINTEŞ.

5046. In baza de numeraţie *11*, să se găsească un patrat de patru cifre, care să aibă suma cifrelor egală cu dublul sumei cifrelor rădăcinei. V. THÉBAULT.

5047. Să se găsească patratele de forma *aabaabc*, toate cifrele fiind semnificative. SLT. POPESCU ADRIAN.

5048. Se dă triunghiul AOB dreptunghic în O. Fie M piciorul înălţimei OM. Să se ducă prin M o dreaptă care să taie catetele OA, OB în C şi D astfel ca patrulaterul ABCD să fie inscriptibil.

G L. GH. BUICLIU.

5049. Se proiectează un punct A din plan pe două drepte D_1 şi D_2, în A_1 şi A_2. Fie A_3 al patrulea vârf al paralelogramului AA_1A_2.

1°. Tangenta în A_3 la cercul cu centrul în A şi de rază AA_3, limitată la cele două drepte, are mijlocul în A_3.

2°. Celelalte trei puncte de pe cercul (A), care se bucură de aceeaşi proprietate, *formează un triunghiu echilateral.*

CPT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

1) Enunţ rectificat.

5050. Fie A, B, C trei puncte pe o dreaptă şi O arbitrar în plan; se consideră două cercuri trecând prin O şi A şi care taie sub unghiuri egale cercurile AOB, AOC; primul cerc taie pe BC în M, N şi al doilea taie cercul OBC în M', N'.

1. Cercurile OMN, OBC sunt tangente.

2. Cercul AM'N' este tangent dreptei ABC.

N. N. MIHĂILEANU.

5051. Se dă un triunghiu ABC şi un punct M; fie A', B', C' punctele în care cevienele AM, BM, CM taie cercul circumscris ABC. Cercurile de diametre $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ luate două câte două au ca axe radicale trei drepte care întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului format unind mijloacele coardelor $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ în trei puncte în linie dreaptă.

C. IONESCU-BUJOR.

5052. Se consideră un triunghiu dreptunghic isoscel ABC. Fie A', B', C' mijloacele laturilor. Prin punctul C' se duce o secantă ce intersectează în M ipotenuza $\overline{BC}$ şi în N cateta $\overline{AC}$. Se notează cu H ortocentrul triunghiului B'MN. Secanta $\overline{MN}$ variind, să se demonstreze că :

1°. Avem : $\overline{A'M} \cdot \overline{B'N} = \text{const.}$

2°. Înălţimea NH trece printr'un punct fix.

3°. Locul geometric al ortocentrului H este dreapta AA'.

4°. Secanta determinată de cele de al doilea puncte de intersecţie ale cercului circumscris triunghiului MNH cu ipotenuza BC trece prin punctul C'.

5°. Cercurile circumscrise triunghiurilor MNH au acelaşi ax radical.

ŞERBAN A. GHEORGHIU.

5053. Fie P un punct nesituat pe elipsa lui STEINER, circumscrisă triunghiului ABC; A'B'C' triunghiul pedal al lui ABC şi H_a, H_b, H_c ortocentrele triunghiurilor AB'C', BC'A', CA'B'. Perpendicularele din H_a, H_b, H_c respectiv pe medianele din A, B, C ale triunghiurilor AB'C', BC'A', CA'B' întâlnesc laturile BC, CA, AB în trei puncte în linie dreaptă.

I. I. ŢIŢEICA.

5054. Dacă într'un trapez ABCD notăm cu d_1, d_2, b_1, b_2, c_1, c_2, respectiv lungimile diagonalelor, ale laturilor paralele şi

neparalele, să se demonstreze că:

$$\frac{d_1^2 - d_2^2}{c_1^2 - c_2^2} = \frac{b_1 + b_2}{b_1 - b_2}$$

Să se afle suprafața și laturile opuse b_1, b_2. Cazuri particulare.

LT. NEGOIȚĂ M. V. PANAIT.

5055. Să se rezolve sistemul de ecuațiuni

$$\sin^2 x \cos^2 y = \sin^2 y \cos^2 z = \sin^2 z \cos^2 x = a.$$

Discuțiune. LT. C. D. IONESCU-ȚIU.

5056. Se consideră un triunghiu ABC în care cunoaștem laturile b, c și unghiul A. Prin A se duce o dreaptă AD (D fiind pe BC) făcând cu AB un unghiu φ. Unghiul φ este măsurat dela AB în spre AC.

1°. Să se calculeze AD în funcție de datele problemei.

2°. Din expresia găsită să se deducă expresia înălțimei și bisectoarelor unghiului A.

3°. Să presupunem că prin B ducem o dreaptă BE (E fiind pe AC) care să facă un unghiu φ cu BC și tot așa se duce o dreaptă CF (F fiind pe AB) care să facă cu CA un unghiu φ. Să se arate că există triunghiuri pentru care se poate determina un unghiu φ în așa fel ca:

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}.$$

4°. Să se arate că între laturile unui triunghiu care satisface condițiilor dela 3° există:

$$a^2(a - c) + b^2(b - a) + c^2(c - b) = 0.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

5057. Să se stabilească neegalitățile

$$C_{m+n+1}^{n} \leqq m^n \quad , \quad C_n^{m+p} C_{m+p-1}^{p-1} \leqq C_n^p C_{n-p}^m$$

și să se indice cazurile în care devin egalități. Numerele m, n, p sunt întregi și pozitive, simbolul C este acela al combinărilor ordinare. TH. ANGHELUȚĂ.

5058. Să se elimine x între ecuațiile:

$$x^6 + x^5 - (3\alpha - 1)x^4 - (2\alpha - 1)x^3 + (3\alpha^2 - 3\alpha + 1)x^2 + (\alpha - 1)^2 x - (\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1) = 0$$

$$x^4 - (2\alpha - 1)x^2 + x + \alpha^2 - 2\alpha - y = 0.$$

M. GHERMĂNESCU.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea V. V. (5017); *Anastasiu M. D.* (4876); *Andonic C. Gh.* (5017); *Atanasiu C. Virgil* (5005, 38); *Badea M. Iliaş* (5038); *Bădulescu P. N.* (5017); *Balaban C. Mihail* (5038); *Bârzu Vasile* (5005, 17); *Bedrag C. Mircea* (4996); *Boian Emil* (4968); *Bojin C. D.* (5017); *Brătan C. Marius* (5038); *Burghelea C.* (5011); *Buznea D. D.* (4885); *Cerchez Mihu* (5011, 24); *Crăciunescu I. Mioara* (5038); *Diaconescu V. C.* (5017); *Dovgan V. Gh.* (5017); *Drăghicescu P. Paul* (5005, 33); *Dumitrescu M. Gh.* (4947); *Enescu D. D-tru* (5011, 24); *Gheorghiu A. Al.* (5005); *Gheorghiu P.* (5021); *Gloden A.* (N); *Gviazdomorschi E. R.* (5017); *Ianculescu E. A.* (5017); *Ionescu B. N. Gh.* (5033, 35, 39); *Ionescu D. Stel.* (5033, 35); *Irimescu P.* (5017); *Jareghie V. Ioan* (4578, 5003, 05, 17, 33, 41); *Jiletcovici G. Alexandru* (5038); *Lupu I. Gruia* (4989, 5004); *Mărculescu O.* (4969); *Mihăilescu D. D.* (5017); *Miroslav St. T.* (5017); *Modâlcă S. Ana* (5017); *Modâlcă S. Emil* (4959, 65, 5032); *Moessner A.* (N); *Onişoru V.* (5017); *Pantelimon V. Const.* (4573, 968, 83, 89, 96, 5003, 05, 11, 17, 20, 21, 33, 35, 38); *Pântescu C. Const.* (5011, 24); *Pascaru C. Ioan* (5003, 05, 11, 21); *Petrescu Achille* (5003, 17, 21, 34, 38); *Petrescu I.* (5033); *Petrescu M.* (5017, 33, 35); *Popa D. Mircea* (4578, 5003, 05, 06, 07, 08, 11, 17, 20, 21, 25, 31, 33, 35, 39, 41); *Popescu F. C.* (5017); *Popescu-Zorica N. Alex.* (2569, 4705, 66, 895, 930, 46, 48, 61); *Rădulescu C. O.* (4876); *Rădulescu Gh. Octavian* (4829, 80, 81, 96, 910, 68, 89); *Ripianu D.* (4851, 5012); *Roşca St. Gh.* (5005, 11, 33); *Roşculeţ Marcel* (4871, 5005); *Sacter O.* (5001); *Solomon I. I.* (4983, 89, N); *Stoenescu D. Mirel* (4622, 95); *Sulițeanu C.* (5017); *Topârceanu I. Gh.* (5017); *Turcu R. S.* (4885); *Tutoveanu R. A.* (5017); *Vasilescu A.* (1271); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (4628, 979); *Vlădescu I. Gh.* (5017); *Vlădoianu Gh.* (4989).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anual şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. A. G. Ioachimescu, *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. N. Abramescu, *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IV. A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica, *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă). (Epuizată).

V. Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea, *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie.* (Epuizată).

VI. Tr. Lalescu, *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I. Ediţia II-a revăzută şi adăogită, 1923. (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice. (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice. (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. Gh. Lazăr, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. A. G. Ioachimescu, *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

IX. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. G. Ţiţeica, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. Gazeta Matematică 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. I. Ionescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

C. 53.150

M 2535

Biblioteca ASTRA
— SIBIU —

MAR. 2014

22.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
SIBIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIV

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1939

SUMARUL

1. Gheorghe Kirilov . . . . . *I. Ionescu.*
2. Elementele lui Euclide . . . . . *I. Ionescu.*
3. Congresul matematicianilor . . . . . *I. I.*
4. Asupra modulelor zerorilor polinoamelor. *Th. Angheluță.*
5. Asupra dreptei lui Simson-Wallace . . . *C. Ionescu-Bujor.*
6. Note Matematice: 14 — 17.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Cereri.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 2194, 4225, 4230, 4526, 4595, 4884, 4885, 4918, 4961, 4976, 4983.
12. Exerciții: 9 — 13.
13. Probleme propuse: 5059 — 5073.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1939

74313

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stan**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1938 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5002, 09, 10, 14, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 37, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLIV. Nr. 5 *SUPLIMENT* IANUARIE 1939

RECREAȚIUNI

1. **Numerele și Religia.** Reproducem după « *L'Indépendance de l'Est* » :

Un soldat păzea o biserică. Ca să-i treacă timpul, se juca cu un pachet de cărți de joc. Camarazii lui l'au spus sergentului, care a raportat Locotenentului. Acesta îl cheamă și îi cere să spună ce caută cu cărți de joc în biserică.

— Mie îmi servă ca o carte de rugăciuni :

Dacă trag un *as*, asta îmi amintește pe *Dumnezeu*, care este unic.

Dacă ese *doi*, îmi amintesc că *Cristos* a fost pe cruce cu 2 tâlhari.

Numărul *trei* este *trinitatea : Tatăl*, *Fiul* și *Sfântul Duh*.

Patru sunt Evangheliștii : *Matei*, *Marcu*, *Luca* și *Ion*.

Cinci sunt rănile lui *Cristos*.

Șase îmi amintește creiarea lumii în 6 zile.

Șapte este ultima zi a săptămânii când s'a odihnit *Dumnezeu* după facerea lumii.

Opt sunt oamenii scăpați de potop.

Nouă sunt fecioarele care au venit și au adorat pe *Cristos*.

Zece sunt poruncile lui *Dumnezeu*.

Valetul e unul din cei doi ticăloși ai lui *Caiafa* și *Pilat* care au scuipat pe *Isus*.

Regina este *Regina de Saba* care a venit din Orient ca să admire înțelepciunea lui *Solomon*.

Regele îmi amintește pe Magii care au venit să se închine lui *Cristos*.

Dacă socotesc numărul punctelor din un joc de cărți, găsesc 365, câte zile are Anul.

Dacă număr Cărțile, găsesc 52, câte Săptămâni are Anul.

Cele 12 figuri îmi amintește pe cei 12 Apostoli.

Cum vedeți ? Domnule Locotenent, jocul meu de cărți îmi servă ca o carte de Rugăciuni, și ca almanach. I. I.

Soldatul a greșit scoaterea zilelor anului căci ar fi trebuit să-i iasă 𝔐4.

I. I.

*

2. **Soluție răsturnată.** In exercițiul T. C. 163 din *Suplimentul cu Exerciții* ceream să se demonstreze că dacă se scriu unul după altul două numere inversate se obține un număr divizibil cu 11.

Intre numeroasele soluții neacceptabile primite este și următoarea :

« *Numărul 66 este divizibil prin 11. Inversat este 99 care este și el divizibil cu 11* ».

Autorul soluții a rezolvat exercițiul cu ajutorul unei oglinzi !

Gh. B.

*

3. **Proporţii directe.** In *« Chestiuni de limba română pentru Bacalaureat »* de C. LOGHIN pag. 5, rândul 7, se poate citi teorema:

« Intr'o poezie intensitatea sentimentului stă în proporţie directă cu sensibilitatea şi imaginaţia poetului ».

V. CRIVĂŢ.

*

4. **Soluţie steno-telefonică a problemei 4954.** După cum am anunţat la pagina 162, la finele soluţii problemei 4954, la această problemă am primit şi o soluţie bună pentru *Recreaţii.* Autorul scrie imediat după enunţ următorul grup de numere:

98 76 50 32 10 01 23 35 67 89
V V V V V V V V
22 22 22 22 22 22 22 22.

Apoi semnează. — Soluţia e şi stenogramă şi telegramă, în acelaşi timp. Poate fiindcă a scurtat-o atât, nu a găsit decât un sfert din numărul soluţiilor! Noi primim şi soluţiuni parţiale şi fiindcă nu taxăm soluţiile pe numărul cuvintelor, ca la poştă; am fi menţionat numele economului rezolvitor dacă ar fi scris cel puţin câteva cuvinte pentru a arăta cum a găsit soluţiile.

GH. B.

*

5. **Definiţia matematică a ghilotinei!** Citim următoarele în volumul *« Messieurs* SANSON, *bourreaux »* de GEORGES PAIR:

« Un mathématicien de salon, avait aussi donné cette facétieuse définition de l'objet, obsession de tous les esprits:

« La guillotine est un plan horizontal à quelques pieds du sol, sur lequel on a élevé deux perpendiculaires séparés par un triangle rectangle tombant à travers un cercle sur une sphère restée plus tard isolée par une sécante ».

V. GH.

*

6. **„O strălucită absurditate": Geometria Euclidiană.**

Se cunoaşte rolul important pe care-l acorda ARTHUR SCHOPENHAUER intuiţii în cunoaşterea adevărului. In legătură cu aceasta, Domnul Profesor I. PETROVICI citează în cartea sa despre apostolul nefiinţei:

« Metoda lui EUCLID *în Matematici este o precauţie inutilă; ea se aseamănă cu un călător care luând drumul mare şi neted, din timpul unei nopţi drept un râu, se păzeşte de a-l urma şi îl înconjoară mereu, pe cărări anevoioase, prea fericit de a-l întâlni din când în când ».*

SCHOPENHAUER, care nu se mulţumea nici odată cu comparaţii poetice în susţinerea ideilor sale, recurge şi de data aceasta la termeni mai vehementi, taxând Geometria Euclidiană drept o *« strălucită absurditate ».*

I. I. ŢIŢEICA.

*

7. **Extremităţile se ating şi în matematică.** Probă:

« Exerciţii elementare de Algebră superioară ».

GH. B.

*

8. **Definiţia iubirii.** D-l M. DEKOBRA, într'un interwiew publicat în *« Rampa »* din 29 Octomvrie 1927, dă următoarea definiţie iubirii:

« Iubirea este o ecuaţie cu două necunoscute: bărbatul şi femeia ».

N. O. ZAHARIA.

O ecuaţie cu două necunoscute nu are de regulă soluţiuni întregi unice. Definiţia de mai sus lasă dar iubirii posibilitatea soluţiunilor multiple!

I. I.

*

9. **Întrebări matematice la „Limba română"!** La o Comisie de Bacalaureat examinatorul de Limba română a pus chestiunile:

1. — Care sunt proiecţiile vocalelor pe cerul gurii?

Elevul a întrebat dacă este vorba de proiecţie ortogonală sau centrală!

2. — Cum ai putea pune D-ta *« Umbra lui Mircea la Cozia »* în ecuaţie?

Candidatul deşi urmase Secţia ştiinţifică, a răspuns:

« Primul membru ar fi cadrul; al doilea, convorbirea autorului cu Mircea; al treilea, încheierea ».

Iată dar şi ecuaţii cu trei membre!

A. O. ŞAICHIN.

*

10. **Soluţie rapidă!** Se cerea să se arate că expresia $100!\,10!/50!\,20!\,80!$ este întreagă. Soluţia dată este:

$$100!\,10! = 100 \times 10 = 1000 \quad , \quad 50 \times 20 = 1000$$
$$8^{10} = 10\ 737\ 418\ 240\ 000\ 000\ 000.$$

Deci este imposibil ca numărătorul să fie egal cu numitorul!

I. L.

*

11. **Un calcul cu factoriale!** Iată o soluţie aradeană primită la problema: *« Dacă n este număr prim absolut, avem:*

$$n^2! > n! \cdot n^n \text{ ».}$$

Avem:

$$n! = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = (n+1)\,n/2.$$
$$n^2! = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n\,(n+1)\,(2n+1)/6.$$

Atunci:

$$n\,(n+1)\,(2n+1)/6 < n\,(n+1)/2 \cdot n^n,$$
$$\therefore\ (2n+1) < 3 \cdot n^n \quad , \quad 1 < 3n^n - 2n \quad , \quad 1 < n\,(3n-2).$$

n fiind un număr întreg, positiv, urmează că neegalitatea:

$$n^2! < n \leqslant \cdot n^n$$

unde s'a schimbat sensul neegalităţii, este demonstrată!

I. L.

*

12. **Un calcul cu factoriale!** Iată o soluţie primită la problema : *« Dacă n este număr prim absolut, avem :*

$$n^2! > n!\, n^n\text{»}.$$

Avem :

$$n! = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n\,(n+1)/2.$$

$$n^2! = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n\,(n+1)\,(2n+1)/6.$$

Atunci :

$$n\,(n+1)\,(2n+1)/6 < n\,(n+1)/2 \;.\; n^n.$$

I. L.

*

13. **Permutări.** Iată o definiţiune a Municipalităţii, scoasă de Italieni prin permutări din ea însăşi :

Municipalita. Capi mai uniti.

I. I.

*

14. **Poem matematic.**

Şi azi m'atrage Geometria, ca în atâtea alte rânduri
Prin cugetarea ei senină ; dar stăpânit de atâtea gânduri,
Azi demonstraţia se frânge şi pierd tot şirul pe nevrute :
Nu văz că dreptele 's azi oarbe şi cercurile azi sunt mute.
Amar prinos lui EUCLIDE ; descurc figura tot mai greu
Căci lin furate pe imagini se ţes ideile mereu.

Şi toate se subjugă ţie, iubita mea cu ochi de foc,
Par'că mânate de altă viaţă făpturii tale ii dau loc ;
Admir în siguranţa dreptei, măiastra ta seninătate
Nespus iperbola îmi spune de a ta graţie în toate ;
Apoi întreagă ca elipsa, severitatea ta o ştiu,
Când loc îmi dai spre-a te'nţelege, centrul parabolei să fiu.

Să'ntreb de m'ai iubit vreodată ? O nouă chestiune-ţi pun.
Pari cercul ideal : el simbol pentru perfect, frumos şi bun.
Acesta când îl vezi din centru, ca linie finit'apare,
Nu ştii de unde începe ; însă, când îl priveşti pe din'afară !
Aduce apoi transcendenţa când preţuieşti să se măsoare ;
Când îl doreşti, el e aevea, în punctele imaginare !

NASTRATIN.

*

15. **Imortalitate!** Iată aci două citate dela FONTENELLE şi dela PREVOST, ambii dela Academia franceză :

„Un geometru nu trebue să fie mai puţin glorios de a fi dat numele său unei curbe, decât un prinţ numele său unui oraş".

„A-ţi lega numele de o demonstraţiune, de o funcţiune, de o ecuaţie nouă, este sigur că acest nume va dura atâta timp cât va dura geometria şi algebra. Iată dar o imortalitate practică".

I. I.

GHEORGHE KIRILOV

S'au împlinit 30 ani, în Septemvrie trecut, dela moartea lui GHEORGHE KIRILOV, fost profesor de matematici. Succesor al lui la catedra de mecanică generală la fosta Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele a fost D-l A. G. IOACHIMESCU, care, la începerea cursului, a făcut un elogiu predecesorului său, publicat în *Gazeta Matematică*, Anul XIV, pag. 97, cu care ocaziune s'a publicat şi o scurtă biografie a lui GHEORGHE KIRILOV.

GHEORGHE KIRILOV

In ultimul timp, un fiu al acestuia, D-l NICULAE KIRILOV, regisor la Teatrul Naţional din Bucureşti, mi-a adus două copii după certificatul de studiile secundare şi după diploma de licenţiat în matematici dela Paris. Reproduc aci aceste copii.

TESTIMONIU

Ministerul Justiţii, Cultelor şi Instrucţiunii publice, încredinţează, că D-l GEORGIU CHIRILOVU, *născut la Vălenii de Munte, anul 1844, Sept. 25, de naţiune română, religie creştină-ortodoxă a terminat cu purtare bună şi cu menţiunea prea bine în toate clasele, — studiile Gimnaziului S-tul Sava din Bucureşti, — opt clase.*

Director Gymnasii S-ti Sabba
(ss) N. VERDEANU

P. Minister
ALEXANDRESCU

No. 223
1865 Martie 24

R. F.

DIPLÔME DE LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Le Ministre de l'Instruction publique et des Cultes, vu le certificat d'aptitude accordé, le 11 Novembre 1874 par les professeurs de la Faculté des sciences de Paris, Académie de Paris, au Sieur KIRILOW GEORGES, *né à Văleni de Munte, — Roumanie, le 19 Mai 1849.*

Vu l'approbation donné à ce certificat par le Recteur de la dite Académie;

Ratifiant le sus dit certificat,

Donné par les présentes, au dit Sieur KIRILOW GEORGES, *le Diplôme de Licencié ès Sciences Mathématiques, pour en jouir avec les droits et prérogatives qui y sont attachés par les lois, décrets et réglements.*

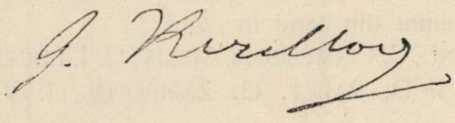
Fait à Paris, sous le Sceau du Ministère de l'Instruction Publique et de Cultes.

Le Ministre de l'Instruction publique et des Cultes:

Signé: WALLON.

După cum se vede, este o diferenţă mare între datele naşterii lui GHEORGHE KIRILOV din aceste două acte. Nu corespund nici anii, nici lunile, nici zilele acestora. Pe de altă parte, D-l A. G. IOACHIMESCU, în articolul de care am vorbit, dă ca an de naştere 1845, iar ca an, al luării Licenţei în Matematici la Paris, 1872. Este dar nevoie a se mai cerceta aceste date relative la profesorul GHEORGHE KIRILOV, care a profesat matematicile la vechea Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele, la Şcoala de Architectură, la Şcoala de Agricultură, la Şcoalele Militare şi în calitate de Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti.

Menţionez că une ori KIRILOV se semna cu doi *l*. Astfel de anul nou 1900 am primit dela dânsul o carte postală de felicitare, după care fac o reproducere fotografică:



Sunt unii care susţineau că KIRILOV se trage din o familie rusească. D-l Dr. N. I. ANGELESCU a publicat o broşură în 1930 sub titlul:

„Negustorii de odinioară : NICULAE KIRILOV *(1745—1849) şi* ALEXANDRU KIRILOV *(1818—1881)*"

şi un articol de curând (11 Decemvrie 1938) în *Gazeta Municipală* din Bucureşti în care arată că origina familii lui KIRILOV este din împrejurimile târgului Vălenii de Munte, şi că NICULAE KIRILOV se numea la început NICULAE CHIRU, însă mai în urmă, ducându-se prin Rusia şi Siberia după blănuri, şi-a schimbat numele de CHIRU în KIRILOV *„pentru mai multă înlesnire a afacerilor"*. Putem dar să-l revendicăm pe Profesorul GHEORGHE KIRILOV ca unul din Românii care au răsbit în cetatea ştiinţelor occidentale în al treilea sfert al veacului trecut şi care a contribuit prin profesoratul lui la cultura matematică naţională.

I. IONESCU.

ELEMENTELE LUI EUCLIDE

In *Gazeta Matematică,* Anul XLII, No. 10, Iunie 1938, la pag. 539, am pus *Cererea No. 277* prin care întrebam dacă în afară de un început de traducere al *Elementelor lui* EUCLIDE, făcut de vechea revistă ieşană *„Recreaţii Ştiinţifice"*, s'au mai făcut alte încercări în această privinţă. Nu am primit nici un răspuns.

In şedinţa Adunării lunare a *Gazetei Matematice* dela 22 Decemvrie 1938, vorbind de acea încercare, membrii prezenţi m'au rugat să fac o Dare de Seamă a acelei încercări făcute în secolul trecut.

Revista *„Recreaţii Ştiinţifice"* a început să apară în Ianuarie 1883. Fondatorii acelei foi erau următorii profesori, pe care este bine să-i pomenim din când în când:

N. CULIANU, C. CLIMESCU, I. MELIK, G. I. LUCESCU, V. PALADI, G. I. ROŞIU, I. D. RALET, G. ZARIFOPOL, I. V. PRAJA, I. M. DOSPINESCU.

Dintre aceştia G. I. ROŞIU, fost profesor la Şcoala Militară din Iaşi, tatăl D-lui Inginer Inspector General VASILE ROŞU, a avut ideea de a traduce pe EUCLIDE în limba română. In Vol. I al Revistei, la pag. 319, el a publicat un articol intitulat: *„Postulatele şi Axiomele lui* EUCLIDE", în care, după ce explică ce se înţelege prin axiomă şi postulat, dă cele 3 postulate şi cele 12 axiome ale lui EUCLIDE pentru studiul Geometriei. G. I. ROŞIU se ocupă apoi de ultima axiomă care se referă la Teoria paralelelor, şi de înlocuirea ei cu alta de către LEGENDRE. In No. următor, la pag. 345, sub titlul *„Din Istoria Matematicilor.* EUCLIDE şi LEGENDRE" el se ocupă de viaţa şi operile acestor matematiciani, discută din nou postulatul paralelelor şi găseşte superior pe al lui EUCLIDE.

In Anul II al Revistei, din 1884, G. I. ROŞIU scrie primul articol intitulat *„Elementele lui* EUCLIDE", care începe astfel:

„Elementele lui EUCLIDE *sînt traduse în toate limbele. Este bine de a fi traduse şi în româneşte. Cum că* EUCLIDE *este considerat şi actualminte ca unul din cei mai mari matematici ai anticităţei, este faptul că şi astăzi unii matematici se ocupă cu scrierile lui. Dovadă* Porismele lui EUCLIDE, *despre care a scris* CHASLES.

„LEGENDRE, *în Elementele sale de Geometrie, a pus multe teoreme din* EUCLIDE, *şi nici nu putea face altmintrelea. Autorii posteriori lui* LEGENDRE, *se pare că la facerea cărţilor de Geometrie au avut mai mult în vedere Elementele lui* LEGENDRE, *şi mai deloc pe cele ale lui* EUCLIDE. *Dovadă sînt mai toate Geometriile actuale. Cred că este necesar ca tinerii romîni, care vor îmbrăţişa cariera matematicelor să cunoască şi vechea Geometrie a lui* EUCLIDE. *Numai astfeliu îşi vor putea da samă de modificările introduse de* LEGENDRE.

„Elementele lui EUCLIDE *tractează în cele întăi 6 cărţi despre Geometria plană; în cărţile 11 şi 12 despre Geometria în spaţiu. Cărţile 7, 8, 9, 10 şi 13, tractînd despre chestiuni de Aritmetică, nu se află cuprinse în ediţiunea italiană de Geometria lui* EUCLIDE *pe care o posed.*

„Cadrul restrâns al „Recreaţiilor Ştiinţifice" nu-mi permite a publica în extenso toată Geometria lui EUCLIDE. *Mă voiu mărgini numai a enunţia teoremele lui* EUCLIDE *arătând demonstrarea numai a acelor teoreme care nu sînt cuprinse în* LEGENDRE.

In EUCLIDE, *la începutul fiecărei cărţi sînt definiţiile. La începutul cărţei întăiu, după definiţii urmează imediat Postulatele şi Axiomele.*

„Iată definiţiile din Cartea I, traduse din ediţia italiană ENRICO BETTI *şi* FRANCESCO BRIOSCHI, *Florenţa 1868".*

Definiţiile 8, 13 şi 19 sunt lăsate la o parte căci ele fuseseră găsite inutile de SIMSON şi deci nu au fost traduse de geometri italieni arătaţi mai sus care s'au servit de sigur de traducerea lui SIMSON, ca una din cele mai bune.

Articolul cuprinde apoi şi definiţiunile şi axiomele din geometria lui LEGENDRE.

In articolele următoare, şi anume în Anul II pag. 33—41, 68—72, 104—109, şi din Anul III pag. 21—23, 45—51, 93—99, 171—178, G. I. ROŞIU traduce pe EUCLIDE în cele 48 *Propoziţii* ale lui: *probleme* şi *teoreme*, dintre care penultima este celebra teoremă a lui PITAGORA. In fine la pag. 189—197 sunt date *Exerciţii la Cartea I*, în număr de 91.

Din cele ce se vede, G. I. ROŞIU a tradus complet, cu comentarii şi istoric, prima Carte din *Elementele lui* EUCLIDE încă din 1883—1885.

Concluzia este că s'au găsit Români care, încă din secolul trecut, să se gândească că e bine ca şi limba română să poseadă o ediţie a Elementelor lui EUCLIDE *şi că au realizat în parte această ideie. Acesta este un fapt istoric care nu se poate ocoli.*

Cu această ocazie mai adaog că *Elementele lui* EUCLIDE s'au predat în Academiile greceşti din Bucureşti şi Iaşi din Secolele XVII, XVIII şi XIX şi că ediţii greceşti au fost tipărite la noi în ţară.

I. IONESCU.

CONGRESUL MATEMATICIANILOR

Viitorul Congres al Matematicianilor se va ţine în Statele Unite, la Cambridge din Massachusetts, în Septemvrie 1940.

La *Gazeta Matematică* s'a primit dela D-l R. G. D. RICHARDSON, Secretarul Comitetului de organizare, o scrisoare cu un apel, pe care îl reproducem aci în întregime:

„Congresul internaţional al Matematicianilor, după invitaţia Societăţii Matematice Americane, se va întruni la Cambridge, Massachusetts, în 1940.

„Congresele precedente. *Un Congres internaţional al Matematicianilor s'a reunit în 1893, cu ocaziunea Expoziţiunii Columbiane Universală din Chicago. Primul Congres întrunit în Europa a avut loc la Zürich în 1897, şi cel mai nou la Oslo în 1936. Afară de unele excepţiuni, cauzate de războiu, sesiunile au avut loc foarte regulat în intervalul de aproximativ patru ani. Ele s'au ţinut în Europa, afară de cel din 1924 care s'a ţinut la Toronto, sub auspiciile oraşului, provinciei şi Guvernului Canadian.*

„La Congresul cel mai recent, numărul ţărilor reprezentate a fost de aproximativ 40, numărul membrilor aproape 600, şi al memoriilor cam 250.

„Locul şi Data. *Data Congresului a fost fixată cum urmează: dela 4 la 12 Septemvrie 1940, Universitatea Harward şi Institutul de Technologie din Massachusetts vor organiza Congresul. Matematicianii care doresc pot să locuiască în locuinţele studenţilor*

Universității Harward, iar mesele se pot lua foarte eftin la restaurantele Universității. Pentru membrii familiilor lor, și în special pentru copii, sunt prevăzute toate înlesnirile. Acei care vor prefera, au posibilitatea să aleagă hotele la Cambridge sau Boston. Societatea speră să poată oferi gratuit pensiunea completă la un bun număr de oaspeți străini în timpul săptămânii pe care o vor petrece la Cambridge.

„Proiectele pentru activitatea științifică sunt pe cale de pregătire. In conformitate cu usagiile stabilite, vor fi 20 de memorii prezentate după cererea organizatorilor Congresului, fiecare durând o oră și, în afară de acestea, reuniuni aparte pentru prezentarea memoriilor mai scurte.

„Conferințele vor constitui o inovație, după ideia emisă la ultimele reuniuni internaționale dela Moscova pentru Topologie și la Zürich pentru Probabilități. Fiecare ședință va fi consacrată unui domeniu în care s'au făcut progrese importante sau sunt pe cale de a se realiza. Scopul lor este de a schimba deslușiri între specialiștii din fiecare domeniu, și de a răspândi rezultatele noi și importante în lumea întreagă. Aceasta se va realiza grație unui program care să coordoneze conferințele și discuțiunile ridicate. In programa conferințelor va fi una asupra Algebrei; una asupra Teorii Măsurii, a Probabilității și ale chestiunilor înrudite cu ele; una asupra Logicei Matematice, și una asupra Topologiei.

„Cu titlul de proiect, vor fi șase secțiuni pentru prezentarea memoriilor: I, Algebră și Teoria Numerelor; II, Analiză; III, Geometria și Topologia; IV, Probabilitate, Statistică, Economie politică; V, Fizica Matematică și Matematicile aplicte; VI, Logica, Filosofia, Istoria, Didactica. Comisiunea Internațională a Învățământului Matematicilor își propune să ție o sesiune cu ocaziunea Congresului.

„Aceste memorii vor fi redijate de preferință în una din limbile oficiale ale Congresului: engleză, franceză, germană sau italiană, și nu vor întrece în general zece minute.

„Activități diverse, excursiuni. *Numeroase petreceri vor avea loc cu ocaziunea Congresului — recepțiuni, „garden party", concerte și un banchet. In plus vor fi un oarecare număr de excursiuni în automobil.*

„Toate sforțările vor fi făcute pentru a se permite streinilor de a călători pe un cost rațional pe tot timpul cât vor fi în Statele Unite. Inainte de Congres, se vor face înlesniri pentru vizitarea orașului New-York, sub conducerea câtorva matematiciani. Este probabil că orașul va avea atunci o Expoziție internațională. Dacă se exprimă dorința, se pot organiza excursiuni la Washington, la Căderile Niagarei și în alte locuri.

„Participarea la Congres. *Adeziunea la Congres poate fi dată de oricine, fie că poate sau nu să vină la Congres. Pentru membrii ordinari ai Congresului, cotizația este de 10 dolari, aceste persoane vor primi Dările de seamă. Membrii familiilor și cei ce nu participă la desbaterile științifice pot deveni membri asociați prin o cotizație de 5 dolari; ei nu vor prezenta memorii și nu vor primi Dările de seamă, dar vor avea dreptul la cele mai multe din celelalte avantagii ale participării la Congres.*

„Sprijin Financiar. *In afară de contribuțiunile Universității Harward, a Institutului de Technologie din Massachusetts și al altor Instituțiuni din apropiere, subvenții generoase pentru Congres au fost subscrise de Carnegie Corporation, Institutul pentru Studii Inaintate, Consiliu Național de cercetări și Fondația Rockfeller.*

„Informațiuni. *Persoanele care doresc să aibă informațiuni se pot adresa Biuroului Societății și vor primi din timp în timp informațiuni privitoare la program și la diferitele aranjamente.*

„Rugăm a se adresa corespondența la:

American Mathematical Society, 531 West 116th Street New-York, New-York. U. S. A.

„Decemvrie, 1938. (ss) *Comitetul de Organizare".*

Doritorii de a participa la Congres se vor adresa direct Societății Matematice Americane, întru cât *Gazeta Matematică* nu primește cereri pentru înscrierea la Congres.

I. I.

ASUPRA MODULELOR ZERORILOR POLINOAMELOR

In cele ce urmează dăm o demonstrație mai simplă unor rezultate datorite D-lui P. MONTEL și publicate în „Annales scientifiques de l'École Normale supérieure" t. XL, 1923, pag. 1—34, sub titlul „Sur les modules des zéros des polynomes". Acest gen de probleme a fost pus pentru prima dată de E. LANDAU [1]). O parte din rezultatele D-lui P. MONTEL au fost găsite de D. L. FEJÉR [2]). Memoriul D-lui MONTEL este însă acela care a fost obiectul a numeroase cercetări [3]) și cu siguranță că vor urma și altele, de oarece problema generală n'a fost complet rezolvată. Scriind aceste rânduri mă gândesc la corespondenții noștrii, îndemnându-i să se ocupe de aceste cercetări.

Teorema I. *Polinomul.*

$$(1) \qquad P(x) = 1 + x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \ldots + a_{n_m} x^{n_m}$$

are cel puțin un zero, al cărui modul nu este mai mare decât $\sqrt[n_1]{C^{n_1}_{m+n_1-1}}$. Puterile $n_1, n_2, \ldots, n_m$ sunt așezate în ordine crescătoare $1 \leqq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_m$.

Observăm faptul foarte important că numărul $C^{n_1}_{m+n_1-1}$, care limitează superior cel puțin un zero al polinomului $P(x)$, depinde numai de n_1, care este puterea cea mai mică a lui x care intră efectiv în $P(x)$, precum și de numărul $m-1$ al termenilor care urmează după x^{n_1} și este independent de coeficienții $a_2, \ldots, a_n$.

---

1) E. LANDAU. Sur quelques généralisations du théorème de M. PICARD. (Annales de l'École Normale supérieure t. XXIV (1907), pag. 179—201).

2) L. FEJÉR. Über die Wurzel von kleinsten absoluten Betrage einer algebraischem Gleichung (Mathematiche Annalen t. 65 (1908), pag. 413—423).

3) VAN VLECK. On limits to the absolute values of the roots of a polynomial (Bulletin de la Société mathématique de France t. 53 (1925), pag. 105—125).

BIERNACKI. Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires (Bulletin de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres (1927), pag. 541—655).

DIEUDONNÉ. Recherches sur quelques problemes relatifs aux polynomes et aux fonctions bornées d'une variable complexe (Annales scientifiques de l'École Normale supérieure t. XLVIII (1931), pag. 247—358).

Pentru demonstrarea acestei teoreme să considerăm ecuaţia inverselor

$$f(u) = u^{n_m} + u^{n_m - n_1} + a_2 u^{n_m - n_2} + \ldots + a_{n_{m-1}} u^{n_m - n_{m-1}} + a_{n_m} = 0.$$

Polinomul derivat este

$$f'(u) = n_m u^{n_m - 1} + (n_m - n_1) u^{n_m - n_1 - 1} + (n_m - n_2) a_2 u^{n_m - n_2 - 1} + \ldots$$
$$+ (n_m - n_{m-1}) a_{n_{m-1}} u^{n_m - n_{m-1} - 1}$$

sau

$$f'(u) = u^{n_m - n_{m-1} - 1} f_1(u)$$

unde

$$f_1(u) = n_m u^{n_m - 1} + (n_m - n_1) u^{n_m - 1 - n_1} + (n_m - n_2) a_2 u^{n_m - 1 - n_2} + \ldots$$
$$+ (n_m - n_{m-1}) a_{n_{m-1}}.$$

Derivata lui $f_1(u)$ se scrie

$$f_1'(u) = u^{n_m - 1 - n_m - 2 - 1} f_2(u)$$

cu notaţia

$$f_2(u) = n_m n_{m-1} u^{n_m - 2} + (n_m - n_1)(n_{m-1} - n_1) u^{n_m - 2 - n_1} + (n_m - n_2)$$
$$(n_{m-1} - n_2) a_2 u^{n_m - 2 - n_2} + \ldots + (n_m - n_{m-2})(n_{m-1} - n_{m-2}) a_{n_{m-2}}.$$

Continuând astfel obţinem polinomul

$$f_{m-2}(u) = n_m n_{m-1} \ldots n_3 u^{n_2} + (n_m - n_1) \ldots (n_3 - n_1) u^{n_2 - n_1}$$
$$+ (n_m - n_2) \ldots (n_3 - n_2) a_2$$

a cărui derivată

$$f_{m-2}'(u) = u^{n_2 - n_1 - 1} [n_m n_{m-1} \ldots n_2 u^{n_1} + (n_m - n_1) \ldots (n_2 - n_1)]$$

se anulează, în afară de origine, pentru valorile al căror module ρ sunt date de ecuaţia

$$\rho^{n_1} = \frac{(n_m - n_1) \ldots (n_2 - n_1)}{n_m n_{m-1} \ldots n_2}.$$

Inainte de a trece mai departe reamintim teorema lui LUCAS [1]), cu următoarea enunţare: Dacă zerorile unui polinom au imaginile lor din planul complex, situate în interiorul unui contur convex, atunci şi imaginile zerorilor polinomului derivat sunt în acelaşi contur.

---

1) TH. ANGHELUŢĂ. Curs litografiat de teoria funcţiilor p. 10 (Univ. Cluj).

Polinomul $f_{m-2}(u)$ va avea cel puţin un zero cu modulul superior, sau cel puţin egal cu ρ, căci în caz contrar ar urma, conform teoremei lui LUCAS, ca $f'_{m-2}(u)$ să aibă toate zerorile cu modulele inferioare lui ρ, rezultat absurd. Din aproape în aproape, conform aceleeaşi teoreme, deducem că $f(u)$ are cel puţin un zero cu modulul r superior sau egal cu ρ,

$$r^{n_1} \geqq \rho^{n_1} = \frac{(n_m - n_1)\ldots(n_2 - n_1)}{n_m\, n_{m-1}\ldots n_2}.$$

Ne rămâne doar să găsim limita din enunţ. Pentru aceasta observăm că avem

$$n_2 \geqq n_1 + 1, \ldots, n_m \geqq n_1 + m - 1$$

şi prin urmare deducem

$$\frac{(n_m - n_1)\ldots(n_2 - n_1)}{n_m\, n_{m-1}\ldots n_2} = \left(1 - \frac{n_1}{n_m}\right)\cdots\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

$$\geqq \left(1 - \frac{n_1}{n_1 + m - 1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n_1}{n_1 + 1}\right) = \frac{1}{C^{m-1}_{m+n_1-1}} = \frac{1}{C^{n_1}_{m+n_1-1}}$$

şi deci

$$r^{n_1} \geqq \frac{1}{C^{n_1}_{m+n_1-1}}.$$

Prin urmare polinomul $P(x)$ care are ca zerori inversele zerorilor lui $f(u)$ are cel puţin un zero cu modulul mai mic sau egal cu $\sqrt[n_1]{C^{n_1}_{m+n_1-1}}$.

D. PELLET dă o limită mai mică decât aceasta [1]).

Consecinţe. 1. In cazul particular $n_1 = 1$ obţinem prima teoremă a D-lui MONTEL.

Ecuaţia

$$1 + x + a_2 x^{n_2} + \ldots + a_{n_m} x^{n_m} = 0$$

are cel puţin o rădăcină cu modulul mai mic sau cel mult egal cu m. In cazul $m = 2$ avem teorema lui LANDAU.

---

1) A. PELLET. Sur la racine de plus petit module (Bulletin des sciences mathématiques t. XLVIII 1924 Août).

Ecuaţia

$$1 + x + ax^n = 0$$

admite cel puţin o rădăcină a cărui modul nu este superior lui 2.

2. Limita găsită în teorema precedentă ne dă şi limita din teorema a 2-a a D-lui MONTEL, în cazul când se presupune

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{p-1} = 0.$$

Ne rămâne să arătăm teorema următoare.

Teorema II. *Polinomul*

$$(2) \qquad P(x) = 1 + b_1 x + \ldots + b_{n_1-1} x^{n_1-1} + x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \ldots + a_{n_m} x^{n_m}$$

are cel puţin un zero al cărui modul nu este superior aceluiaşi număr $\sqrt[n_1]{C^{n_1}_{m+n_1-1}}$ din teorema I.

Se observă că polinomul (2) are $m + n_1$ termeni, prin urmare limita de mai sus depinde numai de numărul termenilor şi de n_1.

Vom urma aceeaşi metodă de demonstraţie ca în teorema I; chiar am fi putut demonstra dela început teorema II. Am început cu cazul particular din teorema I numai pentru mai multă claritate. Vom lua şi în acest caz ecuaţia inverselor

$$f(u) = u^{n_m} + b_1 u^{n_m-1} + \ldots + b_{n_1-1} u^{n_m-n_1+1} + u^{n_m-n_1} + a_2 u^{n_m-n_2} + \ldots + a_{n_m} = 0.$$

Luând derivata avem

$$f'(u) = u^{n_m-n_{m-1}-1} f_1(u)$$

cu notaţia

$$f_1(u) = n_m u^{n_m-1} + b_1 (n_m - 1) u^{n_m-1-1} + \ldots + (n_m - n_1 + 1) b_{n_1-1} u^{n_m-1-n_1+1} + (n_m - n_1) u^{n_m-1-n_1} + a_2 (n_m - n_2) u^{n_m-1-n_2} + \ldots + (n_m - n_{m-1}) a_{n_{m-1}}.$$

Derivata lui $f_1(u)$ este

$$f'_1(u) = u^{n_m-1-n_{m-2}-1} f_2(u)$$

unde

$$f_2(u) = n_m n_{m-1} u^{n_m-2} + b_1(n_m-1)(n_{m-1}-1) u^{n_m-2-1} + \ldots$$

$$+ (n_m-n_1+1)(n_{m-1}-n_1+1) b_{n_1-1} u^{n_m-2-n_1+1} + (n_m - n_1)$$

$$(n_{m-1} - n_2) u^{n_m-2-n_1} + (n_m - n_2)(n_{m-1}-n_2) u^{n_m-2-n_2} + \ldots$$

$$+ (n_m - n_{m-2})(n_{m-1}-n_{m-2}) a_{n_m-2}.$$

Continuând astfel avem polinomul

$$f_{m-2}(u) = n_m n_{m-1} \ldots n_3 u^{n_2} + b_1 (n_m-1) \ldots (n_3-1) u^{n_2-1} + \ldots$$

$$+ (n_m - n_1 + 1) \ldots (n_3 - n_1 + 1) b_{n_1-1} u^{n_2-n_1+1} + (n_m - n_1) \ldots$$

$$(n_3 - n_1) u^{n_2-n_1} + (n_m - n_2) \ldots (n_3 - n_2) a_2$$

şi prin urmare

$$f'_{m-2}(u) = u^{n_2-n_1-1} [n_m \ldots n_2 u^{n_1} + b_1 (n_m - 1) \ldots (n_2 - 1) u^{n_1-1} + \ldots$$

$$+ (n_m-n_1+1) \ldots (n_2-n_1+1) b_{n_1-1} u + (n_m-n_1) \ldots (n_2-n_1)].$$

Produsul zerorilor polinomului din paranteză fiind

$$(-1)^{n_1} \frac{(n_m - n_1) \ldots (n_2 - n_1)}{n_m n_{m-1} \ldots n_2}$$

urmează că măcar unul din aceste zerori are modulul ρ_1 care satisface inegalitatea

$$\rho_1^{n_1} \geqq \frac{(n_m - n_1) \ldots (n_2 - n_1)}{n_m n_{m-1} \ldots n_2} = \rho$$

căci este inadmisibilă presupunerea că modulele tuturor zerorilor să fie mai mici decât

$$\sqrt[n_1]{\frac{(n_m - n_1) \ldots (n_2 - n_1)}{n_m n_{m-1} \ldots n_2}}$$

produsul lor trebuind să fie egal cu numărul de sub radical.

Am obţinut acelaşi număr din teorema I. Urmând acelaşi raţionament ca acolo ajungem la demonstrarea teoremei enunţate.

D-l P. MONTEL demonstrează teorema mai generală:

Polinomul (2) are cel puțin n_1 zerori cu modulele inferioare sau egale cu un număr care nu depinde decât de numărul termenilor $m + n_1$ ai polinomului și de n_1.

Rămâne chestiunea determinării acestui număr a cărui existență este astfel dovedită. D-l BIERNACKI arată că în cazul polinomului (1) acest număr este tot $\sqrt[n_1]{C^{n_1}_{m+n_1-1}}$. Rămâne însă cazul general și chiar pentru cazul particular este de căutat o metodă mai simplă. Iată o chestiune care poate fi studiată în vederea premiului de Algebră al *G. M.*

TH. ANGHELUȚĂ.

ASUPRA DREPTEI LUI SIMSON-WALLACE

1°. Se cunoaște următoarea teoremă a lui SIMSON sau a lui WALLACE: „M *fiind un punct situat pe cercul circumscris unui triunghiu, proecțiile sale pe laturile triunghiului sunt colineare*".

Dreapta astfel obținută se numește *dreapta lui* SIMSON. Este cunoscută deasemenea reciproca teoremei: *„Dacă proecțiile unui punct pe laturile unui triunghiu sunt colineare, punctul se află pe cercul circumscris triunghiului"*.

Ne propunem să stabilim o proprietate a *dreptei lui* SIMSON, apoi o altă reciprocă a teoremei ce am enunțat, în fine să construim *dreapta lui* SIMSON a unui triunghiu, direcția fiind dată.

2°. *Fie* ABC *triunghiul fundamental și* M *un punct al cercului circumscris* — A', B', C', *proecțiile* sale pe dreptele BC, CA, AB

$\widehat{MAB} = \varphi$.

a) Presupunând că M se află situat pe arcul BC, să calculăm lungimea segmentului din *dreapta lui* SIMSON a punctului M, cuprins între dreptele AB, AC, adică lungimea $\overline{B'C'}$.

Dacă A_1 este punctul diametral opus lui A, din triunghiul AMA_1 deducem:

$$\overline{AM} = \overline{AA_1}\cos\widehat{MAA_1} = 2R\cos(\widehat{BAA_1} - \varphi)$$

$$= 2R\cos(90 - C - \varphi) = 2R\sin(C + \varphi).$$

Patrulaterul inscriptibil AC'MB' are ca diametru pe $\overline{AM}$, deci în triunghiul AC'B',

$$\overline{B'C'} = \overline{AM}\sin A = 2R\sin A\sin(C+\varphi) = a\sin(C+\varphi).$$

b) Să calculăm unghiul făcut de dreapta B'C' cu dreapta BC. Din patrulaterul inscriptibil A'MCB', deducem:

$$\widehat{B'A'C} = \widehat{B'MC} = 90^0 - \widehat{B'CM} = 90^0 - (C + \widehat{BCM}) = 90 - (C+\varphi).$$

Deci proecția laturii BC pe dreapta lui SIMSON B'C' este:

$$a\sin(C+\varphi) = \overline{B'C'}.$$

c) Să cercetăm dacă există egalitate între segmentul $\overline{A'B'}$ și proecția laturii $\overline{AB}$ pe *dreapta lui* SIMSON a punctului M situat pe arcul BC (arcMB < arcMC). Fie C_1 punctul diametral opus lui C. Din triunghiul CMC_1 deducem:

$$\overline{MC} = \overline{CC_1}\cos\widehat{MCC_1} = 2R\cos(90^0+\varphi-A) = 2R\sin(A-\varphi),$$

iar din triunghiul A'B'C înscris în cercul de diametru MC,

$$\overline{A'B'} = 2R\sin(A-\varphi)\sin C = c\sin(A-\varphi)$$

și cum

$$\widehat{AC'B'} = \widehat{BMA'} = 90^0 - \widehat{MBC} = 90^0 - \widehat{MAC} = 90^0 - (A-\varphi),$$

rezultă

$$\text{pr.}_{A'B'}\overline{AB} = c\sin(A-\varphi) = \overline{A'B'}.$$

La fel se arată că:

$$\text{pr.}_{A'C'}\overline{AC} = \overline{A'C'}.$$

Se poate deci enunța:

Proprietate. *Proecția unei laturi a triunghiului fundamental pe dreapta lui* SIMSON *a unui punct al cercului circumscris este egală cu segmentul acestei drepte cuprins între celelalte două laturi ale triunghiului.*

3°. **Reciproca II a teoremei lui** SIMSON. *Dacă proecția unei laturi a triunghiului fundamental pe o dreaptă* Δ *este egală cu segmentul acestei drepte cuprins între celelalte două laturi ale triunghiului, perpendicularele ridicate pe laturile triunghiului în punctele de întâlnire cu dreapta* Δ *sunt concurente pe cercul circumscris triunghiului.*

Fie A', B', C' punctele în care Δ taie dreptele BC, CA, AB; să presupunem că $pr._{\Delta}\,\overline{BC} = \overline{B'C'}$ și să notăm $\alpha = \widehat{BA'C'}$. Din ipoteză rezultă:

$$\overline{B'C'} = pr._{B'C'}\,\overline{BC} = a\cos\alpha = 2R\sin A\cos\alpha \quad \therefore \quad \frac{\overline{B'C'}}{\sin A} = 2R\cos\alpha.$$

Dar în triunghiul AC'B', acest raport reprezintă diametrul cercului AC'B', diametru care fiind mai mic decât diametrul cercului ABC este o coardă $\overline{AM}$ a acestui cerc. Rezultă că punctele B', C' sunt proecțiile lui M pe AC și AB, deci dreapta B'C' este *dreapta lui* SIMSON a punctului M, iar A'M este perpendiculară pe BC.

4°. Se soluționează acum ușor și următoarea problemă: Să se determine pentru un triunghiu ABC *dreapta lui* SIMSON paralelă cu o direcție dată.

Va trebui determinată o paralelă cu Δ pe care dreptele AB, BC să intercepteze un segment egal cu proecția lui $\overline{BC}$ pe Δ, ceea ce se realizează astfel:

Ducem prin B o paralelă cu Δ care întâlnește cercul de diametru $\overline{BC}$ în D. $\overline{BD}$ este proecția laturii BC pe Δ. Paralela dusă din D la AB taie dreapta AC în B'; paralela dusă din B' la Δ este *dreapta lui* SIMSON de direcție Δ, iar punctul căruia corespunde se obține intersectând cercul ABC cu perpendiculara ridicată în B' pe AC.

5°. După reciproca a doua a *teoremei lui* SIMSON și după construcția precedentă se vede că punctul situat pe cercul circumscris unui triunghiu și *dreapta lui* SIMSON se pot genera reciproc, ceea ce nu rezultă din prima reciprocă a *teoremei lui* SIMSON.

C. IONESCU-BUJOR.

NOTE MATEMATICE

14. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). Când N_p începe cu 9 am găsit următoarele 196 soluţiuni ale ecuaţiunei

$$3N_3 = N.$$

N_3	N	N_3	N
901 285 647	2 703 856 941	948 657 201	2 845 971 603
901 286 547	2 703 859 641	948 657 210	2 845 971 630
901 465 287	2 704 395 861	948 701 265	2 846 103 795
901 645 287	2 704 935 861	948 702 651	2 846 107 953
902 871 465	2 708 614 395	948 710 265	2 846 130 795
902 871 645	2 708 614 935	948 712 650	2 846 137 950
910 285 647	2 710 856 941	948 726 501	2 846 179 503
910 286 547	2 710 859 641	948 726 510	2 846 179 530
912 856 470	2 738 569 410	950 126 487	2 850 379 461
912 865 470	2 738 596 410	950 264 871	2 850 794 613
914 650 287	2 743 950 861	951 026 487	2 853 079 461
914 652 870	2 743 958 610	951 264 870	2 853 794 610
916 450 287	2 749 350 861	952 648 701	2 857 946 103
916 452 870	2 749 358 610	952 648 710	2 857 946 130
928 564 701	2 785 694 103	958 647 012	2 857 941 036
928 564 710	2 785 694 130	958 647 021	2 857 941 063
928 701 465	2 786 104 395	958 647 102	2 857 941 306
928 701 645	2 786 104 935	958 647 120	2 857 941 360
928 714 650	2 786 143 950	958 647 201	2 857 941 603
946 570 182	2 839 710 546	958 647 210	2 857 941 630
946 570 218	2 839 710 654	964 570 218	2 893 710 654
946 571 802	2 839 715 406	964 570 182	2 893 710 546
946 571 820	2 839 715 460	964 571 802	2 893 715 406
946 572 018	2 839 716 054	964 571 820	2 893 715 460
946 572 180	2 839 716 540	964 572 018	2 893 716 054
946 580 172	2 839 740 516	964 572 180	2 893 716 540
946 580 217	2 839 740 651	964 580 172	2 893 740 516
946 581 720	2 839 745 160	964 580 217	2 893 740 651
946 582 017	2 839 746 051	964 581 702	2 893 745 106
948 657 012	2 845 971 036	964 581 720	2 893 745 160
948 657 021	2 845 971 063	964 582 017	2 893 746 051
948 657 102	2 845 971 306	964 582 170	2 893 746 510
948 657 120	2 845 971 360	964 857 012	2 894 571 036

1) Urmare la Nota dela pag. 127, Vol. XLIV, « *Gazeta Matematică* ».

N_3	N	N_3	N
964 857 021	2 894 571 063	971 824 560	2 915 473 680
964 857 102	2 894 571 306	971 825 460	2 915 476 380
964 857 120	2 894 571 360	972 014 586	2 916 043 758
964 857 201	2 894 571 603	972 145 860	2 916 437 580
964 857 210	2 894 571 630	972 158 460	2 916 475 380
964 870 125	2 894 610 375	972 456 018	2 917 368 054
964 870 251	2 894 610 753	972 456 180	2 917 368 540
964 871 025	2 894 613 075	972 485 601	2 917 456 803
964 871 250	2 894 613 750	972 485 610	2 917 456 830
964 872 501	2 894 617 503	972 546 018	2 917 638 054
964 872 510	2 894 617 530	972 546 180	2 917 638 540
965 012 487	2 895 037 461	972 548 601	2 917 645 803
965 024 871	2 895 074 613	972 548 610	2 917 645 830
965 102 487	2 895 307 461	980 172 456	2 940 517 368
965 124 870	2 895 374 610	980 172 546	2 940 517 638
965 248 701	2 895 746 103	980 245 617	2 940 736 851
965 248 710	2 895 746 130	980 254 617	2 940 763 851
965 847 012	2 897 541 036	981 702 456	2 945 107 368
965 847 021	2 897 541 063	981 702 546	2 945 107 638
965 847 102	2 897 541 306	981 724 560	2 945 173 680
965 847 120	2 897 541 360	981 725 460	2 945 176 380
965 847 201	2 897 541 603	982 456 017	2 947 368 051
965 847 210	2 897 541 630	982 456 170	2 947 368 510
970 124 856	2 910 374 568	982 546 017	2 947 638 051
970 182 456	2 910 547 368	982 546 170	2 947 638 510
970 145 862	2 910 437 586	984 570 162	2 953 710 486
970 158 462	2 910 475 386	984 571 620	2 953 714 860
970 245 618	2 910 736 854	984 602 157	2 953 806 471
970 248 561	2 910 745 683	984 615 702	2 953 847 106
970 254 618	2 910 763 854	984 615 720	2 953 847 160
970 254 861	2 910 764 583	984 620 157	2 953 860 471
971 024 856	2 913 074 568	984 621 570	2 953 864 710
971 025 486	2 913 076 458	984 701 256	2 954 103 768
971 248 560	2 913 745 680	984 702 561	2 954 107 683
971 254 860	2 913 764 580	984 710 256	2 954 130 768
971 458 602	2 914 375 806	984 712 560	2 954 137 680
971 458 620	2 914 375 860	984 725 601	2 954 176 803
971 584 602	2 914 753 806	984 725 610	2 954 176 830
971 584 620	2 914 753 860	985 470 126	2 956 410 378
971 802 456	2 915 407 368	985 470 261	2 956 410 783
971 802 546	2 915 407 638	985 471 026	2 956 413 078

N_3	N	N_3	N
985 471 260	2 956 413 780	986 214 570	2 958 643 710
985 472 601	2 956 417 803	986 254 701	2 958 764 103
985 472 610	2 956 417 830	986 254 710	2 958 764 130
985 601 247	2 956 803 741	986 014 572	2 958 043 716
985 602 471	2 956 807 413	987 014 625	2 961 043 875
985 610 247	2 956 830 741	987 016 245	2 961 048 735
985 612 470	2 956 837 410	987 024 516	2 961 073 548
985 624 701	2 956 874 103	987 025 146	2 961 075 438
985 624 710	2 956 874 130	987 026 145	2 961 078 435
985 701 462	2 957 104 386	987 145 026	2 961 435 078
985 702 146	2 957 106 438	987 145 260	2 961 435 780
985 714 602	2 957 143 806	987 146 025	2 961 438 075
985 714 620	2 957 143 860	987 146 250	2 961 438 750
985 720 146	2 957 160 438	987 150 246	2 961 450 738
985 721 460	2 957 164 380	987 152 460	2 961 457 380
986 012 547	2 958 037 641	987 162 450	2 961 487 350
986 014 572	2 958 043 716	987 245 016	2 961 735 048
986 021 457	2 958 064 371	987 245 160	2 961 735 480
986 025 471	2 958 076 413	987 246 015	2 961 738 045
986 102 547	2 958 307 641	987 246 150	2 961 738 450
986 125 470	2 958 376 410	987 250 146	2 961 750 438
986 145 702	2 958 437 106	987 251 460	2 961 754 380
986 145 720	2 958 438 160	987 260 145	2 961 780 435
986 201 457	2 958 604 371	987 261 450	2 961 784 350

Cu această notă am terminat publicarea soluțiunilor ce am găsit pentru ecuațiunea

$$3 \times N_3 = N$$

în care N_3 conține toate cifrele sistemului zecimal, mai puțin cifra 3, iar N este un număr de 10 cifre diferite.

După ce voiu publica o serie de soluțiuni noi găsite de D-l ST. CETĂȚEANU, voiu publica și soluțiunile ce am găsit pentru

$$6 \times N_6 = N \quad \text{și} \quad 9 \times N_9 = N.$$

(Va urma) G-L GH. BUICLIU.

15. *Asupra problemei 3675.*

Cred nimerit a se publica încă o soluție a acestei probleme bazată pe una din proprietățile interesante ale punctelor *Cisoidei lui* DIOCLÈS, proprietate care a fost utilizată de geometrii greci la

rezolvarea problemei mediilor proporţionale şi de care bănuesc că s'a servit şi autorul problemei 3675 la propunerea ei.

Insemnând cu I, intersecţia diagonalelor AC, BD, proprietatea *cisoidei* în condiţiile problemei 3675 (notaţiile din figura dela pagina 138 din acest volum) se exprimă prin egalitatea:

$$(1) \qquad AI \cdot IB = CI \cdot ID,$$

punctul B descriind *cisoida,* A şi C fiind fixe, iar D descriind cercul de diametru $AC = 2a$.

In cazul problemei 3675, după figură avem:

$$\overline{ID}^2 = CI \cdot AI$$

şi

$$\overline{CI}^2 = ID \cdot IB$$

$$\therefore \quad \frac{ID}{CI} = \frac{AI}{ID} = \frac{CI}{IB}.$$

Din ultimele două rapoarte rezultă relaţia (1), care de fapt tradusă în analitică ne dă ecuaţia *cisoidei.* Intr'adevăr ţinând seamă că (axele de coordonate ca la „Nota" dela pagina 138):

$$AI = 2a - x \; ; \quad CI = x \; ; \quad IB = y \quad \text{şi} \quad \overline{ID}^2 = x(2a - x)$$

rezultă:

$$y = \pm \cdot \frac{x}{2a - x} \sqrt{x(2a - x)} \quad \text{sau} \quad y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

GENERAL GH. I. LITEANU.

16. *Formarea câtorva egalităţi multigrade.*

Din egalitatea multigradă

$$(1, 13, 25, 55, 75, 87, 95)^p = (7, 11, 19, 61, 69, 91, 93)^p$$

pentru:

$$p = 1, 3, 5, 7, 9$$

stabilită de D-l A. MOESSNER am dedus încă pe următoarele trei, uşor de verificat:

A) $$(1, 31, 55, 61, 63, 85, 87, 93, 101)^p$$
$$= (17, 25, 49, 67, 69, 75, 89, 97, 99)^p$$

pentru $$p = 2, 4, 6, 8, 10.$$

B) Pentru $p = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ avem:

$$(1, 8, 12, 16, 24, 28, 32, 33, 37, 44, 44, 47, 48, 51)^p$$
$$= (9, 13, 15, 25, 27, 30, 35, 38, 42, 45, 46, 50, 50)^p$$

cu 14 termeni.

C) In fine pentru

$$p = 2, 4, 6, 8, 10, 12$$

$$(3, 7, 13, 18, 23, 25, 28, 33, 34, 36, 39, 43, 46, 48, 50, 53)^p$$
$$= (1, 6, 15, 17, 22, 27, 29, 31, 32, 37, 42, 42, 45, 47, 52, 52)^p.$$

Simbolul

$$(a, b, c, \ldots)^n = (\alpha, \beta, \gamma, \ldots)^n$$

înseamnă

$$a^n + b^n + c^n + \ldots = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \ldots$$

A. GLODEN
(Luxemburg).

17. *Asupra unei teoreme.*

Dăm o demonstrație algebrică cunoscutei teoreme din Geometria elementară:

Raportul suprafețelor a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul pătratelor laturilor omoloage.

Fie: ABC și A'B'C' două triunghiuri asemenea; a, b, c, a', b', c', laturile lor; p, p' semi-perimetrele; S, S' suprafețele.

Se știe că avem:

$$\frac{p}{p'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k.$$

Deducem:

$$\frac{p}{p'} = \frac{p-a}{p'-a'} = \frac{p-b}{p'-b'} = \frac{p-c}{p'-c'} = k$$

$$\frac{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p'\,(p'-a')\,(p'-b')\,(p'-c')} = k^4.$$

Extrăgând rădăcina pătrată și ținând seamă de expresia suprafeței triunghiului în funcție de laturi avem:

$$\frac{S}{S'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{c^2}{c'^2} = k^2.$$

VIRGIL GHIȚESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ „REGELE CAROL II“ BUCUREŞTI

Concurs de admitere în Ciclul I

(15 Septemvrie — 7 Octomvrie 1938)

I. ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

1. Să se studieze variaţia funcţiunii:

$$y = \frac{x^2}{16} e^{\frac{x}{x-4}}$$

şi să se reprezinte grafic această variaţie.

2. Cineva vrea să construiască un rezervoriu metalic de capacitate dată $\frac{\pi}{3} a^3$, şi de forma unui cilindru terminat la capete cu câte o emisferă.

Cum trebue dimensionat acest rezervoriu (raportul dintre înălţimea cilindrului şi raza emisferelor), astfel încât preţul de cost să fie minim, ştiind că preţul unitar de suprafaţa construită este de două ori mai mare pentru emisfere decât pentru corpul cilindric al rezervoriului.

3. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei:

$$\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + \lambda = 0$$

când parametrul λ variază. Să se afle θ cu o eroare $< 1'$ în cazul $\lambda = 5$.

(Se va lua ca necunoscută $x = \cos\theta$).

II. GEOMETRIA ANALITICĂ

Axele fiind rectangulare: să se scrie ecuaţia unei iperbole (H) care satisface la următoarele condiţii:

1. Axa Ox este asimptotă a iperbolei;
2. Cealaltă asimptotă trece prin punctul

$$x = 1 \quad , \quad y = 0$$

3. Dreapta

$$x = 2$$

este *tangentă* la iperbolă în punctul

$$x = 2 \quad , \quad y = +\frac{1}{2}.$$

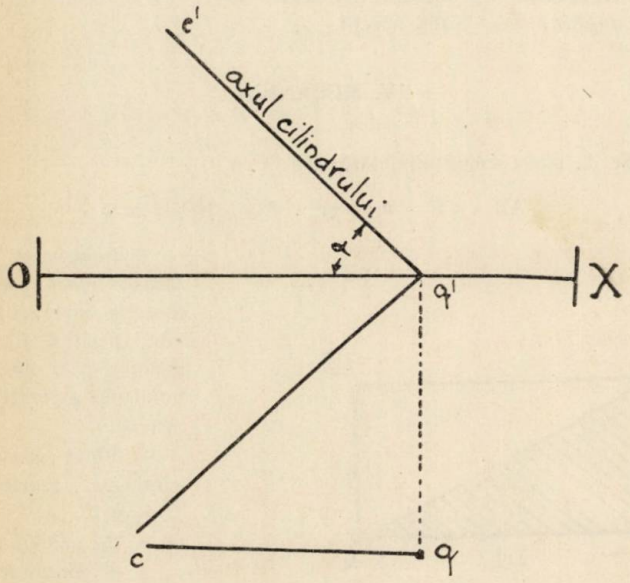
După ce se va fi stabilit ecuaţia iperbolei (H):

4. Să se verifice că axa Oy este tangentă la iperbolă;
5. Să se determine *axele* iperbolei (H).

III. GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ ŞI COMPLEMENTE DE GEOMETRIE

1. Se dă: a) *Un cilindru* cu baza un cerc aşezat în planul orizontal de proiecţie, cu centrul în Q (q, q'), de rază R; axul cilindrului este paralel cu planul vertical de proiecţiune şi face unghiul α cu direcţia XO.

b) *Un con*, cu baza un cerc, aşezat în planul orizontal de proiecţie ,determinat astfel: cercul de bază este tangent la linia de pământ OX şi la dreapta $q't$, dusă prin q' tangentă la cercul de bază al cilindrului, definit mai sus (se va alege dintre cele două tangente ce se pot duce din q' la cercul de bază al cilindrului, pe aceea care este înclinată dela dreapta spre stânga, când privim epura); cercul de bază al conului trece prin proiecţiunea orizontală c, a punctului C (c, c') în care axul cilindrului întâlneşte planul orizontal de cotă h, (se va alege soluţia care dă cercul cel mai mic).



Vârful S (s, s') al conului se află în acelaş plan orizontal de cotă h şi se proiectează orizontal în centrul cercului de bază al cilindrului.

Se cere: să se deseneze curba de intersecţie între cilindru şi con şi tangenta la această curbă într'un punct de cotă k.

Se va reprezenta ansamblul celor două corpuri:

Date numerice:

Q (270, 70,0) ; R (raza cilindrului) = 50 ; $h = 130$

$k = 45$ $\alpha = 45^0$.

Toate lungimile sunt date în mm.

2. Se consideră un unghiu $xoy = 45^0$; pe dreapta Ox se ia $\overline{OA} = 1$, $\overline{OB} = 3$; de aceeaşi parte a punctului O.

Se cere:

a) Să se determine pe Ox un punct M aşa fel ca

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \left|\frac{1}{3}\right|,$$

b) Să se afle distanţa OM.

c) Să se determine pe latura Oy a unghiului dat, un punct P, astfel ca:

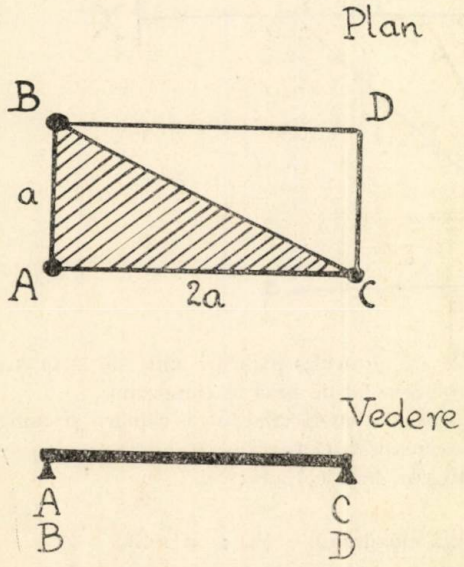
$$\frac{PA}{PB} = \frac{1}{3}.$$

3. Presupunând că unghiul xoy se roteşte în jurul laturii Ox, se cere să se afle *unghiul solid* astfel născut.

IV. MECANICA

1. Se dă placa dreptunghiulară ABCD cu

$$AB = CD = a \quad \text{şi} \quad AC = BD = 2a.$$



Jumătatea ABC din această placă este făcută dintr'un material de greutate specifică d_1, iar jumătatea BCD dintr'un material de greutatea specifică d_2.

Placa reazimă orizontal pe 3 reazime simple A, B şi C.

Se cere:

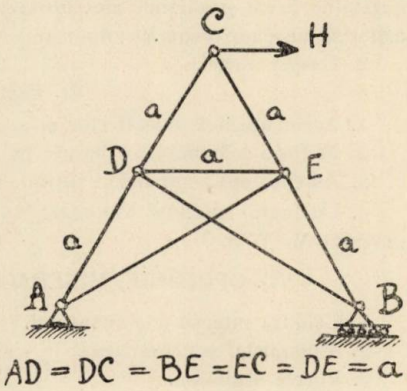
1°. Condiţia ca placa să nu se răstoarne în jurul axei BC.

2°. Găsind condiţia dela punctul 1°, să se afle reacţiunile reazimelor A, B, C.

3°. Să se găsească reacţiunile dela punctul 2° pentru:

$a = 1\text{m}$; $d_1 = 7{,}8$ kg/dm³ (fer) şi $d_2 = 1$ kg/dm³ (lemn).

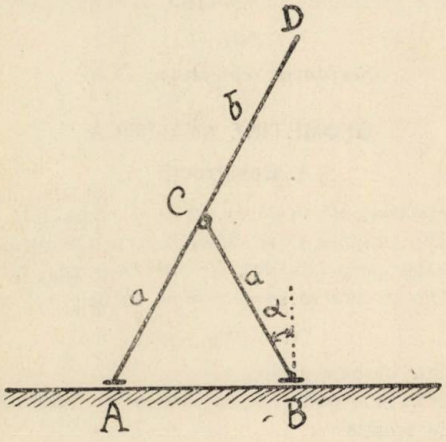
2. Se dă sistemul articulat ABCDE, reazemul din A fiind o articulaţie fixă, iar cel din B simplu (pe roulou), amândouă reazemele la acelaşi nivel.



Sistemul este acţionat de forţa orizontală H, aplicată în C.

Să se găsească reacţiunile reazemelor şi eforturile în bara DE.

3. Se dă bara AD, omogenă, de greutate p kg/m care este rezemată în A pe un plan orizontal, cu frecare şi în C este articulată de bara CB. Această din urmă bară reazemă în B pe planul orizontal care trece prin A, cu frecare şi se consideră fără greutate.



Se dă: AC = CB = a; CD = b. Coeficientul de frecare $f = \text{tg}\varphi$. Se cere să se găsească:

1°. Poziţiile limită de echilibru ($\sphericalangle \alpha$) ale sistemului.

2°. Reacţiunile din A, B, C.

3°. Să se discute cazurile $a = b$; $a > b$; şi $a < b$.

V. CHIMIE GENERALĂ

1. Se dă substanţa naturală numită huilă şi se cere:

a) O descriere asupra acestei substanţe,

b) Să se arate ce produse obţinem prin încălzirea huilei în retorte, în afară de contactul aerului.

c) Care-i compoziția fiecărui produs obținut dela punctul *b*, descriindu-se proprietățile fizice și chimice ale substanțelor ce constituesc produsele, pentru ca astfel să ne dăm seama de importanța huilei din punct de vedere industrial.

2. Despre nichel.

VI. FIZICA

1. Acromatismul obiectivelor și a ocularelor.
2. Metode colorimetrice bazate pe dilatațiuni.
3. Ascensiunea unui lichid într'un tub capilar.
4. Un lucru mecanic valorează 100.000 unități C. G. S., cât va valora în sistemul M. T. S. ?

VII. GEOLOGIE, MINERALOGIE, PETROGRAFIE

1. Căldura internă a pământului.
2. Mineralele ce cristalizează în sistemul cubic.
3. Rocele argiloase.
4. Dislocațiunile radiale.
5. Despre magmă și procesul de consolidare.

(Toate chestiunile obligatorii. — Timpul acordat: 4 ore).

ANUL I

(Sesiunea Septemvrie 1938)

GEOMETRIE ANALITICĂ

A. Construcții

1. Se consideră tangentă în M (x, y) la o curbă (C) din planul axelor rectangulare Oxy. Din originea O se coboară perpendiculara OT pe tangentă, T fiind piciorul acestei perpendicular, iar MN normala în M la curba (C) mărginită de axul Ox se cere să se determine curbele (C) astfel ca:

$$\overline{OT} \times \overline{MN} = a^2.$$

Să se reprezinte curbele găsite.

2. Se consideră, în raport cu un sistem de referință tridreptunghic $Oxyz$, planul (P) de ecuație:

$$(P) \qquad x + z = 0$$

și dreapta (D):

$$(D) \qquad y = z = 1.$$

O dreaptă variabilă (Δ) taie axul Oz și dreapta (D) rămânând paralelă cu planul (P),

Se cere locul descris de punctul M, intersecția dreptei (Δ) cu planul xoy.

Să se figureze locul găsit.

B, F. Electromecanică, Aviație și Armament

1. M (x, y) fiind un punct oarecare al unei curbe (C) din planul axelor rectangulare Oxy, U și V proiecțiile acestui punct respectiv pe axele Ox și Oy, iar T și N proiecțiunile punctului O respectiv pe tangenta și normala duse în M la curba (C) se cere:

a) Să se determine curbele (C) astfel ca:

$$\overline{OT} \times \overline{ON} = \overline{MU} \times \overline{MV}$$

b) Să se figurze curbele găsite.

2. Să se calculeze unghiul format de tangenta într'un punct oarecare M (x, y, z) la curba:

$$(C) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

cu dreapta OM.

Axele $Oxyz$ sunt rectangulare.

C. Mine şi Metalurgie

1. Un cablu suspendat între punctele A şi B ia forma unei parabole cu axa verticală. In A cablul este tangent la dreapta AC. Să se determine ecuaţia parabolei faţă de axele rectangulare Oxy, în cazul:

$$A(1, 0) \ ; \ B(4, 3) \ ; \ C(2, 0).$$

Să se determine apoi:

a) Vârful parabolei.

b) Raza de curbură în acest punct.

2. Să se scrie ecuaţia planului normal în punctul M(1, 1, 1) la curba de ecuaţii

$$(C) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ y^2 + z^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

(Toate chestiunile obligatorii. — Timp acordat: 3 ore).

BIBLIOGRAFIE

Journal de Mathématiques élémentaires publicat de H. VUIBERT. Paris. An. 63. Nr. 5. 1 Decemvrie 1938.

Mathesis publicată de AD. MINEUR. Tome LII. Nr. 8. Octomvrie 1938. Asupra grupelor de puncte aparţinând înălţimilor unui triunghiu sau unui tetraedru ortocentric de R. GOORMAGHTIGH. Note de trigonometrie de R. COENEN. Asupra isopolului de V. THÉBAULT. Extragerea rădăcinilor prin metoda heroniană de H. ORY. Patrulater simplu circumscris la o parabolă şi inscris unui cerc de AD. MINEUR. Notă asupra triunghiului isoscel de V. TÉBAULT.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVIII. Nr. 10. 15 Decemvrie 1938. Trigonometria patratică de V. ALACI.

Segunda reunion anual de caminos. (Conferinţe). Universidad nacional de La Plata. Rep. Argentina. Publicaciones de la facultad de ciencias fisico-matematicas. Nr. 115 bis. Iulie 1938.

Ştiinţă şi Progres. Revista ştiinţifică a liceelor militare. Anul V. Nr. 3. Noemvrie 1938 Liceul militar Tg.-Mureş. Teoreme asupra triunghiului de CEZAR IVĂNESCU.

Idem. Nr. 4 — 5. Decemvrie 1938. Târgu-Mureş.

Suplimentul Gazetei Matematice. Exerciţii. Anul V. Nr. 4. 1 Ianuarie 1939.

The Mathematical Gazette. Vol. XXII. Nr. 252. Decemvrie 1938. London. Data şi locul congresului anual. Teoreme asupra cercurilor şi sferelor coaxiale de R. T. ROBINSON. Impresiuni asupra matematicilor din Şcoală în Statele Unite de F. J. WOOD. Conice şi cubice de H. G. FORDER.

CPT. COMANDOR I. LINTEŞ. *Anularea flacărei şi undei de detonaţie pentru a spori posibilităţile de ascundere.* (Extras din Revista Artileriei Nr. 11 din 1938).

L-T. I. ZAMFIRESCU. *Asupra autofretajului.* Teoria şi calculul autofretajului fără tracţiune longitudinală (Extras din Revista Artileriei).

CERERI

Răspuns la Cererea Nr. 133.

In răspunsul dat de D-l I. I. ILIUŢĂ DĂBULENI se menţionează că la coloana 11 lipseşte numărul 3321, care evident nu este prim. E eroare de tipar?

I. I. GEORGESCU-RACOVIŢĂ.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

LEFÉBURE DE FOURCY. Leçons de Géométrie analytique comprenant la Trigonometrie rectiligne et sphérique les lignes et les surfaces de deux premiers ordres. Paris. 1871.

Donată de D-l VIRGIL GHIŢESCU, Profesor.

Sujets de concours pour l'admission à l'École professionnelle supérieure des Postes & Télégraphes. (2-e Section). Paris.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

THÉODORE CRIVETZ. Essai sur le Postulat D'EUCLIDE. Bucarest. 1895.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2194. *Să se demonstreze că numărul 792 este singurul număr de trei cifre pentru care avem o egalitate de forma următoare:*

$$792^3 = 496 \,.\, 793 \,.\, 088$$

adică pentru care numărul format de cele trei cifre mijlocii ale cubului său, întrece cu o unitate numărul considerat.

ST. N. MIREA.

Problema revine la a arăta că egalitatea

$$(1) \qquad mnp^3 = \alpha\beta\gamma\,(mnp+1)\,abc$$

în care mnp, $\alpha\beta\gamma$, $mnp+1$), abc sunt numere de câte 3 cifre, nu este posibilă decât pentru

$$mnp = 792.$$

Pentru aceasta vom proceda prin încărcări.

1°. Fie $p = 0$. Din (1) rezultă:

$$abc = 000$$

şi deci:

$$mn^3 = \alpha\beta\gamma\, mn1$$

de unde $n = 1$ şi deci

$$m1^3 = \alpha\beta\gamma\, m11.$$

Să căutăm numărul de 2 cifre $m1$ al cărui cub se termină cu 11. Facem cubul lui $m1$ prin operaţiile obişnuite de înmulţire

$$\begin{array}{r} m1 \\ \times\ m1 \\ \hline m\,.\,1 \\ \ldots\ m \\ \hline \ldots 2m\,.\,1 \\ \times\ m\ \ 1 \\ \hline \ldots 2m\,.\,1 \\ \ldots\ m \\ \hline \ldots 3m\,.\,1 \end{array}$$

ceea ce arată că zecile lui $m1^3$ sunt date de unităţile lui $3m$. Ori $3m$ se termină cu 1 numai dacă $m = 7$. Dar:

$$71^3 = 357911$$

care nu satisface pe (1).

2^0. Fie $p = 1$. Din (1) avem:

$$mn1^3 = \alpha\beta\gamma\, mn2ab1$$

$$(10 \times mn + 1)^3 = 10 \times \alpha\beta\gamma\, mn2ab + 1$$

$$\therefore \quad mn^3 \times 100 + 30 \times mn^2 + 3 \times mn = \alpha\beta\gamma\, mn2ab \qquad (2)$$

de unde se vede că b este cifra unimilor lui $3n$. Facem următorul tabel ale valorilor lui b corespunzător valorilor lui n din (2).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7

Dau lui n și b în (2) pe rând valorile acestui tabel, afară de valoarea 0 care anulează membrul I al lui (2). Pentru valorile (1, 3) egalitatea (2) devine

$$m1^3 \times \quad 100 + \quad 30 \times m1^2 + \quad 3 \quad \times \quad m1 = \alpha\beta\gamma\, m12a3$$

$$\therefore \quad m^3 \times 10000 + 600 \times m^2 + 363m + 13 = \alpha\beta\gamma\, m12a. \qquad (3)$$

Se formează un total ca precedentul și anume:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	3	6	9	2	5	8	1	4	7	0

și apoi se introduc aceste valori pe rând în (3). Nu se găsește nici un grup pentru care suma din membrul I a lui (3) să se termine în $m12a$.

Se procedează la fel cu celelalte grupe de valori pentru n și b.

3^0. Fac $p = 2$ și procedând la fel găsesc

$$\boxed{792^3 = 496.793.088}.$$

4^0. Pentru $p = 3, 4, \ldots 9$ nu se găsesc numere care să satisfacă pe (1). Incercările, foarte numeroase, sunt identice cu cele dela cazul 1^0, 2^0 și 3^0.

Notă. 1. D-nii: D. NICULESCU şi I. PĂUN, care au fost menţionaţi pe Coperta Vol. XXI — 1915/16, au demonstrat proprietatea prin calcule şi tabele numerice foarte numeroase şi complicate.

2. D-l V. THÉBAULT consideră proprietatea lui 792 ca pe o curiozitate numerică pe care o citează în nota dela pag. 283, Vol. XLI *Gazeta Matematică* unde afirmă, fără a demonstra, că 792 şi 8772 sunt singurile numere de câte 3 şi 4 cifre ale căror cuburi sunt de una din formele

$$N^3 = A\,(N \pm 1)\,B$$

şi adică

$$792^3 = 496\,\textit{793}\,088$$

$$8772^3 = 6749\,\textit{8771}\,5648.$$

G-L GH. B.

PROBLEMA 4225. *Se dau ecuaţiile:*

(1) $$f(x) \equiv a_0 x^2 + 2a_1 . x + a_2 = 0;$$

(2) $$g(x) \equiv b_0 . x^2 + 2b_1 . x + b_2 = 0$$

ale căror rădăcini sunt de aceeaşi natură.

Se consideră ecuaţia:

(3) $$\varphi(x) \equiv a_0 c_0 g(x) + 2c_1 (a_0 x + a_1)(b_0 x + b_1) + b_0 . c_2 . f(x) = 0.$$

Să se determine în ce caz ecuaţia (3) *are rădăcinile de aceeaşi natură ca acele ale ecuaţiilor* (1) *şi* (2), *ori care ar fi aceste ecuaţii.*

N. CIORĂNESCU.

Soluţie. Inlocuind în (3) expresiile celor două polinoame şi efectuând calculele obţinem:

$$\varphi(x) \equiv a_0 b_0 (c_0 + 2c_1 + c_2) . x^2 + 2 [a_0 b_1 (c_0 + c_1) + a_1 b_0 (c_1 + c_2)] x + a_0 b_2 c_0 + 2 a_1 b_1 c_1 + a_2 b_0 c_2 = 0.$$

Discriminantul acestei ecuaţii este:

$$R \equiv 4 [a_0^2 . b_1^2 (c_0 + c_1)^2 + a_1^2 . b_0^2 (c_1 + c_2)^2 + 2 a_0 b_0 a_1 b_1 (c_0 + c_1)(c_1 + c_2) - a_0 b_0 (c_0 + 2 c_1 + c_2)(a_0 b_2 c_0 + 2 a_1 b_1 c_1 + a_2 b_0 c_2)]$$

sau, fiindcă R este un polinom omogen de gradul al doilea în raport cu c_0, c_1, c_2.

$$R/4 \equiv a_0^2 c_0^2 (b_1^2 - b_0 . b_2) + (a_0 b_1 - a_1 . b_0)^2 . c_1^2 + b_0^2 (a_1^2 - a_0 . a_2) . c_2^2 + 2a_0^2 (b_1^2 - b_0 b_2) . c_0 c_1 + 2b_0^2 (a_1^2 - a_0 a_2) . c_1 c_2 + a_0 b_0 (2 a_1 b_1 - a_0 b_2 - a_2 b_0).$$

Fie acum R_f şi R_g discriminanţii ecuaţiilor (1) şi (2), adică:

$$R_f \equiv 4(a_1^2 - a_0 a_2) \quad ; \quad R_g \equiv 4(b_1^2 - b_0 . b_2).$$

Substituind aceste expresii şi grupând convenabil termenii, R va lua forma definitivă

$$R \equiv a_0^2 (c_0 + c_1)^2 . R_g + b_0^2 . (c_1 + c_2)^2 . R_f + 4a_0 b_0 . Q$$

unde

$$Q \equiv (a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0) . (c_1^2 - c_0 . c_2).$$

Citim pe această expresie a lui R, un prim rezultat remarcabil:

„Dacă ecuaţia $c_0 x^2 + 2c_1 . x + c_2 = 0$ *are rădăcină dublă, atunci ecuaţiile* (1), (2), (3) *au rădăcinile lor de aceeaşi natură, ori care ar fi ecuaţiile* (1) *şi* (2).

Dacă însă ecuaţiile (1) şi (2) *nu sunt oarecari,* mai putem enunţa următoarele rezultate:

1. *Rădăcinile ecuaţiei* (3) *sunt de aceeaşi natură ca ale ecuaţiilor* (1) *şi* (2), *dacă aceste ecuaţii au rădăcinile conjugate.*

2. *Ecuaţiile* (1) *şi* (2) *având în acelaşi timp rădăcinile reale sau imaginare, şi ecuaţia* (3) *va avea rădăcinile sale reale sau imaginare, după cum*

$$Q \equiv (a_0 b_2 - 2a_1 . b_1 + a_2 b_0) . (c_1^2 - c_0 c_2) \gtrless 0.$$

(am presupus $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, ceea ce se poate totdeauna).

3. *Ecuaţiile* (1) *şi* (2) *având rădăcinile lor de aceeaşi natură, condiţia necesară şi suficientă ca şi rădăcinile ecuaţii* (3) *să fie de aceeaşi natură este:*

$$| P | \geqslant 4a_0 b_0 | Q |$$

unde

$$P \equiv a_0^2 (c_0 + c_1)^2 . Rg + b_0^2 (c_1 + c_2)^2 . Rf.$$

Observaţiuni. La această problemă s'a primit o singură soluţie dela D-l D. MAVRODIN, pe când era elev în clasa 7-a. Soluţia dată, destul de bună, are unele scăpări de calcul şi de interpretare.

PROBLEMA 4230. *Un „Yo — Yo" lăsat liber, capătă* 1933 *de ture pe minut la finele căderei.*

Ştiind că raza lui este 25 mm. *şi greutatea* 300 gr., *se întreabă: până la ce înălţime se va urca iarăşi pe sfoară?*

Cum ar trebui să mişcăm mâna, pentru a-i ajuta urcarea?

Se va presupune că frecarea cu sfoara este $f = 0{,}1$.

CĂPITAN I. LINTEŞ.

„Yo — Yo“ a fost la modă în 1933. El era constituit dintr'o rotiță de metal, cauciuc, lemn, etc... de forma unui scripete, având legată o sfoară. Copii se jucau cu multă abilitate, lăsându-l să cadă, apoi înlesnindu-i urcare pe sfoară, capătul liber al sfoarei fiind ținut în mână.

Iată și teoria mecanică a lui:

In coborîre.

Ecuația lucrului mecanic în coborîre este:

$$1) \qquad \frac{1}{2} m V_c^2 + f . z_c = I . \omega^2$$

unde m este massa, V_c viteza de coborîre, z_c înălțimea de coborîre, I momentul de inerție și ω viteza unghiulară de rotație.

Dacă neglijem rezistența aerului, atunci avem:

$$V_c = \sqrt{2gz_c},$$

prin urmare înălțimea de coborîre va fi:

$$2) \qquad z_c = \frac{I . \omega^2}{m . g + f} .$$

In cazul problemei avem:

$$I = \frac{r^2}{4} . m = \frac{0{,}025^2}{4} \cdot \frac{0{,}3}{9{,}81} \text{ kg. m}^2$$

$$\omega = 1933 . \frac{2\pi}{60} = 202{,}31 \text{ ture/sec.}$$

$$f = 0{,}1.$$

Inlocuind se obține:

$$z_c = 0{,}4889 \text{ m.}$$

In urcare.

Ecuația lucrului mecanic în urcare este:

$$3) \qquad \frac{1}{2} m V_u^2 + f . z_u = I . \omega^2$$

unde V_u este viteza de urcare și z_u înălțimea de urcare.

Dacă neglijem rezistența aerului, atunci avem :

$$V_u = \sqrt{V_0^2 - 2gz_u} \quad , \text{ iar } \quad V_0 = (V_c)_{max.} = \sqrt{2gz_c} .$$

In consecință, înălțimea de urcare este :

$$4) \qquad z_u = z_c \cdot \frac{1}{\frac{m \cdot g}{f} - 1} .$$

In cazul problemei avem :

$$z_u = \frac{1}{2} z_c = 0{,}24445 \text{ m.}$$

* * *

Cum ar trebui să mișcăm mâna, pentru a-i ajuta urcarea ?

Dacă la coborîrea „Yo — Yo"-lui ridicăm mâna cu viteza V_c, atunci înălțimea de coborîre nu se schimbă, deci înălțimea de urcare a mânei devine :

$$5) \qquad z'_c = \frac{I \cdot \omega^2}{f} .$$

Dacă la urcarea „Yo — Yo"-lui coborîm mâna cu viteza V_u, atunci înălțimea de urcare nu se schimbă, deci înălțimea de coborîre a mânei devine :

$$6) \qquad z'_u = \frac{I \cdot \omega^2}{f} .$$

Cu alte cuvinte :

$$z'_c = z'_u = \frac{I \cdot \omega^2}{f} .$$

In cazul problemei avem :

$$z'_c = z'_u = 2{,}9556 \text{ m.}$$

Cu alte cuvinte, mâna trebue să execute mișcarea în sens invers cu „Yo — Yo"-ul, pentru a-l ajuta în urcare.

CĂPITAN COMANDOR I. LINTEȘ.

PROBLEMA 4526. *Fie* A_b *şi* A_c *proiecţiunile vârfului* A *al triunghiului* ABC *respectiv pe bisectoarele unghiurilor* B *şi* C. *Analog se obţin punctele* B_c, B_a, C_a, C_b. $A_1B_1C_1$ *fiind triunghiul format de dreptele* $A_b A_c$, $B_c B_a$ *şi* $C_a C_b$ *să se arate că:*

1°. *Triunghiurile* ABC *şi* $A_1B_1C_1$ *sunt ortologice;*

2°. *Dreapta care uneşte centrele lor de ortologie trece prin centrul de greutate al triunghiului* ABC.

THEODOR G. COCEA.

1°. *Soluţie* dată de D-nii: D. LEBĂDĂ (Liceul militar, Iaşi) şi I. I. ŢIŢEICA (Buzău). Se ştie că dreapta $A_b A_c$ trece prin mijloacele laturilor AB, AC ale triunghiului ABC [1]); deci triunghiul $A_1B_1C_1$ este triunghiul median.

Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt ortologice deoarece perpendicularele duse din vârfurile primului triunghiu pe laturile corespunzătoare ale celuilalt triunghiu sunt concurente, fiind chiar înălţimile sale.

Cele două centre de ortologie sunt ortocentrul triunghiului fundamental şi centrul cercului său circumscris, deci dreapta care le uneşte este dreapta lui EULER a triunghiului, care trece prin centrul de greutate [2]).

2°. Au mai soluţionat problema D-nii: N. D. ŞTEFĂNESCU, R. V. APOSTOL (Liceul militar, Nicolae Filipescu) şi S-LT. I. C. PAREPEANU (din Geniu).

3°. *Observări. a)* D-l I. I. ŢIŢEICA adaugă observarea: „Dreptele $B_c C_b$, $C_a A_c$, $A_b B_a$ formează un triunghiu A'B'C', polarul reciproc al lui ABC în raport cu cercul înscris (I), ortologic deci cu ABC, cu dublul centru de ortologie I. Dealtfel A'B'C' este în acelaşi timp podarul lui I sau pedalul punctului lui GERGONNE".

In adevăr, fie A' punctul unde $A_b B_a$ taie dreapta BC. Să evaluăm unghiul $B_a A'B$:

$$B_a\hat{A}'B = \pi - (B\hat{B}_aA' + B_a\hat{B}A') = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - C\right) = \pi - \frac{A+B}{2}.$$

In triunghiul $BB_a A'$ avem:

$$A'B = \frac{c \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{c\sqrt{\frac{(p-b)^2(p-c)p}{abc^2}}}{\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}} = p - b.$$

1) G. ŢIŢEICA: Culegere de probleme de geometrie Cap. II. Problema 19.
2) Idem. Cap. V. Problema 4.

Deci A′ este tocmai proecţia lui I pe BC. Analog se arată că A_b B_a taie AC în B′ proecţia lui I pe AC, etc.

b) Laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ determină pe laturile triunghiului T format de centrele cercurilor exînscrise nouă puncte, dintre care şase pe cercul lui TAYLOR al triunghiului T, iar trei pe axul radical al acestui cerc cu cercul circumscris triunghiului T.

C. I. B.

PROBLEMA 4595. *Se consideră un triunghiu* ABC, *înscris în cercul de centru* O *şi fie două puncte* M *şi* N *în planul său. Dacă există relaţiile:*

$$(1+k)\overline{MA}^2 - k\overline{NA}^2 = (1+k)\overline{MB}^2 - k\overline{NB}^2 = (1+k)\overline{MC}^2 - k\overline{NC}^2$$

punctul M *se găseşte pe dreapta* ON *şi împarte segmentul* ON *în raportul* k.

† N. BOTEA.

1°. *Soluţie* dată de D-nii: I. ŢIŢEICA (elev Mânăstirea Dealu), DIMITRIE MAVRODIN, VIRGIL ECKSTEIN şi S-LT. M. GRUMĂZESCU, M. A. NEGREA (Brăila), V. FLORESCU, N. D. ŞTEFĂNESCU şi R. APOSTOL.

Fie A_m, M_a, N_a proecţiile punctelor O, M, N pe BC.

Din relaţiile existente deducem:

$$(1+k)(\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2) = k(\overline{NB}^2 - \overline{NC}^2)$$

şi cum locul punctelor, pentru care diferenţa patratelor distanţelor la două puncte fixe este constantă, este o perpendiculară ridicată pe dreapta celor două puncte fixe,

$$\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = \overline{M_aB}^2 - \overline{M_aC}^2$$

$$\overline{NB}^2 - \overline{NC}^2 = \overline{N_aB}^2 - \overline{N_aC}^2,$$

rezultă:

$$(1+k)(\overline{M_aB}^2 - \overline{M_aC}^2) = k(\overline{N_aB}^2 - \overline{N_aC}^2) \quad \therefore$$

$$(1+k)(\overline{M_aB} + \overline{M_aC}) = k(\overline{N_aB} + \overline{N_aC})$$

sau

$$(1+k)\,\overline{A_mM_a} = k\overline{A_mN_a}.$$

Deci:

$$\frac{\overline{A_mN_a}}{\overline{A_mM_a}} = \frac{1+k}{k}, \quad \frac{\overline{A_mM_a}}{\overline{M_aN_a}} = k.$$

Punctul M se găseşte pe perpendiculara în M_a pe BC. Dar (1) arată că această perpendiculară trece printr'un punct M' al dreptei ON astfel ca $\overline{OM'} : \overline{M'N} = k$.

Analog se arată că M se găseşte pe perpendiculara în M_b, M_c respectiv pe CA, AB care taie pe ON în acelaşi punct M' definit mai sus. Conchidem $M \equiv M'$.

2°. Au soluţionat problema analitic D-nii: A. CĂLINESCU (profesor Roşiori), PAUL DOBRESCU (elev S. P. O.), CONST. N. GAVRILESCU (Bacău) şi S-LT. GR. MARTEŞ.

3°. *Note. a)* D-nii: DIMITRIE MAVRODIN şi V. ECKSTEIN au arătat că relaţiile problemei sunt şi necesare dacă punctul M se găseşte pe dreapta ON şi împarte segmentul $\overline{ON}$ în raportul k.

b) Pentru extinderi în spaţiu a se vedea articolele: C. IONESCU-BUJOR: *Asupra unor tetraedre* (G. M. Vol. XL, Nr. 7 şi Vol. XLI, Nr. 1).

c) k fiind un parametru variabil, punctul M descrie dreapta ON.

C. I. B.

PROBLEMA 4884. *Se dă triunghiul* ABC *şi un punct* P, *care împarte bisectoarea vârfului* A *în raportul:*

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PL}} = \frac{b+c}{a}$$

(L *fiind piciorul bisectoarei*). *Prin* P *se duce o dreaptă oarecare* Δ *şi se înseamnă cu* Δ_a, Δ_b, Δ_c *lungimile proiectantelor punctelor* A, B, C *pe* Δ. *Să se arate că avem relaţia:*

$$a\Delta_a + b\Delta_b + c\Delta_c = 0$$

a, b, c *fiind laturile triunghiului.*

Ce devine această relaţie când Δ *nu trece prin* P?

N. N. ALDEA.

I. *Soluţie şi generalizare.* Considerăm triunghiul ABC, o ceviană oarecare $\overline{AL}$ şi pe ea un punct P. Presupunem că:

$$\frac{\overline{PL}}{\overline{PA}} = \frac{m}{n} \text{ şi } \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} = \frac{p}{q}.$$

Fie o dreaptă oarecare Δ, care nu trece prin P. Insemnăm cu Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ_p, Δ_l, proiectantele punctelor A, B, C, P, L pe dreapta Δ. Fie T punctul de întâlnire al dreptelor Δ şi BC, iar

A', B', C', P', L' picioarele proiectantelor. Pentru trapezul BB'C'C avem:

$$(1)\quad \frac{\Delta_b}{\overline{BT}} = \frac{\Delta_l}{\overline{LT}} = \frac{\Delta_b - \Delta_l}{\overline{BL}} \qquad (2)\quad \frac{\Delta_l}{\overline{LT}} = \frac{\Delta_c}{\overline{CT}} = \frac{\Delta_l - \Delta_c}{\overline{LC}}.$$

Din (1) și (2) scoatem:

$$(3)\quad \frac{\Delta_b - \Delta_l}{\Delta_l - \Delta_c} = \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{p}{q}.$$

Pentru trapezul AA'L'L se găsește pe aceeași cale:

$$(4)\quad \frac{\Delta_a - \Delta_p}{\Delta_p - \Delta_l} = \frac{n}{m}.$$

Eliminând pe Δ_l între (3) și (4) obținem, după ce facem toate calculele:

$$(5)\quad \frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}+1\right)\Delta_a + \Delta_b + \frac{p}{q}\Delta_c = \left(\frac{m}{n}+1\right)\left(\frac{p}{q}+1\right)\Delta_p.$$

Proiectantele le vom considera pozitive pentru punctele situate de o parte a dreptei Δ și negative pentru cele situate în partea opusă.

In cazul particular al problemei

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b+c} \quad \text{și} \quad \frac{p}{q} = \frac{c}{b},$$

deci relația (5) devine:

$$(6)\quad a\Delta_a + b\Delta_b + c\Delta_c = (a+b+c)\Delta_p.$$

Se arată ușor că punctul P din problemă este centrul cercului înscris triunghiului ABC. Deci $P \equiv I$ și putem înlocui Δ_p prin Δ_i.

Dacă Δ trece prin $P \equiv I$, atunci $\Delta_p = \Delta_i = 0$ și relația devine:

$$a\Delta_a + b\Delta_b + c\Delta_c = 0.$$

II. *Soluția a doua.* Din C' ducem o paralelă la $\overline{BC}$, care întâlnește pe Δ_b și Δ_l în B'' și L''. Avem:

$$\frac{\overline{L''C'}}{\overline{B''C'}} = \frac{\overline{L''L'}}{\overline{B''B'}} \quad \text{sau} \quad (7)\quad \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}} = \frac{\Delta_l - \Delta_c}{\Delta_b - \Delta_c}$$

însă:

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{BL}} = \frac{q}{p} \qquad \text{deci} \qquad \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}} = \frac{q}{p+q},$$

iar (7) devine:

$$\frac{q}{p+q} = \frac{\Delta_t - \Delta_c}{\Delta_b - \Delta_c}.$$

Inlocuind pe Δ_t cu valoarea lui scoasă din (4), regăsim relaţia (5).

Corespondenţii noştri au dat soluţii numai pentru cazul particular al bisectoarei şi când Δ trece prin P. Astfel au dat soluţii D-nii: VICTOR FLORESCU (Liceul militar N. Filipescu), TĂTARU NICOLAE (Liceul militar Tg.-Mureş) şi M. AL. VASILESCU-STABU (Liceul Alba-Iulia).

D-l I. STREDER (Liceul militar Iaşi) lucrând greşit, ajunge totuşi la rezultat.

Observaţiuni. 1. D-nii: SLT. M. GRUMĂZESCU şi VIRGIL ECKSTEIN cred că problema este complet rezolvată de articolul regretatului V. CRISTESCU „Relaţiuni metrice în triunghiu", G. M. XXVI, pag. 24.

In acel articol se studiază problema în cazul când dreapta Δ trece necontenit prin punctul P. Din rezolvarea problemei 4884 şi din cele ce urmează, se vede că problema de faţă este o generalizare a articolului lui V. CRISTESCU, deoarece nu se impune dreptei Δ condiţia de a trece prin punctul P.

2. D-l SLT. M. GRUMĂZESCU demonstrează că punctul P din problemă este centrul cercului înscris triunghiului ABC.

3. Relaţia (5) nu e remarcabilă prin aspectul ei, însă este interesantă prin aplicaţiile sale. Putem găsi relaţii interesante prin particularizarea punctului P. Ele se pot stabili în trei moduri:

Primul mod. Cunoscând rapoartele $\frac{m}{n}$ şi $\frac{p}{q}$, De exemplu:

P $\equiv$ G *(centru de greutate)* avem: $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, $\frac{p}{q} = 1$.

Inlocuind în (5) obţinem:

$$\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = 3\Delta_g$$

relaţie cunoscută

P $\equiv$ H *(ortocentrul)* avem: $\frac{m}{n} = \frac{\cos B \cos C}{\cos A}$, $\frac{p}{q} = \frac{c \cos B}{b \cos C}$.

Ţinând seama de formulele:

$$c\cos B + b\cos C = a \quad \text{şi} \quad \cos A = -\cos(B + C),$$

obţinem din (5):

$$\sin A \cos B \cos C \cdot \Delta_a + \sin B \cos A \cos C \cdot \Delta_b + \sin C \cos A \cos B \cdot \Delta_c = \sin A \sin B \sin C \cdot \Delta_h$$

sau împărţind peste tot cu cosA cosB cosC:

$$\Delta_a \operatorname{tg} A + \Delta_b \operatorname{tg} B + \Delta_c \operatorname{tg} C = \Delta_h \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Al doilea mod. Când avem trei puncte colineare şi cunoscând relaţia (5) pentru două din ele vrem să o aflăm şi pentru al treilea P ≡ O *(centrul cercului circumscris)*. Se ştie că punctele H, G şi O sunt colineare şi că $\overline{GH} = 2\,\overline{OG}$ (TR. LALESCU, Geom. du Triangle, 1. 9 pag. 3). Cunoaştem relaţia (5) pentru G şi H şi vrem să o aflăm pentru O. Fie G', H' şi O' picioarele proiectantelor Δ_g , Δ_h şi Δ_0 .

Aplicând relaţia (4) trapezului HH'O'O avem :

$$\frac{\Delta_h - \Delta_g}{\Delta_g - \Delta_0} = 2$$

$$\therefore \quad 2\Delta_0 = 3\Delta_g - \Delta_h \,.$$

$$2\Delta_0 = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c - \frac{\Delta_a \operatorname{tg}A + \Delta_b \operatorname{tg}B + \Delta_c \operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A \operatorname{tg}B \operatorname{tg}C}$$

şi făcând calculele găsim:

$$\Delta_a \sin 2A + \Delta_b \sin 2B + \Delta_c \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C \,.\, \Delta_0$$

P ≡ N *(punctul lui* NAGEL). Se ştie că N, G şi I sunt colineare şi că $\overline{NG} = 2\,\overline{GI}$ (TR. LALESCU, Geom. du Triangle, 4. 40 pag. 35). Procedând la fel ca în cazul P ≡ 0, obţinem relaţia:

$$(p - a)\,\Delta_a + (p - b)\,\Delta_b + (p - c)\,\Delta_c = p\Delta_n \,.$$

Al treilea mod. Se observă din (5) că adunând coeficienţii lui Δ_a , Δ_b şi Δ_c , găsim ca rezultat coeficientul lui Δ_p :

$$\frac{m}{n}\left(\frac{p}{q} + 1\right) + 1 + \frac{p}{q} = \left(\frac{m}{n} + 1\right)\left(\frac{p}{q} + 1\right).$$

Deducem că dacă cunoaştem coeficienţii lui Δ_a , Δ_b şi Δ_c , putem afla imediat coeficientul lui Δ_p . Cu alte cuvinte dacă cunoaştem relaţia îndeplinită în cazul când Δ trece prin P :

$$\lambda\Delta_a + \mu\Delta_b + \nu\Delta_c = 0$$

atunci, pentru cazul când Δ nu trece prin P, avem relaţia :

$$\lambda\Delta_a + \mu\Delta_b + \nu\Delta_c = (\lambda + \mu + \nu)\,\Delta_p$$

şi problema se simplifică, deoarece este mai uşor de aflat relaţia în cazul când Δ trece prin P.

Vom folosi rezultatele din articolul lui V. CRISTESCU „Relaţiuni metrice în triunghiu" G. M. XXVI, pag. 24, obţinute pentru cazul când Δ trece prin P. Cu observaţia de mai sus, obţinem când Δ nu trece prin P, următoarele relaţii :

P ≡ O_9 *(centrul cercului lui* EULER)

$$\Delta_a \sin A \cos(B - C) + \Delta_b \sin B \cos(C - A) + \Delta_c \sin C \cos(A - B)$$
$$= 4 \sin A \sin B \sin C \Delta_{09} \,.$$

P ≡ K (*punctul lui* LEMOINE)

$$a^2\Delta_a + b^2\Delta_b + c^2\Delta_c = (a^2 + b^2 + c^2)\,\Delta_k .$$

P ≡ Γ (*punctul lui* GERGONNE)

$$(p-b)(p-c)\,\Delta_a + (p-c)(p-a)\,\Delta_b + (p-a)(p-b)\,\Delta_c = [bc - (p-a)^2]\,\Delta_\gamma .$$

P ≡ N (*punctul lui* NAGEL)

$$\Delta_a \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \Delta_b \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \Delta_c \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \Delta_n \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} .$$

P ≡ I_p (*centrul de greutate al perimetrului triunghiului*)

$$(b + c)\,\Delta_a + (c + a)\,\Delta_b + (a + b)\,\Delta_c = 4p\,\Delta_{I_p} .$$

P ≡ Ω_1 (*punctul direct a lui* BROCARD)

$$a^2b^2\Delta_a + b^2c^2\Delta_b + c^2a^2\Delta_c = (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\,\Delta_{\omega_1} .$$

P ≡ Ω_2 (*punctul retrograd al lui* BROCARD)

$$a^2c^2\Delta_a + b^2a^2\Delta_b + c^2b^2\Delta_c = (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\,\Delta_{\omega_2} .$$

4. Relaţiile obţinute nu se schimbă dacă înlocuim proiecţia ortogonală cu o proiecţie cilindrică.

5. Problema mai are şi alt aspect interesant. Prin particularizarea dreptei Δ putem obţine valoarea rapoartelor $\frac{m}{n}$ şi $\frac{p}{q}$, pentru diferitele puncte P. Să luăm ca exemplu cazul punctului K (LEMOINE), când avem relaţia:

$$(8) \qquad a^2\Delta_a + b^2\Delta_b + c^2\Delta_c = (a^2 + b^2 + c^2)\,\Delta_k .$$

Să presupunem că Δ se confundă cu $\overline{BC}$. Atunci $\Delta_b = \Delta_c = 0$, iar relaţiile (5) şi (8) devin:

$$\frac{m}{n}\Delta_a = \left(\frac{m}{n} + 1\right)\Delta_k \quad \text{şi} \quad a^2\Delta_a = (a^2 + b^2 + c^2)\,\Delta_k$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{1}{\dfrac{\Delta_a}{\Delta_k} - 1} \qquad \therefore \frac{\Delta_a}{\Delta_k} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2}$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{a^2}{b^2 + c^2} .$$

Presupunem acum că Δ se confundă cu $\overline{AC}$. Atunci $\Delta_a = \Delta_c = 0$, iar relaţiile (5) şi (8) devin:

$$\Delta_b = \left(\frac{m}{n} + 1\right)\left(\frac{p}{q} + 1\right)\Delta_k \quad \text{şi} \quad b^2\Delta_b = (a^2 + b^2 + c^2)\,\Delta_k$$

$$\therefore \Delta_b = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{b^2 + c^2}\left(\frac{p}{q} + 1\right)\Delta_k \quad \text{şi} \quad \frac{\Delta_b}{\Delta_k} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{b^2}$$

de unde scoatem:

$$\frac{p}{q} = \frac{c^2}{b^2} .$$

Pe aceeaşi cale găsim :

$$P \equiv I \quad \frac{m}{n} = \frac{a}{b+c} \qquad \frac{p}{q} = \frac{c}{b}$$

$$P \equiv G \quad \frac{m}{n} = \frac{1}{2} \qquad \frac{p}{q} = 1$$

$$P \equiv O \quad \frac{m}{n} = \frac{\cos A}{\cos(B-C)} \qquad \frac{p}{q} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}$$

$$P \equiv H \quad \frac{m}{n} = \frac{\cos B \cos C}{\cos A} \qquad \frac{p}{q} = \frac{c \cos B}{b \cos C}$$

$$P \equiv N \quad \frac{m}{n} = \frac{p-a}{a} \qquad \frac{p}{q} = \frac{p-c}{p-b}$$

$$P \equiv \Gamma \quad \frac{m}{n} = \frac{(p-b)(p-c)}{a(p-a)} \qquad \frac{p}{q} = \frac{p-b}{p-c}$$

$$P \equiv I_p \quad \frac{m}{n} = \frac{2p-a}{2p+a} \qquad \frac{p}{q} = \frac{a+b}{a+c}$$

$$P \equiv \Omega_1 \quad \frac{m}{n} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2+a^2c^2} \qquad \frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$P \equiv \Omega_2 \quad \frac{m}{n} = \frac{a^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2} \qquad \frac{p}{q} = \frac{c^2}{a^2}.$$

6. Prin alte poziţii particulare ale dreptei Δ, se pot obţine alte relaţii interesante.

N. N. A.

PROBLEMA 4885. *In triunghiul* ABC, *fie* A_1, B_1, C_1 *picioarele înălţimilor şi* O *centrul cercului circumscris, să se arate că există egalităţile :*

$$\frac{(\overline{OA_1}^2 - \overline{OA}^2)\cos A}{\cos(B-C)+\cos A} = \frac{(\overline{OB_1}^2 - \overline{OB}^2)\cos B}{\cos(C-A)+\cos B} = \frac{(\overline{OC_1}^2 - \overline{OC}^2)\cos C}{\cos(A-B)+\cos C}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

Soluţie dată de D-l VICTOR FLORESCU (Liceul militar, Nicolae Filipescu).

Expresiunea $\overline{OA_1}^2 - \overline{OA}^2$ reprezintă puterea punctului A_1 în raport cu cercul ABC, deci

$$\overline{OA_1}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{A_1B} \cdot \overline{A_1C} = -bc \cos B \cos C$$

şi cum

$$\cos(B-C)+\cos A=\cos(B-C)-\cos(B+C)=2\sin B\sin C,$$

$$\frac{\overline{OA_1}^2-\overline{OA}^2}{\cos(B-C)+\cos A}=\frac{-bc\cos A\cos B\cos C}{2\sin B\sin C}$$

$$=-2R^2\cos A\cos B\cos C.$$

Analog se arată:

$$\frac{(\overline{OB_1}^2-\overline{OB}^2)\cos B}{\cos(C-A)+\cos B}=\frac{(\overline{OC_1}^2-\overline{OC}^2)\cos C}{\cos(A-B)+\cos C}=-2R^2\cos A\cos B\cos C.$$

Alte soluţii au dat D-nii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila), S-LT. M. GRUMĂZESCU, HORIA M. BODNĂRESCU (Liceul Titu Maiorescu, Bucureşti), TR. PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI, A. O. ŞAICHIN (elev inginer Bucureşti), DINU D. BUZNEA (Liceul N. Filipescu), MIRCEA D. POPA (Lic. militar, Iaşi), G. M. DUMITRESCU (Bucureşti).

C. I. B.

PROBLEMA 4918. *Să se găsească soluţiile întregi pozitive ale ecuaţiei:*

$$x(5x-4)=y^2$$

şi să se demonstreze că x *este patrat perfect.*

V. THÉBAULT.

Ecuaţia dată, are ca rădăcină pozitivă în x, pe

$$(1)\qquad x=\frac{1}{5}(2+\sqrt{5y^2+4}).$$

Pentru ca x să fie întreg, trebue să avem:

$$5y^2+4=z^2 \quad \text{şi} \quad z+2=5M.$$

Prima din aceste condiţii, conduce la ecuaţia

$$(2)\qquad z^2-5y^2=4$$

cunoscută sub numele de ecuaţia lui PELL şi ale cărei soluţii generale au fost date de mult de EULER şi LAGRANGE.

Ecuaţiuni de tipul (2) au fost rezolvate şi în revistele noastre. Citez de exemplu problemele 2705 şi 2903 ale D-lui Prof. P. SERGESCU, rezolvate la pag. 353, Vol. XXVIII, *Gazeta Matematică*,

articolul dela pag. 104, Vol. XL, „*Patrate berce*", de G-L GH. BUICLIU sau în *Revista Matematică din Timişoara,* problema 863, de G-L GH. BUICLIU, rezolvată la pag. 18, Vol. XIV, precum şi articolele D-lui Prof. GH. CONSTANTINESCU, din Vol. XVI, numerile 1 şi 2 sau din Vol. XVIII, numărul 3.

Rezolvînd ecuaţia (2), pe una din căile întrebuinţate în locurile citate şi ducând valorile lui y în (1) găsim că primele 4 valori ale lui x şi y sunt:

$$x = 1 \; ; \; 4 \; ; \; 25 \; ; \; 169 \; ; \; 1156 \; ; \; . \; . \; .$$

$$y = 1 \; ; \; 8 \; ; \; 55 \; ; \; 377 \; ; \; 2516 \; ; \; . \; . \; .$$

Aceste 4 prime valori ale lui x sunt patrate perfecte. Să arătăm că în general din toate soluţiile întregi ale ecuaţiei date, cele în x sunt neapărat patrate perfecte.

Fie D cel mai mare comun divizor al numerelor x şi $5x - 4$ aşa în cât

$$x = \mathrm{D} \, . \, \mathrm{M} \quad \text{şi} \quad 5x - 4 = \mathrm{D} \, . \, \mathrm{M}'$$

unde M şi M′ sunt prime între ele. In aceste condiţiuni, pentru ca produsul

$$x(5x - 4) = \mathrm{D}^2 x \, \mathrm{M} \, . \, \mathrm{M}'$$

să fie patrat perfect este necesar şi suficient ca M şi M′ să fie patrate perfecte, deci

$$(3) \qquad \mathrm{X} = \mathrm{D}m^2 \quad , \quad 5x - 4 = \mathrm{D} \, . \, n^2.$$

Din ultima egalitate se vede că D, divizând pe x, divide neapărat şi pe 4, deci D poate fi 1, 2, sau 4.

Dacă D este 1 sau 4, prima egalitate din (3) arată în mod evident că x este patrat perfect.

Zic că $\mathrm{D} \neq 2$, căci dacă am avea $\mathrm{D} = 2$, egalităţile (3) ar conduce la egalitatea

$$5m^2 - 2 = n^2$$

care este imposibilă căci $5m^2$ terminându-se în 0 sau în 5, diferenţa $5m^2 - 2$ se termină în 8 sau 3, şi deci nu poate fi patrat.

Rezultă că din sistemul de valori întregi (x, y) a ecuaţiei date, x este totdeauna de una din formele

$$\mathrm{X} = m^2 \quad \text{sau} \quad \mathrm{X} = 4m^2.$$

Notă. Nici una din soluţiunile celor 28 rezolvitori anunţaţi pe copertele numerilor anterioare nu sunt acceptabile. Majoritatea au găsit prin încercări soluţiile

$$x = 1 \; ; \; 4$$

$$y = 1 \; ; \; 8$$

şi au dedus, fără nici o demonstraţie că x este pătrat perfect. Unii au cercetat câte-va din terminaţiunile lui x sau y şi au ajuns la concluzii cu totul parţiale. In fine sunt şi încercări de soluţiuni sprijinite pe proprietăţi neadevărate. Astfel, un foarte harnic corespondent, deduce că egalitatea

$$x\,(5x - 4) = y^2$$

arată că y se împarte cu x. Acestui corespondent îi răspund cu exemplul

$$9 \times 4 = 6^2$$

şi totuşi 6 nu se divide cu 9, — sau cu exemplul

$$25\,(5 \times 25 - 4) = 55^2$$

şi totuşi 55 nu se divide cu 25. Recomandăm atenţie la enunţare de teoreme sau proprietăţi nedemonstrate. In matematici a afirma nu este tot una cu a demonstra.

Se poate încerca o problemă analoagă, considerând ecuaţia

$$x\,[px - (p - 1)^2] = y^2$$

în locul ecuaţiei din enunţ.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4961. *Să se construiască o elipsă cunoscând focarele sale precum şi lungimea 2l a coardei comune cercurilor ei directoare. Să se repete construcţia în aceleaşi condiţiuni a unei iperbole. Să se scrie ecuaţiile acestor conice cu ajutorul lui* c *şi* l.

VIRGIL GHIŢESCU.

Soluţie dată de D-nii: N. D. ŞTEFĂNESCU (bacalaureat) şi M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. Lazăr Bucureşti).

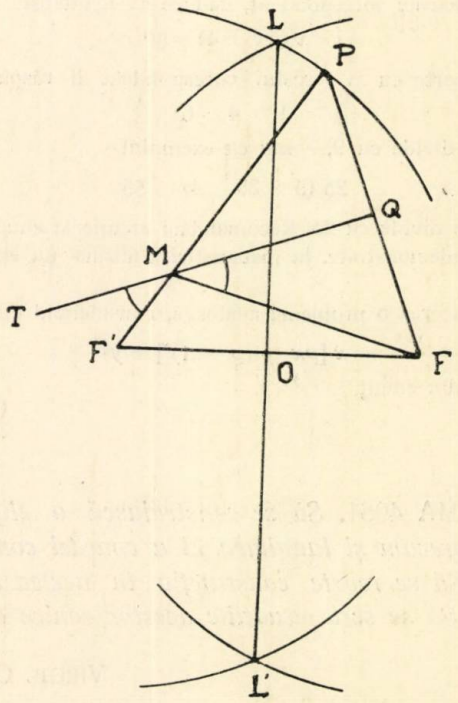
Construcţiile conicelor. Se ştie că cele două cercuri directoare sunt descrise din focare ca centre cu raze cât dublul axei mari. Coarda comună a lor, $LL' = 2l$, va fi deci perpendiculară pe mijlocul lui F'F şi împărţită de acest segment în două părţi egale. Făcând această construcţie, putem descrie apoi cu razele F'L şi FL cercurile directoare. Fie F'P o rază oarecare. Unim P cu F şi ridicăm perpendiculara TQ pe mijlocul Q al lui FP. Intersecţia acestei perpendiculare cu F'P ne dă un punct curent M al elipsei

sau iperbolei, iar TMQ este tangenta în acest punct curent deoarece, întru cât MF = MP, avem respectiv:

$$MF' + MF = MF' + MP = F'P = 2a$$

sau

$$MF' - MF = MF' - MP = F'P = 2a.$$



Totdeodată mai avem:

$$\sphericalangle TMF' = \sphericalangle QMF \text{ pentru elipsă}$$

și

$$\sphericalangle F'MQ = \sphericalangle FMQ \text{ pentru iperbolă,}$$

ceea ce caracterizează tangenta în M de a fi egal înclinată față de razele vectoare.

Evident că putem astfel obține prin simetrii cu axele și centrul oricâte puncte M, fiecare cu tangenta lui.

Ecuațiile conicelor. Trebuesc determinate valorile semiaxelor. Pentru elipsă avem:

$$\overline{F'L}^2 = \overline{F'O}^2 + \overline{OL}^2$$

$$4a^2 = c^2 + l^2$$

$$x^2 = \frac{c^2 + l^2}{4} .$$

Apoi din relația:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

deducem:

$$b^2 = \frac{l^2 - 3c^2}{4} .$$

Ecuația elipsei este:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\frac{c^2 + l^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{l^2 - 3c^2}{4}} - 1 = 0.$$

Pentru iperbolă avem:

$$a^2 = \frac{c^2 + l^2}{4} .$$

Valoarea lui b^2 o tragem din relația:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

și este:

$$b^2 = \frac{3c^2 - l^2}{4} .$$

Deci ecuația iperbolei este:

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\frac{c^2 + l^2}{4}} - \frac{y^2}{\frac{3c^2 - l^2}{4}} - 1 = 0.$$

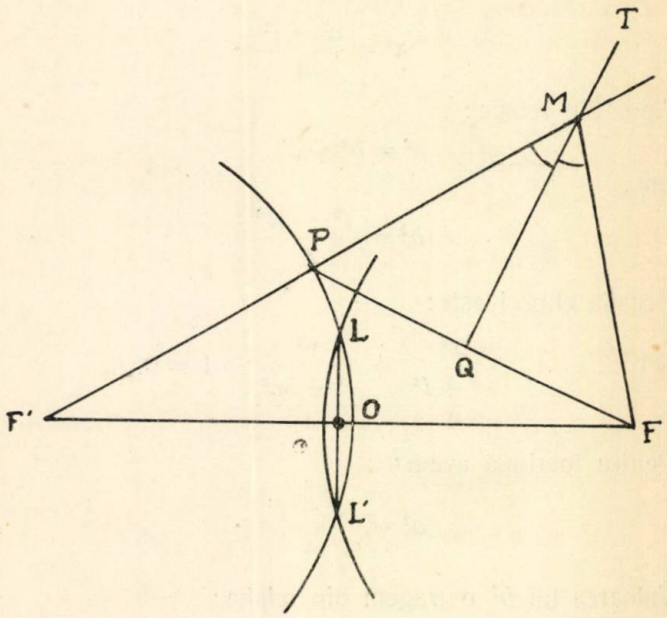
Discuțiune. In (1) trebue neapărat să avem:

$$l^2 - 3c^2 > 0,$$

relație din care deducem:

$$(1') \qquad 2l > 2c\sqrt{3} .$$

Se vede de aci că pentru ca să fie posibilă construcţia elipsei, trebue ca coarda comună cercurilor directoare să fie mai mare decât dublul laturii triunghiului echilateral înscris în cercul a cărui rază este semi-distanţa focală, la iperbolă, trebue să fie mai mică.



Au mai rezolvat problema D-nii: EMIL BOIAN (Liceul militar Cernăuţi), AUREL CORNĂŢEANU (Liceul militar Iaşi), GH. M. DUMITRESCU (absolvent liceul Bucureşti), MARCEL ROŞCULEŢ, JOE SEGAL (Liceul Libros Bucureşti), AL. POPESCU-ZORICA.

V. GH.

PROBLEMA 4976. *Se ştie că puterea a cincia a oricărui număr* a *se termină cu aceeaşi cifră ca* a.

Să se arate că a^{21} *se termină cu aceleaşi două cifre ca* a, *dacă* a *e prim cu 2 şi cu 5, şi că* a^{22} *se termină cu aceleaşi două cifre ca* a^2, *dacă* a *e oarecare.*

Să se arate că în general, dacă $p \geqslant 3$, *numărul* $a^{10^{p-1}+1}$ *se termină cu aceleaşi* p *cifre ca* a, *dacă* a *e prim cu 2 şi 5; iar dacă* a *e oarecare,* $a^{10^{p-1}+p}$ *se termină cu aceleaşi* p *cifre ca* a^p.

P. SERGESCU.

Soluție dată de D-l P. BOLDESCU.

Când a e prim cu 2 și cu 5, diferența

$$a^{21} - a = a(a^{20} - 1)$$

e multiplu de 100, căci $\varphi(25) = 20$ și $\varphi(4) = 2$, așa că a^{20} e Mult. $25+1$ și Mult. $4+1$ în baza teoremei lui EULER. Deci, în acest caz a^{21} și a au numerele formate din zeci și unități identice.

Când a e oarecare

$$a^{22} - a^2 = a^2(a^{20} - 1)$$

așa că dacă a nu e prim cu 2 (resp. 5) primul factor se împarte cu 4 (resp. 25), iar dacă a e prim cu 2 (sau 5) al doilea factor se împarte cu 2 (sau 5). In orice caz diferența $a^{22} - a^2$ se împarte cu 100, ceea ce stabilește propoziționea enunțată.

In general; presupunând a prim cu 2 și cu 5:

$$a^{10^{p-1}+1} - a = a\left(a^{10^{p-1}} - 1\right) = a\left(a^{2^{p-1}\cdot 5^{p-1}} - 1\right).$$

Dar $\varphi(2^p) = 2^{p-1}$ și $\varphi(5^p) = 4.5^{p-1}$.

Prin urmare:

$$a^{2^{p-1}} \left(\text{și deci și } a^{10^{p-1}}\right)$$

este Mult. $2^p + 1$. Cum $p \geqslant 3$:

$$a^{10^{p-1}} = a^{4\cdot 5^{p-1}\cdot 2^{\alpha}} = [a^{\varphi(5^p)}]^{2\alpha} = \text{Mult. } 5^p + 1.$$

Diferența $a^{10^{p-1}+1} - a$ se împarte cu 10^p, ceea ce însemnează că a și $a^{10^{p-1}+1}$ se termină cu aceleași p cifre.

In sfârșit:

$$a^{10^{p-1}+p} - a^p = a^p\left(a^{10^{p-1}} - 1\right).$$

Dacă a e prim cu 2 (resp. 5), paranteza se împarte cu 2^p (resp. 5^p), iar dacă a nu e prim cu 2 (sau 5), a^p se împarte cu 2^p (sau 5^p). In orice caz, produsul precedent se împarte cu 10^p, ceea ce arată că $a^{10^{p-1}+p}$ și a^p se termină cu aceleași p cifre.

Notă. D-l P. BOLDESCU demonstrează următoarea teoremă, pe cale analoagă:

Dacă **a** *este prim cu 10, toate puterile lui* **a** *care se termină cu aceleași* **p** *cifre ca* **a**, *sunt de forma* a^{1+kw}, *unde* **k** *este un întreg oarecare, iar* **w** *este indicatorul lui* 10^p *sau un divizor al lui* 10^p.

PROBLEMA 4983. *Razele cercurilor înscrise în triunghiurile formate de două laturi ale triunghiului* ABC *cu latura corespunzătoare a triunghiului ortic, sunt proporționale cu cosinusurile unghiurilor respective ale triunghiului de referință.*

C. IONESCU-BUJOR.

1°. *Soluție* dată de D-nii: VICTOR FLORESCU (Liceul militar Nicolae Filipescu), M. N. ROȘCULEȚ, C. PASCARU (Liceul militar Iași), A. O. ȘAICHIN (bacalaureat București), E. S. MODÂLCĂ (Liceul Traian, T.-Severin):

Fie A'B'C' triunghiul ortic. Deoarece B'C' și BC sunt antiparalele în unghiul A, triunghiurile ABC, AC'B' sunt asemenea. Raportul de asemănare este:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{c}{c\cos A} = \frac{1}{\cos A}.$$

Acesta este și raportul razelor cercurilor înscrise, r, r_a. Deci:

$$\frac{r}{r_a} = \frac{1}{\cos A} \quad \therefore \quad \frac{r_a}{\cos A} = r.$$

Analog se arată, (r_b, r_c fiind razele cercurilor înscrise triunghiurilor BC'A', CA'B'), că

$$\frac{r_b}{\cos B} = \frac{r_c}{\cos C} = r.$$

2°. *Observări.* Din asemănarea triunghiurilor ABC, AB'C', A'BC', A'B'C rezultă și proporționalitatea între razele cercurilor circumscrise ultimelor trei triunghiuri și cosinusurile unghiurilor respective sau între arii și patratele cosinusurilor.

3°. Au mai soluționat problema, utilizând diverse relații trigonometrice, D-nii: ORIGEN MĂRCULESCU (Craiova), I. I. ȚIȚEICA (student), H. M. BODNĂRESCU (Liceul Titu Maiorescu, București) MIREL STOENESCU (Liceul Militar N. Filipescu), — IOAN V. JAREGHIE MIRCEA D. POPA, C. I. PASCARU, CONSTANTIN PANTELIMON, ALEXANDRU I. ROHR și SANDU R. TURCU dela Liceul militar Iași. — ION D. DIACONESCU (Lic. Traian, T. Severin), I. I. SOLOMON (Lic. Internat Iași), J. SEGAL (Lic. Libros, București).

C. I. B.

EXERCIŢII

9. Să se afle locul geometric al vârfului A al unui triunghiu ABC în care avem relaţia $h_a \sum r_a r_b = 3 r_a r_b r_c$ şi BC fixă.

D. I. LEBĂDĂ.

R. Din $h_a \sum r_a r_b = 3 r_a r_b r_c$ scoatem:

$$h_a \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right) = 3.$$

Inlocuind

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

căpătăm

$$h_a = 3r.$$

Inlocuind aici pe $h_a = \frac{2s}{a}$, iar pe $r = \frac{s}{p}$ căpătăm $\frac{2s}{a} = \frac{3s}{p}$ din care scoatem $2p = 3a$ deci $(b + c) = 2a$.

Locul geometric este deci o elipsă cu axa mare $BC = a$.

10. Să se construiască un triunghiu, cunoscând suma medianelor şi unghiurile ce le fac intre ele.

SLT. C. N. AVRAM.

R. Se ia 2/3 din suma medianelor. Se construeşte triunghiul BDE cu acest perimetru şi unghiurile date. Din D se duce:

$$\overline{AD} \parallel = \overline{BE} \quad \text{şi}$$

$$\overline{CD} \parallel = DE$$

ABC este triunghiul căutat.

11. Două triunghiuri au acelaşi cerc circumscris. Cercul lui EULER al unuia din ele este înscris în celălalt; să se afle condiţia necesară.

IOAN A. ILIE.

R. Fie O centrul cercului circumscris şi ω centrul cercului lui EULER în primul triunghiu. In cel de al doilea triunghiu, cercul lui EULER de centru ω, fiind înscris avem:

$$\overline{O\omega}^2 = R(R - 2r)$$

R, r fiind razele celor două cercuri iniţiale. Cum însă avem şi $R = 2r$, rezultă:

$$\overline{O\omega}^2 = 0$$

care implică: $\overline{GH} = 0$. Ambele triunghiuri sunt echilaterale.

12. Ecuaţia:

$$x^3 + px + q = 0$$

având toate rădăcinile reale, atunci ecuaţia:

$$x^3 + 6px^2 + [6(p^2 - q^2) + p]x + 2p^3 + q = 0$$

are toate rădăcinile reale.

MIHAIL VELEA.

R. In general fiind dată ecuaţia:

(1) $$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$$

atunci ecuaţia:

(2) $$f(x) + mf'(x) = 0$$

are toate rădăcinile sale reale.

(A. G. IOACHIMESCU C. de P. Algebră, Ed. IV Partea II, Cap. XXV, probl. 30).

Considerând ecuaţiunea:

(3) $$x^3 + px + q = 0$$

cu rădăcini reale, atunci ecuaţia:

$$x^3 + px + q + (p - q)[3x^2 + p] = 0$$

sau

(4) $$x^3 + 3(p - q)x^2 + px + p(p - q) + q = 0$$

are rădăcini reale la fel cu ecuaţia:

$$x^3 + 3(p - q)x^2 + px + p(p - q) + q + (p + q)[3x^2 + 6(p - q)x + p] = 0$$

sau

(5) $$x^3 + 6px^2 + [6(p^2 - q^2) + p]x + 2p^3 + q = 0$$

are toate rădăcinile reale.

q. e. d.

13. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} nx = \frac{\sin(a + x) + 1}{\cos(a + x)}$$

n fiind un parametru real oarecare.

(Generalizarea exerciţiului 32 G. M. XLIII, pag. 500).

MIRCEA ADAM.

R. Ecuaţia se rezolvă imediat observând că:

$$\frac{\sin(a + x) + 1}{\cos(a + x)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a + x}{2}\right)$$

deci:

$$\operatorname{tg} nx = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a+x}{2}\right)$$

$$nx = k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{a+x}{2}$$

$$x = \frac{(4k+1)\pi + 2a}{2(2n-1)}.$$

PROBLEME PROPUSE

5059. La o împărțire se suprimă ultimele cifre ale deîmpărțitului și împărțitorului. Ce devine câtul?

I. IONESCU.

5060. Să se găsească numerele A, B, C în progresie aritmetică de rație r^2, știind că, dacă după A scriem pe B obținem patratul lui C. Numărul C are trei cifre, iar $A < B < C$.

S-LT. POPESCU ADRIAN.

5061. Să se arate că pentru $n > 3$ avem:

$$\varphi(n!) > [\varphi(n)]!$$

unde $\varphi(i)$ este indicatorul lui i.

CPT. COMANDOR I. LINTEȘ.

5062. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând poziția în plan a laturei $\overline{BC}$ și a unui cerc pe care se mișcă vârful A și știind că una din înălțimi are o lungime dată. Discuțiune.

G-L GH. BUICLIU.

5063. Se dă un cerc O_1, un punct A și o dreaptă D. Să se construiască un alt cerc O_2 care să treacă prin A și să admită cu cercul O_1 dreapta D ca ax radical. Discuțiune.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

5064. Fie triunghiul ABC şi punctele A_1, B_1, C_1 pe laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, astfel că: $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} = \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}$. Fie, asemenea punctele A_2, B_2, C_2 conjugate armonice ale punctelor A_1, B_1, C_1. Dacă notăm cu S, S_1, S_2 ariile triunghiurilor ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, avem relaţiunea:

$$2S^2 + (S_1 + S_2)\, S - 4\, S_1 S_2 = 0.$$

A. DOBRESCU.

5065. Se consideră un patrat variabil ABCD, ale cărui vârfuri consecutive A şi B descriu laturile unui unghiu drept. Să se observe că centrul patratului se află pe bisectoarea unghiului drept. Presupunând că patratul ABCD are o mărime constantă, să se afle şi să se construiască locurile descrise de vârfurile C şi D.

N. ABRAMESCU.

5066. Pe un cerc cu centrul în O şi cu raza 1, se ia un punct fix P. Se consideră cercul variabil, care trece prin P şi are centrul pe cercul O şi se cere:

1. Locu punctului de contact al cercului variabil cu tangenta sa dusă paralel cu OP;

2. Să se construiască locul găsit.

EMIL MORŢUN.

5067. O dreaptă (Δ) variabilă trecând prin punctul fix P (p, q) taie axa OX în M şi pe dreapta (D) de ecuaţie $f(xy) \equiv y - mx = 0$ în N. Locul geometric al centrului cercului OMN este o hiperbolă trecând prin origine, cu asimptotele de direcţii perpendiculare pe (D) şi OX, tangenta în origină fiind: $y : x = f(-q, p) : f(p, q)$. Caz particular când $m \to \infty$.

N. N. MIHĂILEANU.

5068. Se consideră parabolele (π) ce au acelaşi focar O şi acelaşi ax OX. Se cere:

1°. Să se arate că printr'un punct arbitrar M, din plan, trec două parabole (π) reale şi că aceste parabole sunt ortogonale în punctul M;

2°. Să se calculeze perimetrul şi aria patrulaterului curbiliniu format de parabolele (π) ce trec prin două puncte date $P_1(a_1, b_1)$ şi $P_2(a_2, b_2)$. [In patrulaterul curbiliniu punctele P_1 şi P_2 sunt presupuse vârfuri opuse].

ŞERBAN A. GHEORGHIU.

5069. Intr'un triunghiu ascuţit unghiu avem:

$$\left(\cos\frac{A}{10}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\sin\frac{A}{10}\right)\left(\cos\frac{B}{10}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\sin\frac{B}{10}\right)\left(\cos\frac{C}{10}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\sin\frac{C}{10}\right)\geqq$$

$$\left(\sin\frac{2A}{5}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\cos\frac{2A}{5}\right)\left(\sin\frac{2B}{5}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\cos\frac{2B}{5}\right)\left(\sin\frac{2C}{5}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\cos\frac{2C}{5}\right).$$

LT. C. IONESCU-ŢIU.

5070. Să se calculeze, pentru $n=\infty$, limita expresiunii:

$$E=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}.$$

M. GHERMĂNESCU.

5071. 1°. Să se arate că ecuaţia:

$$1+\alpha x^m=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^h}, \qquad (1)$$

are o singură rădăcină superioară lui 1; α, m, h sunt constante pozitive.

2°. In ecuaţia (1) se ia:

$$\alpha=\frac{a_{p+m}}{C_{n-p}^{m}}\quad,\quad h=n-p+1.$$

Să se arate atunci, că rădăcina găsită la punctul 1° este o limită superioară a rădăcinilor pozitive a ecuaţiei:

$$(2)\quad a_{p+m}x^{p+m}-C_{n-p+1}^{m+1}a_{p-1}x^{p-1}-C_{n-p+2}^{m+2}C_{m+1}^{1}a_{p-2}x^{p-2}-$$
$$\ldots-C_{n}^{m+p}C_{m+p-1}^{p-1}a_0=0.$$

Coeficienţii a_0, a_1, ..., a_{p-1}, a_{p+m} sunt pozitivi, primii p fiind cel mult egali cu M. C este simbolul combinărilor ordinare, iar, m, n, p sunt evident întregi pozitivi supuşi condiţiei:

$$m + p \leqq n.$$

TH. ANGHELUŢĂ.

5072. Dintr'un con circular dat să se taie un cilindru şi o sferă, astfel încât să se piardă cât mai puţin material.

N. CIORĂNESCU.

5073. Să se integreze ecuaţia lui LAMÉ

$$4\,Xy'' + 2\,X'y' = (ax + b)\,y$$

unde: $X = x\,(1 - x)\,(1 - kx)$ admiţându-se că: $a = 12k^2$, $b = -4\,(1 + k^2)$ şi să se arate că ea este transformabilă într'o ecuaţie diferenţială lineară de ordinul doi cu coeficienţi constanţi.

G. G. CONSTANTINESCU.

ERATĂ. I. — In articolul:

„Sărbătorirea D-lui Profesor ION IONESCU de către corpul profesoral al Şcoalei Politechnice din Bucureşti", să se facă următoarele rectificări:

1). La pag. 170, rândul al 3-lea de jos se va citi:
«povestite» în loc de *povesteşte...*

2). La pag. 171, rândul 24, se va citi:
«era unicul mijloc» în loc de *era micul mijloc...*

II. — La problema 5018 se va înlocui astfel:

$E = 13^{4(p+1)} + 37 \cdot 13^{2p+2} + 31 \cdot 13^{2p+1} + 46 \cdot 13^{p} + 3$ se divide cu 10976.

III. — La problema No. 5045 se va adăoga $+1$ după Mn, adică se va considera relaţia:

$$P_{2n}(n) = Mn + 1.$$

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Arendt R. E. (5017); *Atanasiu C. V.* (5017); *Bârlea-Suhăţeanu G. V.* (4989, 5017); *Bodnărescu M. H.* (5035, 41); *Boiangiu D. D-tru* (4935, 52, 5017); *Buznea D. Dinu* (4968, 83, 93, 5017); *Cetăţeanu Stelian* (4996, 5005, N); *Cherţman S. M.* (5017); *Cleanoveanu Mircea* (4908, 28); *Costescu Gh. Ioan* (5005, 17); *Crăciunescu I. M.* (5017); *Crişţea D. Eftimie* (5011, 17, 52); *Diaconescu D. Ion* (4948, 89, 5052); *Diaconescu M.* (5017); *Diaconescu V. C.* (5020); *Dumitrescu Gh.* (4968); *Florescu L. Victor* (N); *Floreşteanu D. Al.* (5017); *Gheorghiu A. Al.* (5017); *Gligor N. Ioan* (4908); *Gviazdomorschi E. R.* (4977, 82, 90); *Ionescu Cic.* (5017); *Iorgulescu N. Florin* (5017); *Leibovici S.* (5048); *Mărculescu O.* (5020); *Mihăilescu D.* (4989); *Mironescu D.* (4989); *Modâlcă S. Em.* (4917, 52, 53, 89, 5031, 32); *Modâlcă S. Maria Ana* (4934, 59, 96, 5025); *Motaş Camil* (5011, 17, 25); *Papadopol Elena* (5017); *Pascaru I. I.* (5017, 31, 41); *Petrescu Iulian* (5013, 48, 57); *Popescu Filip Mihai* (5005, 17); *Pop Ilie* (4989); *Rollea C. V.* (5017); *Roşculeţ M.* (4917, 40, 53, 5032, N); *Şaichin O. Ad.* (5033, 35, 41); *Stoenescu D. Mirel* (5040); *Topalescu S. Gh.* (5017); *Vasilescu-Ştabu Al. M.* (5031, 34, 35, 36, N); *Vijelie-Muscel Gh. E.* (4989, 5017); *Vlad M.* Locot. (4852); *Weissberger G. G.* (5000, 17).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anual şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă). (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie.* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I. Ediţia II-a revăzută şi adăogită, 1923. (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice. (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice. (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii

{ Abonamentul anual (9 numere). Lei 50
{ Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

C. 53.640

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIV

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1939

SUMARUL

1. † Profesor Gh. Ţiţeica . . . . . *V. Vâlcovici.*
2. Câteva aplicaţii geometrice ale invarianţilor lui Boole . . . . . *D. Barbilian.*
3. Metoda electrică pentru rezolvarea ecuaţiilor algebrice . . . . . *Ing. Tudor A. Tănăsescu.*
4. O teoremă de scoborire a ecuaţiilor multigrade . . . . . *A. Gloden.*
5. Concursul „Gazetei Matematice" . *Delegaţia Societăţii.*
6. Note Matematice: 18 — 23.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 282.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1271, 2295, 3554, 4240, 4420, 4498, 4655, 4773, 4895, 4987, 5017.
11. Exerciţii 14.
12. Probleme propuse: 5061, 5074 — 5088.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1939

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stan**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1938 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5002, 09, 10, 14, 22, 23, 26, 28, 29, 30, 37, 42, 43, 44, 45, 47, 49, 50, 51, 53, 58, 59, 61, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

† PROFESOR GH. ȚIȚEICA *)

Intristată adunare,

Din șirul cercetătorilor adevărului științific s'a desprins unul de mari dimensiuni pentru a lua drumul eternității. Căci profesorul GHEORGHE ȚIȚEICA a fost unul dintre puținii aleși care în scurtul popas pământesc au fost desemnați de soartă să lărgească limitele cunoscutului. Talentul său de matematician de rasă sprijinit de o minunată disciplină în munca creatoare l'au învrednicit să atingă culmi superioare de realizare în știință. Numele său, legat totdeauna de numele țării, a făcut înconjurul lumii pentru a se fixa pentru vecie în Analele culturii umane.

Puțini însă au putut ceti, sub senina aparență olimpică a omului preocupat de înălțimi de cugetare, sufletul cald, palpitând de iubirea aproapelui, de iubirea de tineret și mai cu seamă de iubirea de țară. Căci nu era ușor să deslușești de la prima vedere comorile unui suflet de elită, care se ascundeau sub recea aparență a omului de știință. Marele dispărut nu exterioriza decât modest și cu nobilă discreție, propriile sale frământări sufletești.

Era totuș un teren unde isvoarele undelor sale sufletești se deschideau aproape fără rezervă. Era atmosfera *Gazetei Matematice*, pe care profesorul ȚIȚEICA o iubea cu duioșie de părinte. Incepând cu al doilea număr, această revistă, azi în al 44-lea an de existență, îi câștigă colaborarea și inima. Anii i-au adus marelui nostru învățat gloria geniilor creatoare, i-au oferit perspective noui și nebănuite de activitate, i-au deschis porțile instituțiilor savante din țară și din străinătate.

*) Cuvântare ținută Marți 7 Februarie 1939, de D-l Prof. V. VÂLCOVICI în numele Societății *Gazeta Matematică* la înmormântarea regretatului Profesor GH. ȚIȚEICA.

Nimic însă nu i-a putut clinti dragostea sa pentru *Gazeta Matematică*. Ei i-a rămas credincios cu o colaborare ştiinţifică de cea mai fină calitate pedagogică şi mai presus de toate cu aerul curat al înălţimii morale care îl întovărăşea pretutindeni.

Concursul anual între elevii liceelor din ţară instituit de *Gazeta Matematică* era aşteptat cu infrigurare, nu atât pentru clasificarea finală, cât pentru solemnitatea care încheia lucrările. In atmosfera de destindere în care examinatori şi examinaţi îşi comunicau impresii şi speranţe, deodată se făcea tăcere generală. Tineretul îşi încorda atenţia, îşi reţinea respiraţia, bătăile inimilor se precipitau, un val de emoţie generală trecea peste toată asistenţa. Era semnul că Profesorul ŢIŢEICA va vorbi. Cu faţa iluminată de un zâmbet senin, marele nostru dascăl vorbia. Frazele cizelate de mână de maestru curgeau cu un debit liniştit, cu o voce caldă, dar fără nici o intenţie de efect. Efectul apărea din sensul adânc al înţeleptelor cuvinte, din sfaturile care puneau în vibraţie coarde ce păreau adormite. Şi nu era nimeni în întreaga asistenţă, care să nu simtă fiorul sublimului.

In sufletul generaţiilor de tineri, mulţi dintre ei azi în pragul bătrâneţii, în care s'a sădit astfel sămânţa iubirii de patrie prin dragostea de ştiinţă, a răsărit floarea recunoştinţei şi a veşnicei amintiri pentru a încununa chipul marelui propovăduitor de bine.

In numele acelor generaţii care şi-au hrănit idealul ştiinţific şi cel moral din sfatul şi fapta marelui nostru învăţat, *Gazeta Matematică* se încolonează în şirul celor ce-şi mărturisesc durerea şi doliul în faţa rămăşiţelor pământeşti ale Profesorului ŢIŢEICA, plecându-şi cu pietate drapelul cernit. Să-i fie ţărâna uşoară!

CÂTEVA APLICAȚII GEOMETRICE ALE INVARIANȚILOR LUI BOOLE

1°. In „Cambridge Mathem. Journal“ Vol. 4. p. 193, 1845, CAYLEY citează ca prim invariant al formei bipătratice binare [1]).

$$(1)\quad (ax)^4 \equiv a_0x'^4 + 4a_1x'^3x'' + 6a_2x'^2x''^2 + 4a_3x'x''^3 + a_4x''^4,$$

față de transformările lineare ale variabilelor, expresia

$$g_2 \equiv \frac{1}{2}(ab)^4$$

sau, explicit.

$$(2)\qquad g_2 \equiv 3a_2^2 - 4a_1a_3 + a_0a_4 .$$

In același volum al periodicului mai sus pomenit, la pag. 209 un alt cercetător BOOLE găsește al doilea invariant fundamental al lui (1).

$$(3)\qquad g_3 \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

și, în același timp, identitatea care leagă discriminantul Δ al ecuației $(ax)^4 = 0$ cu g_2 și g_3:

$$\Delta \equiv g_3^2 - 27g_3^2 .$$

Invarianții g_2 și g_3 sunt de obiceiu atribuiți lui WEIERSTRASS, din cauza rolului covârșitor pe care-l joacă în Teoria Funcțiunilor Eliptice, din redactarea acestuia. Dacă însă trebue să poarte un nume apoi, istoricește, cel mai îndreptățit e al lui BOOLE.

2°. Semnificarea anulării în parte a lui g_2 și g_3 e binecunoscută: pentru $g_2 = 0$ rădăcinile formei (1) au un raport echianarmonic, adică egal cu $-\varepsilon$, unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$; pentru $g_3 = 0$ rădăcinile lui (1) au un raport armonic.

Aducând printr'o substituție lineară forma (1) la tipul normal al lui WEIERSTRASS

$$(ax)^4 \equiv 4y'^3y'' - g_2y'y''^3 - g_3y''^4$$

1) Nu voiu alege pentru exponenții simbolici un semn anumit. Voiu lăsa ca deosebirea dintre ei și exponenții efectivi să reiasă din context.

se arată uşor că *anularea simultană a lui* g_2 *şi* g_3 *reprezintă tocmai condiţia necesară şi suficientă ca* (1) *să aibă o rădăcină triplă.*

3°. Reproduc aici, pentru *Gazeta Matematică*, trei aplicaţii geometrice ale noţiunilor clasice de mai sus, propuse anul acesta la seminarul de *Matematice Elementare şi Geometrie Descriptivă.*

Fie

$$x : y : z = (a\lambda)^4 : (b\lambda)^4 : (c\lambda)^4 \tag{4}$$

ecuaţiile parametrice ale unei cuartice raţionale plane, raportată la coordonatele proiective x, y, z şi la parametrul binar $\lambda = \lambda' : \lambda''$. Formele bipătratice din (4) sunt presupuse linear independente ş destul de generale pentru ca punctele duble ale cuarticei să aibă ramuri netangente. Formulele lui PLÜCKER spun *a priori* că o astfel de curbă are 6 inflexiuni.

Determinarea lor directă se face fără nicio greutate, ca o aplicaţie a observaţiei dela sfârşitul alineatului precedent. Dacă:

$$ux + vy + wz = 0$$

e o dreaptă care taie cuartica (4) în trei puncte confundate atunci forma bipătratică binară

$$u(a\lambda)^4 + v(b\lambda)^4 + w(c\lambda)^4 = 0$$

are invarianţii g_2 şi g_3 nuli. Prin urmare dreptele de inflexiune sunt date de tangentele comune ale curbelor de ecuaţii tangenţiale

$$g_2 \equiv 3\{a_2u\}^2 - 4\{a_1u\}\{a_3u\} + \{a_0u\}\{a_4u\} = 0 \tag{5}$$

$$g_3 \equiv \begin{vmatrix} \{a_0u\} & \{a_1u\} & \{a_2u\} \\ \{a_1u\} & \{a_2u\} & \{a_3u\} \\ \{a_2u\} & \{a_3u\} & \{a_4u\} \end{vmatrix}$$

unde

$$\{a_iu\} \equiv a_iu + b_iv + c_iw.$$

Dar prima din aceste ecuaţii reprezintă o conică. De aici teorema:

Cele $2 \times 3 = 6$ *drepte de inflexiune ale unei cuartice raţionale ating o aceeaşi conică. Orice altă tangentă a acestei conice* (în cazul realităţii figurii) *taie pe cuartica raţională două puncte reale şi două puncte imaginar conjugate de raport echianarmonic.*

Ultima parte a teoremei se justifică eliminând cazul a patru intersecții reale, incompatibil cu valoarea complexă $-\varepsilon$ a raportului echianarmonic, cum și cazul în care punctele ar fi împărțite în două perechi imaginar conjugate, de exemplu λ_1, λ_2 și λ_2, λ_3. In acest din urmă caz, luând conjugatele imaginare ale celor doi membri ai egalității

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = -\varepsilon$$

ar urma să avem

$$(\lambda_2 \lambda_1 \lambda_4 \lambda_3) = -\bar{\varepsilon}$$

și deci $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, adică ε real, ceea ce e absurd. Rămâne așa dar ca singură situație compatibilă cu datele figurii: două puncte reale și două imaginar conjugate. Raționamentul presupune, evident că raportul anarmonic al numerelor λ_i e bine determinat. Așa dar dreptele de inflexiune se sustrag concluziilor de mai sus.

4°. Analogul în trei dimensiuni al teoremei precedente e următoarea propoziție, care se stabilește acum fără nicio sforțare:

Planele osculatoare

$$ux + vy + wz + st = 0$$

ale cuarticei strâmbe de a doua specie (totdeauna rațională)

$$x : y : z : t = (a\lambda)^4 : (b\lambda)^4 : (c\lambda)^4 : (d\lambda)^4$$

sunt tangente unei aceleeași cuadrice, de ecuație (5), *în care însă*

$$\{a_i u\} \equiv a_i u + b_i v + c_i w + d_i s.$$

Orice alt plan al acestei cuadrice se bucură de proprietatea de a tăia pe cuartica strâmbă două puncte reale și două imaginar conjugate, de raport echianarmonic.

5°. In sfârșit, o ultimă aplicație a invarianților lui BOOLE.

Fie conica cu centru

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

și următoarea reprezentare parametrică, a ei:

$$(6)\quad x+iy = \frac{a(\theta^2+1)+b(\theta^2-1)}{2\theta},\quad x-iy = \frac{a(\theta^2+1)-b(\theta^2-1)}{2\theta}.$$

Ecuația unui cerc, de centru (ξ, η) se poate scrie sub forma:

$$(7)\quad (x+iy)(x-iy)-(\xi-i\eta)(x+iy)+(\xi+i\eta)(x-iy)+\omega=0.$$

Deci parametrii θ a intersecţiilor conicei (6) cu cercul (7) sunt rădăcinile ecuaţiei de gradul 4:

$$(8)\quad c^2\theta^4+4(a\xi+ib\eta)\theta^3+2(2\omega+a^2+b^2)\theta^2+4(a\xi-ib\eta)\theta+c^2=0$$

$$c^2=a^2-b^2.$$

Condiţiile ca (7) să fie un cerc osculator conicei (6) sunt:

$$(9)\quad g_2\equiv\frac{1}{3}(2\omega+a^2+b^2)^2-4(a^2\xi^2+b^2\eta^2)+c^4=0.$$

$$(10)\quad g_3\equiv\begin{vmatrix} c^2 & a\xi+ib\eta & \dfrac{2\omega+a^2+b^2}{3} \\ a\xi+ib\eta & \dfrac{2\omega+a^2+b^2}{3} & a\xi-ib\eta \\ \dfrac{2\omega+a^2+b^2}{3} & a\xi-ib\eta & c^2 \end{vmatrix}=0.$$

Să introducem condiţia suplimentară ca (7) să fie ortogonal unui cerc fix, de parametri ξ_0, η_0, ω_0.

$$(11)\quad \omega+\omega_0-2(\xi\xi_0+\eta\eta_0)=0.$$

Eliminarea lui ω între (9), (11) şi (10), (11) conduce la ecuaţiile în ξ şi η ale unei conice şi cubice. Ecuaţia conicei se scrie:

$$(12)\quad a\xi^2+b^2\eta^2-\frac{c^4}{4}-\frac{1}{3}\left(2\xi_0\xi+2\eta_0\eta+\frac{a^2+b^2}{2}-\omega_0\right)^2=0.$$

Se vede de aici că (12) e bitangentă conicei

$$(13)\quad a^2\xi^2+b^2\eta^2-\frac{c^4}{4}=0.$$

De aici, proprietatea:

Există 6 cercuri osculatoare unei conice cu centru şi ortogonale unui cerc dat. Centrele acestor 6 cercuri se găsesc pe o conică. Dacă facem să varieze cercul ortogonal, conica celor 6 centre rămâne bitangentă unei conice fixe (13).

6°. Pentru a enunţa reciproca propoziţiei de mai sus e nevoie să identificăm conica (13).

Ecuaţiile parametrice ale desfăşuratei conicei (6) se scriu:

$$(14)\quad x=\frac{c^2}{a}\frac{(\theta^2+1)^3}{8\theta^3},\quad y=\frac{c^2}{b}\frac{(\theta^2-1)^3}{8(i\theta)^3}.$$

Se vede numaidecât, introducând aceste expresii în (13) că această conică trece prin punctele de înapoiere $\theta = 0$, $\theta = \infty$ ale desfăşuratei, dela infinit şi atinge apoi desfăşurata în patru puncte ordinare, de parametri $\theta^4 + 1 = 0$.

Aşa dar (13) e o conică tangentă de patru ori desfăşuratei şi care trece prin punctele ei de înapoiere, dela infinit. Se poate arăta că aceste proprietăţi caracterizează complet pe (13). Ii vom zice conica principală înscrisă desfăşuratei.

Se citeşte atunci pe ecuaţia (12) următoarea propoziţie reciprocă:

Fie Γ *o conică bitangentă concei principale înscrise desfăşuratei* D *a unei elipse.* Γ *taie pe* D *două grupe de câte 6 puncte, raţional despărţite. Cercurile osculatoare elipsei, cu centrele în punctele uneia din grupe, admit un cerc ortogonal comun. Cele două cercuri astfel introduse au centrele simetric aşezate faţă de centrul elipsei, iar suma puterilor lor faţă de acest punct e egală cu pătratul razei cercului lui* MONGE.

D. BARBILIAN.

METODA ELECTRICĂ PENTRU REZOLVAREA ECUAŢIILOR ALGEBRICE

Sunt fenomene fizice în cari o anumită proprietate caracteristică a unor elemente ce intervin se traduce printr'o ecuaţie algebrică. Rezolvarea ecuaţiei se poate înlocui prin studierea experimentală a fenomenului respectiv, determinarea condiţiilor în care se realizează proprietatea respectivă şi apoi traducerea rezultatelor în vederea precizării rădăcinilor ecuaţiei.

Un asemenea exemplu îl oferă fenomenul de repartiţie al câmpurilor magnetice în jurul conductorilor străbătuţi de curenţi electrici. Vom arăta mai jos că un asemenea sistem de conductori rectilini paraleli, străbătuţi de diverşi curenţi, determină împrejurul lor un câmp magnetic, care poate prin punctele lui singulare să indice rădăcinile unei anumite ecuaţii algebrice [1]).

1) *Philosophical Magazine*, Nov. 1909, A. RUSSELL şi J. N. ALTY.

Se ştie că un conductor rectilin şi indefinit, străbătut de un curent I amperi, determină la distanţa r (cm) de el un câmp H normal pe raza vectoare, egal în mărime cu

$$H = \frac{0{,}2\,I}{r} \text{ (în GAUSSI)}.$$

Să considerăm un plan $\xi o \eta$ normal pe conductor (fig. 1) cu originea în punctul unde conductorul înţeapă planul. Intr'un punct M de coordonate ξ, η, câmpul magnetic va fi reprezentat printr'un vector H, de mărime:

$$H = \frac{0{,}2\,I}{r} = \frac{0{,}2\,I}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

având ca proiecţiuni pe cele două axe:

$$H_\xi = -0{,}2\,I\,\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} \qquad H_\eta = 0{,}2\,I\,\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}.$$

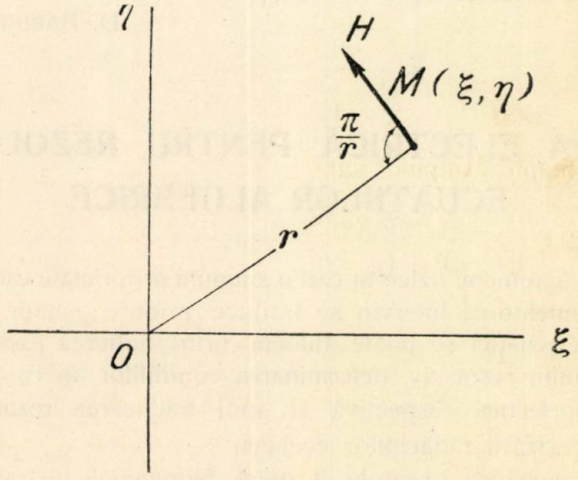


Fig. 1.

Dacă considerăm planul $\xi o \eta$ ca plan de reprezentare pentru cantităţi complexe: $r = \xi + i\eta$ atunci inversul lui r, care intervine în expresia câmpului, se va putea scrie:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\xi + i\eta} = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2+\eta^2} = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} - i\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} = 0{,}2\,I\,(H_\eta - H_\xi).$$

Partea reală a lui $\frac{1}{r}$ *intervine în proiecția verticală a câmpului, iar partea pur imaginară în proiecția orizontală.*

Același rezultat se obține chiar dacă curentul n'ar fi plasat în origine (fig. 2), ci în punctul C.

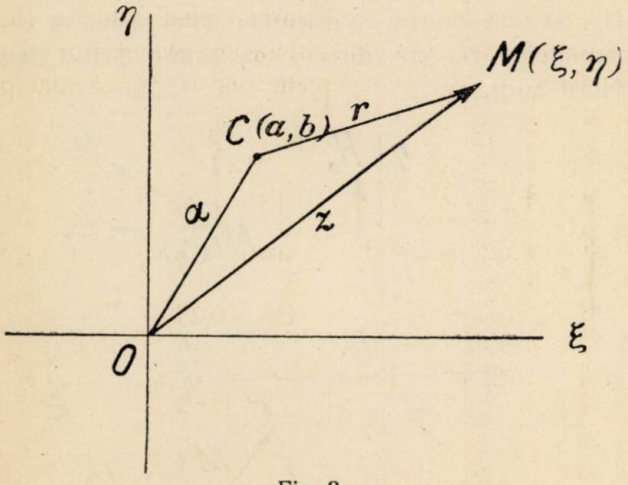


Fig. 2.

Proiecțiunile câmpului sunt în acest caz:

$$-0{,}2\,I\frac{\eta-b}{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2}\qquad 0{,}2\,I\frac{\xi-a}{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2},$$

iar proiecțiunile lui

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(\xi-a)+i(\eta-b)}$$

sunt:

$$-\frac{\eta-b}{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2}\quad\text{și}\quad\frac{\xi-a}{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2}.$$

Dacă în particular punctul C se găsește plasat pe axa $o\xi$ avem ca proiecțiuni ale lui $\frac{1}{r}$:

$$-\frac{\eta}{(\xi-a)^2+\eta^2}\quad\text{și}\quad\frac{\xi-a}{(\xi-a)^2+\eta^2}.$$

Să considerăm un caz particular, un număr de 3 conductori aşezaţi pe axa $o\xi$, în punctele de abscise $-3{,}0$ şi $+5$, străbătuţi de curenţi I_1, I_2 şi I_3. Câmpul rezultant într'un punct M al planului va fi rezultanta vectorială a celor 3 vectori componenţi.

Dar trebue să mai ţinem seama că dacă planul e orizontal mai intervine şi componenta orizontală a câmpului magnetic terestru H_0. Să presupunem că orientăm astfel planul de coordonate încât componenta H_0 are direcţia $o\eta$ (într'o primă aproximaţie direcţia Nord-Sud).

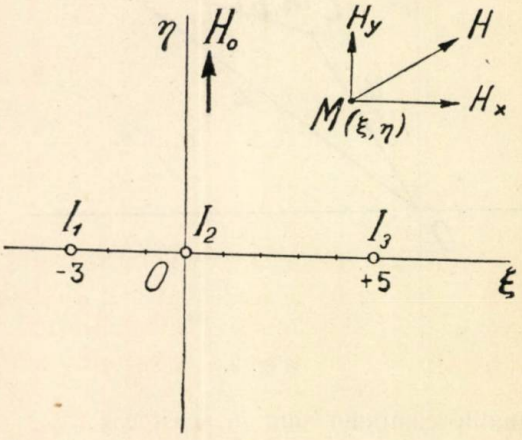


Fig. 3.

Câmpul magnetic rezultant în punctul M e caracterizat prin două proiecţiuni, una pe axa $o\xi$ şi alta pe axa $o\eta$. Componenta pe axa $o\xi$ va fi suma proiecţiunilor pe aceeaşi axă a câmpurilor magnetice componente:

$$H = -0{,}2\, I_1 \frac{\eta}{(\xi+3)^2+\eta^2} - 0{,}2\, I_2 \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} - 0{,}2\, I_3 \frac{\eta}{(\xi-5)^2+\eta^2}. \qquad (1)$$

Componenta pe axa $o\eta$ se calculează la fel adăogându-se H_0:

$$Hy = H_0 + 0{,}2\, I_1 \frac{\xi+3}{(\xi+3)^2+\eta^2} + 0{,}2\, I_2 \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} + 0{,}2\, I_3 \frac{\xi-5}{(\xi-5)^2+\eta^2}. \qquad (2)$$

Dacă formăm expresia:

$$E = H_y + i H_x = H_0 + 0{,}2\, I_1 \frac{(\xi+3) - i\eta}{(\xi+3)^2+\eta^2} + 0{,}2\, I_2 \frac{\xi - i\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

$$+ 0{,}2\, I_3 \frac{(\xi-5) - i\eta}{(\xi-5)^2+\eta^2}$$

constatăm că ea se mai poate scrie:

$$E = H_y + i H_x = H_0 + \frac{0{,}2\, I_1}{(\xi+3)+i\eta} + \frac{0{,}2\, I_2}{\xi+i\eta} + \frac{0{,}2\, I_3}{(\xi-5)+i\eta}$$

$$= H_0 + \frac{0{,}2 I_1}{x+3} + \frac{0{,}2\, I_2}{x} + \frac{0{,}2 I_3}{x-5}$$

notând: $x = \xi + i\eta$.

Această expresie E este nulă în punctele M din plan, în cari câmpul magnetic rezultant este zero; aceasta se poate determina experimental cu un ac magnetic (busolă) întrucât se cunoaşte proprietatea acestuia de a fi influenţat de câmpul magnetic, în sensul că acul se aşează pe direcţia câmpului rezultant. *In punctele din plan în care acul nu ia nici o orientare precisă, câmpul e nul şi deci expresia* E *este zero.*

Să părăsim acum domeniul electric şi să considerăm o ecuaţie oricare de gradul al treilea. De exemplu:

$$F \equiv x^3 - 2x^2 - 23x + 150 = 0.$$

Pentru a face o legătură între aceasta şi expresia noastră E, vom înmulţi ecuaţia cu H_0 şi o vom împărţi cu $x+3$, x şi $x-5$ (în legătură cu punctele — alese dela început arbitrar — în cari cei 3 conductori au înţepat planul), obţinând după descompunere în fracţii simple:

$$H_0 F = H_0 \frac{x^3-2x^2-23x+150}{(x+3)\,x\,(x-5)} = H_0 + \frac{29\, H_0}{4(x+3)} - \frac{10\, H_0}{x} + \frac{11\, H_0}{4(x-5)}.$$

Putem face ca E să devie identic cu membrul al doilea al expresiei de mai sus, dacă alegem convenabil pe I_1, I_2, şi I_3:

$$I_1 = \frac{29\, H_0}{0{,}2 \times 4} \qquad I_2 = -\frac{10\, H_0}{0{,}2} \qquad \text{şi} \qquad I_3 = \frac{11\, H_0}{0{,}2 \times 4}.$$

F şi E se anulează deci în aceleaşi puncte ale planului. *Rădăcinile lui* F *sunt deci punctele din plan în care câmpul magnetic rezultant e zero.*

Determinarea experimentală a acestor puncte conduce la rezolvarea ecuaţiei date. Punctele ce se găsesc pe axa $o\xi$ determină rădăcini reale. Se observă că poziţiile în care se aşează conductorii (—3,0 şi 5) sunt arbitrare, şi că trei conductori aşezaţi oriunde în plan ar putea servi la găsirea rădăcinilor unei ecuaţii de gradul al treilea; trebue însă să se evite ca aceste puncte de intersecţie ale conductorilor să nu coincidă cu vre-o rădăcină. Intensitatea curentului ce trece prin conductori nu e arbitrară, ci depinde de coeficienţii ecuaţiei ce trebue rezolvată, precum şi de componenta orizontală H_0 a câmpului magnetic terestru, în locul unde se face experienţa.

Rezultatul se poate generaliza pentru o ecuaţie de orice grad.

Pentru a rezolva o ecuaţie de gradul n:

$$E = 0$$

se plasează n conductori paraleli perpendiculari pe un plan orizontal $\xi o \eta$ în puncte de abcise arbitrare $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Orientarea planului este astfel încât axa $o\eta$ să fie după meridianul magnetic terestru local.

Dacă H_0 este componenta orizontală a câmpului magnetic terestru, se descompune fracţia:

$$\frac{H_0 E}{(\xi - a_1)(\xi - a_2)(\xi - a_3)\ldots(\xi - a_n)}$$

în fracţii simple. Coeficienţii acestora, împărţiţi prin factorul 0,2 reprezintă curenţii (în amperi) ce trebue să străbată cei n conductori. Se realizează experimental aceşti curenţi şi se procedează apoi la un studiu fizic al câmpului magnetic rezultat în jurul conductorilor. Punctele de câmp nul determină prin coordonatele lor rădăcinile ecuaţiei date; astfel cele depe axa $o\xi$ vor da rădăcinile reale ale ecuaţiei.

ING. TUDOR A. TĂNĂSESCU.

O TEOREMĂ
DE SCOBORÎRE A ECUAȚIILOR MULTIGRADE

Fie

$$a_1^p + a_2^p + \ldots + a_t^p = b_1^p + b_2^p + \ldots + b_t^p$$

o ecuație multigradă în numere întregi, adevărată pentru

$$p = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n-1,\ n.$$

Vom scrie simbolic sub forma prescurtată

$$(1) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots\ a_t \overset{p}{=} b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots\ b_t \qquad (p = 1,\ 2, \ldots,\ n-1,\ n)$$

o astfel de ecuațiune, asupra căreia am stabilit următoarea teoremă:

Împart termenii ecuațiunei în două grupe

$$a_1,\ a_2, \ldots\ a_i - b_1,\ b_2, \ldots\ bi$$

$$a_{i+1},\ a_{i+2}, \ldots\ a_t - b_{i+1},\ b_{i+2}, \ldots\ b_t$$

așa încât pentru prima grupă să avem $a_j < b_j$ *cu* $(j = 1,\ 2, \ldots i)$ *și pentru a doua grupă* $a_k > b_k$ *cu* $(k = i+1,\ i+2, \ldots t)$; *fie* $d_1, d_2, \ldots d_t$ *diferențele* $a_j - b_j$, $a_k - b_k$, *și fie* x c. m. d. c. *al diferențelor* d_r *așa încât*

$$d_1 = x\partial_1,\ d_2 = x\partial_2, \ldots\ d_t = x\partial_t$$

cu $\partial_1, \partial_2, \ldots \partial_t$ *prime între ele. Între fiecare pereche de termeni* (a_r, b) *se vor insera medii aritmetice cu rația* x. *Dacă ecuațiunea multigradă (1) este adevărată pentru primele n grade, atunci și următoarea ecuațiune multigradă este adevărată pentru primele* $n-1$ *grade:*

$$a_1 + a_1 + x\ ,\quad a_1 + x + a_1 + 2x, \ldots,\quad a_1 + \alpha_1 x + b_1$$

$$a_2 + a_2 + x\ ,\quad a_2 + x + a_2 + 2x, \ldots,\quad a_2 + \alpha_2 x + b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_i + a_i + x\ ,\quad a_i + x + a_i + 2x, \ldots,\quad a_i + \alpha_i x + b_i \overset{p}{=}$$

$$a_{i+1} + a_{i+1} - x\ ,\quad a_{i+1} - x + a_{i+1} - 2x, \ldots,\quad a_{i+1} - \alpha_{i+1} x + b_{i+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_t + a_t - x\ ,\quad a_t - x + a_t - 2x, \ldots,\quad a_t - \alpha_p x + b_p$$

$$[p = 1,\ 2, \ldots\ (n-1)].$$

Numerele α_r sunt legate cu ∂_r prin relaţiunea:

$$\alpha_r = \partial_r - 1.$$

Pentru a reduce numărul termenilor a nouei egalităţi multigrade, atât cât se poate, se va lua pentru x pe c. m. c. d. posibil. Acest c. m. c. d. se găseşte cu ajutorul unui tablou cu dublă intrare, după cum vom arăta în câteva exemple.

Aplicaţiuni. I. Avem octograda

$$1, 5, 11, 24, 28, 30, 42, 47, 58, 59 \overset{8}{=}$$
$$2, 3, 14, 19, 31, 33, 37, 50, 56, 60\ [1]).$$

Formăm tabloul cu dublă intrare:

	1	5	11	24	28	30	42	47	58	59
2	1	3	9	22	**26**	28	40	45	56	57
3	2	2	8	21	25	27	**39**	44	55	56
14	**13**	9	3	10	14	16	28	33	44	45
19	18	14	8	5	9	11	23	28	**39**	40
31	30	**26**	20	7	3	1	11	16	27	28
33	32	28	22	9	5	3	9	14	25	**26**
37	36	32	**26**	13	11	7	5	10	21	22
50	49	45	39	**26**	22	20	8	3	8	9
56	55	51	45	32	28	**26**	14	9	2	3
60	59	55	49	36	32	30	18	**13**	2	1

unde $x = 13$, iar:

a_r	1,	5,	11,	24,	30,	47,	28,	42,	38,	59
b_r	14,	31,	37,	50,	56,	60,	2,	3,	19,	33
d_r	—13,	—26,	—26,	—26,	—26,	—13,	+26,	+39,	+39,	+26.

1) A, MOESSNER şi W. SCHULZ. *Über Potenzsummen ganzer rationaler Zahlen.* (*Mathemathische Zeitschrift,* 1936, pag. 342).

Să înserăm mediile aritmetice:

1 . 5 . 18 . 11 . 24 . 24 . 37 . 30 . 43 . 47
14 . 18 . 31 . 24 . 37 . 37 . 50 . 43 . 56 . 60
28 . 15 . 42 . 29 . 16 . 58 . 45 . 32 . 59 . 46
15 . 2 . 29 . 16 . 3 . 45 . 32 . 19 . 46 . 33.

Adunând termen cu termen rândurile acestor şiruri, obţinem următoarea egalitate septigradă cu câte 10 termeni în fiecare membru:

$$15,\ 23,\ 49,\ 35,\ 61,\ 61,\ 87,\ 73,\ 99,\ 107 \overset{p}{=}$$
$$43,\ 17,\ 71,\ 45,\ 19,\ 103,\ 77,\ 51,\ 105,\ 79.$$

sau scăzând pe 14 din toţi termenii

$$1,\ 9,\ 21,\ 35,\ 47,\ 47,\ 59,\ 73,\ 85,\ 93 \overset{p}{=}$$
$$3,\ 5,\ 29,\ 31,\ 37,\ 57,\ 63,\ 65,\ 89,\ 91$$

$(p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

unde: $S_1 = 470; \ldots S_7 = 106\ 843\ 237\ 302\ 110.$

II. Avem următoarea egalitate adevărată la primele 9 puteri [1]):

$$1,\ 5,\ 11,\ 21,\ 22,\ 28,\ 38,\ 42,\ 52,\ 58,\ 59,\ 69,\ 75,\ 79 \overset{9}{=}$$
$$2,\ 3,\ 14,\ 19,\ 20,\ 31,\ 37,\ 43,\ 49,\ 60,\ 61,\ 66,\ 77,\ 78.$$

Tabloul patrat al diferenţelor arată că $x = 19$.

Să asociem termenii după tabloul următor:

a_r	1	5	11	28	42	58	59	21	22	38	52	69	75	79
b_r	20	43	49	66	61	77	78	2	3	19	14	31	37	60
d_r	−19	−38	−38	−38	−19	−19	−19	19	19	19	38	38	38	19

Inserţia mediilor aritmetice:

1 . 5 . 24 . 11 . 30 . 28 . 47 . 42 . 58 . 59
20 . 24 . 43 . 30 . 49 . 47 . 66 . 61 . 77 . 78
21 . 22 . 38 . 52 . 33 . 69 . 50 . 75 . 56 . 79
2 . 3 . 19 . 33 . 14 . 50 . 31 . 56 . 37 . 60.

1) A. MOESSNER şi W. SCHULTZ. Loc. cit.

Vom avea octograda următoare cu câte 10 termeni în fiecare membru:

$$21, 29, 67, 41, 79, 75, 113, 103, 135, 137 \overset{p}{=}$$
$$23, 25, 57, 85, 47, 119, 81, 131, 93, 139$$

sau

$$1, 9, 21, 47, 55, 59, 83, 93, 115, 117 \overset{p}{=}$$
$$3, 5, 27, 37, 61, 65, 73, 99, 111, 119$$
$$[p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$$
$$S_1 = 600 \ ; \ S_2 = 51.690; \ldots$$

Teorema se aplică de asemenea la egalități multigrade adevărate pentru valorile

$$[1, 3, 5, \ldots, 2n+1] \text{ sau } [1, 2, 4, \ldots, 2n]$$

ale exponentului.

III. Avem multigrada următoare, adevărată la gradele 1, 2, 4, 6:

$$9, 9, 13, 19, 20 \overset{p}{=} 1, 5, 12, 15, 16, 21$$
$$[p = 1, 2, 4, 6].$$

Se deduce cu $x = 4$:

$$3, 7, 7, 17, 18 \overset{p}{=} 2, 6, 10, 19$$
$$[p = 1, 3, 5]$$
$$S_1 = 52 \ ; \ S_3 = 11458 \ ; \ S_5 = 3343282.$$

Cu $x = 1$, se găsește multigrada următoare, formând un quadruplu de numere neperechi consecutive, două tripleuri și un dubleu de numere neperechi consecutive

$$\underbrace{11, 13, 15, 17}_{(4)}, \ \underbrace{33, 35, 37}_{(3)} \overset{p}{=} 1, \ \underbrace{19, 21, 23}_{(3)}, \ \underbrace{27, 29}_{(2)}, 41,$$
$$[p = 1, 3, 5]$$
$$S_1 = 161 \ ; \ S_3 = 141281 \ ; \ S_5 = 163712801.$$

IV. Iată o ultimă aplicațiune a teoremei noastre:

Avem identic

$$5r+s, \ r-5s, \ 7r+5s, \ 5r-7s, \ 2r+8s, \ 8r-2s \overset{p}{=}$$
$$5r-s, \ r+5s, \ 7r-5s, \ 5r+7s, \ 2r-8s, \ 8r+2s$$
$$[p = 1, 2, 4, 6].$$

Facem $x = r - 3s$ obţinem:

$$5r+13s,\ 7r+7s,\ 9r+s,\ 11r-s,\ 13r-7s,\ 3r-13s,\ 15r+7s \overset{p}{=}$$
$$9r-11s,\ 7r-5s,\ 5r+s,\ 3r+7s,\ 15r-s,\ 13r+5s,\ 11r+11s$$
$$[p = 1,\ 3,\ 5].$$

Exemplu numeric. Pentru $r = 5$, $s = 1$ se găseşte multigrada

$$2,\ 38,\ 42,\ 46,\ 54,\ 58,\ 82 \overset{p}{=} 22,\ 26,\ 30,\ 34,\ 66,\ 70,\ 74$$
$$[p = 1,\ 3,\ 5]$$

$$S_1 = 322\ ,\ S_3 = 1130248,\ldots$$

A. GLODEN
(Luemburg).

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

După cum s'a anunţat în numărul 1, din Septemvrie 1938, al *Gazetei Matematice*, anul acesta se va ţine un concurs de matematici între elevii liceelor din ţară şi elevii anului preparator al Şcoalei Politehnice REGELE CAROL II din Bucureşti.

Dintre candidaţii înscrişi au fost admişi a se prezenta la concurs următorii:

Pentru Clasa IV-a: *Bădescu Fl. Florin, Bănescu A. Mircea, Ciobanu V. Igori, Constantinescu I. Emil, Cozloschi V. Mircea, Dinculeanu Nicolae, Florea V. Virgil, Ionescu C. Miltiade, Iordănescu Gh. Petre, Oprea D. Gheorghe, Pântea P. Tudor, Petrescu I. Ştefan, Pleşu I. Lucian, Popa Teodor, Popescu Ovidiu, Stoianovici I. Şerban, Vlădoianu T. S. Rusan, Vonica I. Ioan.*

Pentru Clasa V-a: *Aldea V. Virgil, Andreescu Gh. Ioan, Antonescu M. Mircea, Arendt R. Emil, Bogdan Gr. Gheorghe, Crăciunescu I. Marcel, Cristea I. Constantin, Drăghicescu P. Paul, Floreşteanu Alexandru, Ganea N. Marin D-tru, Gheorghe Mircea, Grătianu I. Radu, Grigoriu Constantin, Hristescu I. Ioan, Mănescu Gh. Ioan, Mateescu Gh. M. Aurel, Miroslav Şt. Tudorel, Movanu I. Petre, Munteanu I. Ioan, Nedelea Fl. Ioan, Ordeanu P. Mircea, Pacioglu C. Constantin, Pădure M., Popa N. Aurel, Şerban M. Petre, Ştefănescu C. Mihai, Topărceanu I. Gheorghe, Zaharia Gheorghe, Zaharia Gh. Simion.*

Pentru Clasa VI-a: *Vasiliu C. Margareta, Aldea V. Minea, Atanasiu C. Virgil, Bârlea-Suhăţeanu G. Victor, Bârzu Gh. Vasile, Deheleanu Gheorghe, Gligor N. Ioan, Ilie I. Nicolae, Ionescu M. Constantin, Mărgărit I. Nicolae, Nicolau Constantin, Petrescu Iulian, Popişca V. Mircea, Sava V. Dumitru, Sbârnea D. Gheorghe, Şerban C. Constantin, Vasiliu C. Dumitru, Vijelie Gh. Eugeniu.*

Pentru Clasa VII-a: *Ene Gh. Elisabeta, Papadopol D. Elena, Bădescu F. Constantin, Buznea D. Dinu, Călin P. Ioan, Costescu Gh. Ioan, Dincă Al. Ştefan, Gviazdomorschi Eduard, Ionescu D. Stelian, Leibovici Sergiu, Micu V. Petru, Pantelimon V. Constantin, Paparizu I, Gabriel, Paulini R. Rudolf, Petcu Gh. Valerian, Petrescu V. Achile, Petrescu V. Mihai, Pop G. Ilie, Popa D. Mircea, Rohr I. Alexandru, Stoenescu D. Mirel, Theodorescu N. Dorin, Toma I. Victor, Turcu R. Sandu, Văduva Fl. Marin, Zancu C. Aurel.*

Pentru Clasa VIII-a: *Bodnărescu M. Horia, Burghelea S. Cezar, Cernavodeanu I. Ion, Cetăţeanu Stelian, Ciupag St. H. Ştefan, Cristea D. Eftimie, Florescu L. Victor, Ioan A. Ilie, Lupu I. Gruia, Pântescu C. Constantin, Pascariu I. Ioan, Pascu V. Horia, Rădulescu Gh. Octavian, Reischer D. Herman, Stănculescu Mircea, Tătaru N. Nicolae, Turtoiu I. Fănică.*

Pentru anul preparator al Şcoalei Politehnice: *Şaichin O. Adolf.*

Adică 18 candidaţi pentru clasa IV-a, 29 pentru clasa V-a, 18 pentru clasa VI-a, 26 pentru clasa VII-a, 17 pentru clasa VIII-a şi 1 pentru anul preparator al Şcoalei Politehnice.

Fiecare candidat va da câte o lucrare scrisă din ambele materii la care s'a înscris. Lucrările scrise sunt eliminatorii.

Prima teză va avea loc Joi 13 Aprilie 1939, dela ora 8^{30} până la 11^{30}, iar a doua teză, în aceeaşi zi, dela ora 15 până la ora 18, la Şcoala Politehnică, Calea Griviţei 132, Bucureşti.

Oralul va începe Vineri 14 Aprilie, ora 8^{30}, tot la Şcoala Politehnică.

Candidaţilor înscrişi la concurs, cari nu dispun de mijloace materiale pentru venirea şi întreţinerea lor în Bucureşti (după cum au arătat în cererile lor), li se vor trimite în vacanţa de Paşti sumele necesare transportului la Bucureşti şi li se va comunica locul unde vor fi găzduiţi în tot timpul concursului.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

18. *Generalizarea teoremelor lui* STEWART *și a lui* LUCHTERHAND. 1°. *Fie* A_1, A_2, A_3 *trei puncte în linie dreaptă așezate în ordinea indicilor crescători. Dacă* p_1, p_2, p_3 *sunt puterile respective ale acestor puncte față de un cerc oarecare, avem:*

$$(1)\quad p_1 . A_2A_3 - p_2 . A_1A_3 + p_3 . A_1A_2 - A_1A_2 . A_2A_3 . A_1A_3 = 0.$$

Fie O centrul și R raza cercului dat. Teorema lui STEWART dă

$$\overline{OA_1}^2 . A_2A_3 - \overline{OA_2}^2 . A_1A_3 + OA_3 . A_1A_2 - A_1A_2 . A_2A_3 . A_1A_3 = 0.$$

Dacă din membrul I al acestei relațiuni se scade cantitatea

$$R^2 (A_2A_3 - A_1A_3 + A_1A_2)$$

identic nulă se găsește relațiunea (1), care generalizează teorema lui STEWART.

2°. *Fie* A_1, A_2, A_3, A_4 *patru puncte dispuse, în ordinea crescândă a indicilor pe un cerc* O. *Dacă* p_1, p_2, p_3, p_4 *sunt puterile respective ale celor patru puncte în raport cu un cerc cu centrul* M *pe cercul* O, *atunci*

$$p_1 . A_2A_3 . A_3A_4 . A_4A_2 - p_2 . A_3A_4 . A_4A_1 . A_1A_2 + p_2 . A_4A_1 . A_1A_2 . A_2A_3$$
$$- p_4 . A_1A_2 . A_2A_3 . A_3A_4 = 0.$$

Fie r raza cercului M. După teorema lui LUCHTERHAND, avem

$$\sum (\overline{MA_1}^2 . A_2A_3 . A_3A_4 . A_4A_1 - \overline{MA_2}^2 . A_3D_4 . A_4A_1 . A_1A_2) = 0.$$

Scăzând din primul membru cantitatea identic nulă

$$r^2 (A_2A_3 . A_3A_4 . A_4A_1 - A_3A_4 . A_4A_1 . A_1A_2 + A_4A_1 . A_1A_2 . A_2A_3$$
$$- A_1A_2 . A_2A_3 . A_3A_4)$$

se obține relațiunea (2), care generalizează teorema lui LUCHTERHAND.

3°. Transformând figura prin inversiune se găsește de asemeni o formă mai generală a teoremei lui LUCHTERHAND pentru cazul când punctele A_1, A_2, A_3, A_4, și M sunt colineare.

V. THÉBAULT.

19. *Numere interesante de 10 cifre diferite*[1]). La cele 248 soluţiuni ale ecuaţiunei

$$N = p \times Np$$

date de D-l G-L GH. BUICLIU în nota dela pag. 633, G. M. XLII, pentru $p = 3$ mai trebuesc adăogate următoarele 88 soluţiuni:

N_3	N	N_3	N
041 597 862	0 124 793 586	059 748 612	0 179 245 836
041 798 256	0 125 394 768	059 786 214	0 179 358 642
041 965 782	0 125 897 346	059 847 621	0 179 542 863
042 789 165	0 128 367 435	061 248 975	0 183 746 925
042 879 165	0 128 637 495	061 249 875	0 183 749 625
047 598 621	0 142 795 863	061 597 842	0 184 793 526
048 975 261	0 146 925 783	061 978 254	0 185 934 762
049 758 621	0 149 275 863	062 157 984	0 186 473 952
049 875 261	0 149 625 783	062 541 798	0 187 625 394
052 489 761	0 157 469 283	064 179 582	0 192 538 746
052 498 761	0 157 496 283	064 217 958	0 192 653 874
052 876 401	0 158 629 473	064 912 875	0 194 738 625
054 261 798	0 162 785 394	065 142 879	0 195 428 637
056 179 824	0 168 539 472	065 278 914	0 195 836 742
056 197 824	0 168 593 472	065 419 278	0 196 257 834
056 241 798	0 168 725 394	065 428 179	0 196 284 537
056 418 279	0 169 254 837	065 429 178	0 196 287 534
056 419 278	0 169 257 834	065 781 942	0 197 345 826
056 428 179	0 169 284 537	065 782 194	0 197 346 582
056 429 178	0 169 287 534	065 821 794	0 197 465 382
057 498 621	0 172 495 863	065 941 782	0 197 825 346
057 821 964	0 173 465 892	065 942 178	0 197 826 534
057 964 182	0 173 892 546	071 264 895	0 213 794 685
057 986 214	0 173 958 642	071 286 549	0 213 859 647
058 179 642	0 174 538 926	071 645 289	0 214 935 867
058 197 462	0 174 592 386	071 982 546	0 215 947 638
059 641 782	0 178 925 346	072 145 986	0 216 437 958
059 642 178	0 178 926 634	072 194 658	0 216 583 974
059 743 621	0 179 245 863	072 456 198	0 217 368 594

1) Urmare la Nota dela pag. 141, Vol. XLIV, « *Gazeta Matematică* ».

N_3	N	N_3	N
072 489 651	0 217 468 953	089 714 625	0 269 143 875
072 498 561	0 217 495 683	089 715 246	0 269 145 738
072 648 951	0 217 946 853	096 487 251	0 239 461 753
072 856 491	0 218 569 473	096 512 487	0 289 537 461
081 964 572	0 245 893 716	097 125 486	0 291 376 458
081 972 546	0 245 927 638	097 182 546	0 291 547 638
084 965 721	0 254 897 163	097 214 586	0 291 643 758
085 497 261	0 256 491 783	097 215 846	0 291 647 538
085 972 146	0 257 916 438	097 254 861	0 291 764 583
086 125 497	0 258 376 491	098 172 546	0 294 517 638
086 214 597	0 258 643 791	098 245 617	0 294 736 851
087 126 495	0 261 379 485	098 572 146	0 295 716 438
089 512 647	0 268 537 941	098 714 526	0 296 143 578
089 647 251	0 268 941 753	098 714 625	0 296 143 875
089 714 526	0 269 143 578	098 715 246	0 296 145 738

S'au găsit în total 336 soluţiuni din soluţiunile ecuaţiei $N = p \times Np$ în care atât Np cât şi N începe cu cifra zero.

(Va urma) STELIAN CETĂŢEANU.

20. *Asupra Notei 16* din G. M., Vol. 40, pag. 117. Pentru a demonstra un rezultat al D-lui A. AIGNER asupra ecuaţiei $x^4 + y^4 = z^4$ în corpul $R(\sqrt{m})$ [R fiind corpul numerilor raţionale], autorul acestei note se bazează pe o proprietate inexactă. Intr'adevăr ecuaţiile (2) au o rădăcină comună în m, ceea ce *nu e suficient* pentru a afirma că coeficienţii lor sunt proporţionali. Demonstraţia nu e suficientă decât pentru a arăta că

$$m = -7,\ x,\ y = 1 \pm \sqrt{-7},\ z = 2$$

este o soluţie şi nu permite a conchide că aceasta este singura soluţie.

T. P.

21. *Identităţi trigonometrice condiţionate.*

Din relaţiile pe care le satisface unghiul BROCARD, *dacă*

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C$$

avem şi

$$\frac{\sin(A-\omega)}{\sin\omega} = \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C}$$

$$\operatorname{cosec}^2\omega = \operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 B + \operatorname{cosec}^2 C$$

$$\sin^3\omega = \sin(A-\omega)\sin(B-\omega)\sin(C-\omega)$$

se poate deduce altele făcând anumite transformări asupra unghiurilor cu condiţia ca suma lor să rămâie 180^0.

Inlocuind cu

$$180^0 - 2A,\ 180^0 - 2B,\ 180^0 - 2C,$$

dacă

$$-\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg}2A + \operatorname{cotg}2B + \operatorname{cotg}2C$$

avem şi

$$\frac{\sin(2A+\omega)}{\sin\omega} = \frac{\sin^2 2A}{\sin 2B \sin 2C}$$

$$\operatorname{cosec}^2\omega = \operatorname{cosec}^2 2A + \operatorname{cosec}^2 2B + \operatorname{cosec}^2 2C$$

$$\sin^3\omega = \sin(2A+\omega)\sin(2B+\omega)\sin(2C+\omega)$$

ω este unghiul B al triunghiului ortic ori tangenţial.

Inlocuind cu

$$90^0 - \frac{A}{2},\ 90^0 - \frac{B}{2},\ 90^0 - \frac{C}{2},$$

dacă

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

avem şi

$$\frac{\cos\left(\frac{A}{2}+\omega\right)}{\sin\omega} = \frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\operatorname{cosec}^2\omega = \sec^2\frac{A}{2} + \sec^2\frac{B}{2} + \sec^2\frac{C}{2}$$

$$\sin^3\omega = \cos\left(\frac{A}{2}+\omega\right)\cos\left(\frac{B}{2}+\omega\right)\cos\left(\frac{C}{2}+\omega\right)$$

ω este unghiul B al triunghiului antiortic ori al contactelor.

Inlocuind cu

$$90^0+\frac{A}{2}\ ,\ \frac{B}{2}\ ,\ \frac{C}{2},$$

dacă

$$\operatorname{cotg}\omega = -\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

avem şi

$$\frac{\sin\left(\frac{A}{2}-\omega\right)}{\sin\omega}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\ ,\ \frac{\sin\left(\frac{B}{2}-\omega\right)}{\sin\omega}=\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\operatorname{cosec}^2\omega=\sec^2\frac{A}{2}+\operatorname{cosec}^2\frac{B}{2}+\operatorname{cosec}^2\frac{C}{2}$$

$$\sin^3\omega=\cos\left(\frac{A}{2}-\omega\right)\sin\left(\frac{B}{2}-\omega\right)\sin\left(\frac{C}{2}-\omega\right)$$

ω este unghiul B al triunghiului format de două vârfuri şi centrul cercului înscris.

Inlocuind cu

$$180^0-A,\ 90^0-B,\ 90^0-C,$$

dacă

$$\operatorname{cotg}\omega=-\operatorname{cotg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C$$

avem şi

$$\frac{\sin(A+\omega)}{\sin\omega}=\frac{\sin^2A}{\cos B\cos C}\ ,\ \frac{\cos(B+\omega)}{\sin\omega}=\frac{\cos^2B}{\sin A\cos C}$$

$$\operatorname{cosec}^2\omega=\operatorname{cosec}^2A+\sec^2B+\sec^2C$$

$$\sin^3\omega=\sin(A+\omega)\cos(B+\omega)\cos(C+\omega)$$

ω este unghiul B al triunghiului format de două vârfuri şi ortocentru

Inlocuind cu

$$2x,\ 90^0-x,\ 90^0-x,$$

dacă

$$\operatorname{cotg}\omega=\operatorname{cotg}2x+2\operatorname{tg}x$$

avem şi

$$\frac{\sin(2x-\omega)}{\sin\omega} = 4\sin^2 x, \quad \frac{\cos(x+\omega)}{\sin\omega} = \frac{1}{2\sin x}$$

$$\operatorname{cosec}^2\omega = \operatorname{cosec}^2 2x + 2\sec^2 x$$

$$\sin^3\omega = \sin(2x-\omega)\cos^2(x+\omega)\ldots$$

Obţinem astfel, fără calcul, dintr'o relaţie, ori câte. Ele se pot verifica şi direct; pentru a arăta cum pot fi conduse calculele, să arătăm că *dacă*

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg} n\mathrm{A} + \operatorname{cotg} n\mathrm{B} + \operatorname{cotg} n\mathrm{C} \qquad (n \text{ întreg})$$

avem şi

$$\frac{\sin(n\mathrm{A}-\omega)}{\sin\omega} = -(-1)^n \frac{\sin^2 n\mathrm{A}}{\sin n\mathrm{B}\,\sin n\mathrm{C}}$$

$$\operatorname{cosec}^2\omega = \operatorname{cosec}^2 n\mathrm{A} + \operatorname{cosec}^2 n\mathrm{B} + \operatorname{cosec}^2 n\mathrm{C}$$

$$\sin^3\omega = -(-1)^n \sin(n\mathrm{A}-\omega)\sin(n\mathrm{B}-\omega)\sin(n\mathrm{C}-\omega).$$

In adevăr

$$\frac{\sin(n\mathrm{A}-\omega)}{\sin\omega} = \sin n\mathrm{A}\operatorname{cotg}\omega - \cos n\mathrm{A}$$

$$= \sin n\mathrm{A}(\operatorname{cotg} n\mathrm{A} + \operatorname{cotg} n\mathrm{B} + \operatorname{cotg} n\mathrm{C}) - \cos n\mathrm{A}$$

$$= \sin n\mathrm{A}(\operatorname{cotg} n\mathrm{B} + \operatorname{cotg} n\mathrm{C})$$

$$= \frac{\sin n\mathrm{A}\sin n(180^0-\mathrm{A})}{\sin n\mathrm{B}\sin n\mathrm{C}} = -(-1)^n \cdot \frac{\sin^2 n\mathrm{A}}{\sin n\mathrm{B}\sin n\mathrm{C}}.$$

Ridicând relaţia de condiţie la patrat şi ţinând seamă că

$$\Sigma \operatorname{cotg} n\mathrm{B}\operatorname{cotg} n\mathrm{C} = 1 \quad \text{căci} \quad \Sigma \operatorname{tg} n\mathrm{A} = \pi \operatorname{tg} n\mathrm{A},$$

se obţine:

$$\operatorname{cotg}^2\omega = 2 + \Sigma \operatorname{cotg}^2 \mathrm{A}$$

şi cum

$$\operatorname{cotg}^2 x = 1 + \operatorname{cosec}^2 x,$$

rezultă şi a doua relaţie.

Apoi se multiplică relaţia întâia obţinută, cu analoagele ei.

Analog, *dacă*

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{tg} p\frac{A}{2} + \operatorname{tg} p\frac{B}{2} + \operatorname{tg} p\frac{C}{2} \qquad (p = 2n+1)$$

avem şi

$$\frac{\cos\left(p\frac{A}{2}+\omega\right)}{\sin\omega} = (-1)^n \frac{\cos^2 p\frac{A}{2}}{\cos p\frac{B}{2}\cos p\frac{C}{2}}$$

$$\operatorname{cosec}^2\omega = \sec^2 p\frac{A}{2} + \sec^2 p\frac{B}{2} + \sec^2 p\frac{C}{2}$$

$$\sin^3\omega = (-1)^n \cos\left(p\frac{A}{2}+\omega\right)\cos\left(p\frac{B}{2}+\omega\right)\cos\left(p\frac{C}{2}+\omega\right).$$

Observare: In cursul desvoltării ultimei grupe, se ajunge la relaţia

$$\Sigma \operatorname{tg} p\frac{B}{2}\operatorname{tg} p\frac{C}{2} = 1 \qquad (p \text{ impar})$$

care se justifică cu precedenta, considerând

$$\operatorname{tg} nA = -\operatorname{tg} n(B+C) = \frac{\operatorname{tg} nB + \operatorname{tg} nC}{\operatorname{tg} nB \operatorname{tg} nC - 1} \text{ ori}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} p\frac{A}{2}} = \operatorname{tg} p\frac{B+C}{2} = \frac{\operatorname{tg} p\frac{B}{2} + \operatorname{tg} p\frac{C}{2}}{1 - \operatorname{tg} p\frac{B}{2}\operatorname{tg} p\frac{C}{2}}.$$

N. N. MIHĂILEANU.

22. *Asupra problemei 2035.*

Autorul acestei probleme (rezolvată în Vol. XLIII, pag. 256), cere să se arate că avem:

$$n!(p-n-1)! + (-1)^n = \operatorname{Mult} p$$

când p este prim şi $n < p$.

Voiu da o nouă soluţie acestei probleme, din care se va vedea că relaţia de mai sus este teorema lui WILSON, sub o formă puţin schimbată.

Pentru p, prim avem:

$$(p-1)!+1 = \text{Mult}\, p.$$

Dar:

$$(p-1)!+1 = (p-n-1)!(p-n)(p-n+1)\ldots(p-1)+1 =$$

$$\text{Mult}\, p + (-1)^n (p-n-1)!\, n! + 1$$

deci:

$$(-1)^n (p-n-1)!\, n! + 1 = \text{Mult}\, p$$

sau:

$$(p-n-1)!\, n! + (-1)^n = \text{Mult}\, p.$$

c. c. t. d.

FLORESCU L. VICTOR
Lic. militar „N. Filipescu".

23. *Notă de geometrie proiectivă.*

Problema 3694 propusă de D-l V. THÉBAULT, rezolvată în *G. M.*, Vol. XXXVIII, pag. 65 şi care a prilejuit o notă a propunătorului în Vol. XL, pag. 305, poate căpăta o soluţie indiferentă de diversele situaţii topologice şi totodată rapidă, observând că figura problemei este o configuraţie PAPPUS dual specială.

Pentru aceasta vom introduce notaţii mai naturale.

Fie a, b, c; a', b', c' respectiv două terne de drepte paralele; ω, ω' punctele lor dela infinit diferite.

Cu ajutorul acestor terne definim proiectivităţile ciclice:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b' & c' & a' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c' & a' & b' \end{pmatrix}$$

şi aciclice:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & c' & b' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c' & b' & a' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b' & a' & c' \end{pmatrix}$$

Proiectivităţilor ciclice le corespund punctele PAPPUS ciclice p_0, p_1, p_2, iar celor aciclice punctele PAPPUS aciclice p_0', p_1', p_2'. Cele trei puncte ciclice sunt pe dreapta STEINER s, iar cele aciclice pe s'. (Curs de geometrie proiectivă profesat în 1934 — DAN BARBILIAN.

Dar un punct PAPPUS este pe o dreaptă de încrucişare. Astfel :

$$(T)\quad \begin{matrix} p_0\left\{\begin{matrix} ab' , ba' \\ bc' , cb' \\ ca' , ac' \end{matrix}\right. & p_1\left\{\begin{matrix} ac' , bb' \\ ba' , cc' \\ cb' , aa' \end{matrix}\right. & p_2\left\{\begin{matrix} aa' , bc' \\ bb' , ca' \\ cc' , ab' \end{matrix}\right. \\ p_0'\left\{\begin{matrix} ac' , ba' \\ bb' , cc' \\ ca' , ab' \end{matrix}\right. & p_1'\left\{\begin{matrix} ab' , bc' \\ ba' , cb' \\ cc' , aa' \end{matrix}\right. & p_2'\left\{\begin{matrix} aa' , bb' \\ bc' , ca' \\ cb' , ac' \end{matrix}\right. \end{matrix}$$

tablou, care arată de exemplu că dreapta care uneşte punctele de intersecţie al dreptelor a, b' deoparte şi b, a' de cealaltă, trece prin p_0 etc.

In tabloul (T) este cuprinsă rezolvarea punctului 1° al problemei 3694. Pentru punctul 2° am spus că punctele p_0, p_1, p_2 sunt pe o dreaptă s, iar p_0', p_1', p_2' pe alta s'. Ceva mai mult, configuraţia lui PAPPUS dualã se bucură şi de proprietatea că dreptele s, s' taie dreapta ω, ω' în două puncte conjugate (loc. cit).

Deducem că dreptele s, s' au direcţii conjugate faţă de direcţiile paralelelor.

ION ILIE ŢIŢEICA
Student.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Buenos-Aires. Tomul CXXVI. No. 4. Octomvrie 1938.

Boletin Matematico, publicat de B. I. BAIDAFF. Buenos-Aires. Anul XI. Nr. 17. Noemvrie 1938. Un caz special de mişcare al unui solid, de S. SISPÁNOV. Distanţa între două puncte pe o dreaptă izotropă, de B. I. BAIDAFF.

Idem. Buenos-Aires. Anul XI. Nr. 18. Noemvrie 1938.

Idem. Buenos-Aires. Anul XI. Nr. 19. Decemvrie 1938. O rezolvare parametrică a ecuaţiei pitagorice $x^2 + y^2 = z^2$ şi aplicaţiuni la soluţiuni întregi, de B. I. BAIDAFF şi A. HEURTLEY DE LA RIESTA. O proprietate a curbelor închise JORDAN fără punct multiplu, de L. GUTIÉRREZ NOVOA. Primii zece ani, de B. I. BAIDAFF.

Idem. Buenos-Aires. Anul XI. Nr. 20. Decemvrie 1938.

Bulletin of the American Mathematical Society. Menasha, Wis, New-York. Volumul 44. Nr. 11. Noemvrie 1938.

Journal de Mathématiques Élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 63. Nr. 7. 1 Ianuarie 1939. Paris. Note asupra tetraedrului de V. THÉBAULT.

Idem. Anul 63. Nr. 8. 15 Ianuarie 1939. Paris.

Mathesis, publicată de AD. MINEUR. Tomul LII. Anul 1938. Nr. 9–10. Noemvrie-Decemvrie 1938. Gembloux. Paris.

Sumele patratelor numerelor quasi-ciclice de G. FISTIÉ. Asupra numerelor care se reproduc la dreapta, de puteri oarecare, (urmare) de G. LAMBERT. Asupra conicelor reale înscrise într'un patrulater real de R. DEAUX. Asupra segmentelor toriceliene de V. G. CAVALLARO. Asupra numerelor lui PITAGORA de V. THÉBAULT. Asupra primelor două centre de curbură ale parabolelor de indice oarecare de R. GOORMAGHTIGH.

Pitagora. Revistă de matematici. Anul IV. Nr. 3. Decemvrie 1939. Craiova. O generalizare a teoremei lui AUBERT de CEZAR COŞNIŢĂ.

Idem. Anul IV. Nr. 4. Ianuarie 1939. Craiova. Asupra unor arii de CEZAR COŞNIŢĂ. O teoremă relativă la patrulaterul strâmb de I. I. ŢIŢEICA. O problemă de analiză combinatoare de PAUL BENEŞ.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVIII. Nr. 11. Ianuarie 1939. Trigonometria patratică (urmare) de V. ALACI.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXIV. Nr. 4. Octomvrie—Decemvrie 1938. Iaşi.

Sphinx, revue mensuelle des questions récréatives, director M. KRAITCHIK. Anul IX. Nr. 1. Ianuarie 1939. Bruxelles.

Idem. Anul IX. Nr. 2. Februarie 1939. Bruxelles.

Saneamiento urbano en la República Argentina, de EVARISTO ARTAZO. Publicaţiunile facultăţii de ştiinţele fizico-matematice din La Plata. Nr. 117. Septemvrie 1938.

Contribucion al Estudio de las Ciencias Fisicas y Matematicas Vol. I. Fascicola 5. Septemvrie 1938. Publicaţiunile facultăţii de ştiinţe fizico-matematice din La Plata. Nr. 118. (Seria matematică).

G. G. CONSTANTINESCU. *Transformations genre* LAPLACE. (Extras din Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences. 1938).

MIRCEA N. IORGA. *Tratat de desen geometric.* Partea I. Noţiuni de geometrie plană. Bucureşti 1938.

CAIUS IACOB. *Conditions d'uniformité ou de multiformité dans le problème plan de* DIRICHLET. (Extras din *Mathematica*). Cluj 1939.

CAIUS IACOB. *Sur quelques conditions aux limites susceptibles de déterminer une fonction analytique.* (Extras din *Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences*). Bucureşti 1938.

CAIUS IACOB. *Sur le Coefficient de Contraction des jets gazeux.* (Extras din *Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences*). Bucureşti 1938.

CAIUS IACOB. *Sur le problème de* DIRICHLET *à deux dimensions.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*). Paris 1937.

CAIUS IACOB. *Sur la formation du potentiel complexe de l'écoulement plan d'un liquide dans un domaine multiplement connexe.* (Extras din *Comptes rendus de séances de l'Académie des Sciences*). Paris 1938.

V. VÂLCOVICI. *Sur les Théorèmes généraux du mouvements des systemes.* (Extras din *Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences*). Bucureşti 1938.

LOUIS BACHELIER. *La spéculation et le calcul des probabilités.* Gauthier Villars. Paris 1938.

In o broşură de 58 pagini, autorul arată starea actuală a aplicării calculului probabilităţilor la studiul speculaţiunii valorilor.

In Prefaţă, autorul afirmă că teoria speculaţiunii este astăzi o ştiinţă exactă cu mult superioară calculului probabilităţilor. Ea a introdus în acest calcul timpul şi continuitatea.

Autorul, începând cu teza sa de Doctorat, a publicat diverse lucrări în chestiunea speculaţiunii valorilor, printre care o carte interesantă *Le jeu, la chance et le hasard.*

Prin studiile sale a ajuns la ideia *probabilităţilor connexe* sau *în lanţ.*

Broşura are trei Capitole: *Legea probabilităţii, Operaţiunile de speculaţiune şi Mişcarea cursurilor într'un interval de timp determinat sau nu.*

Cartea este interesantă spre a se vedea până unde au pătruns matematicile în studiul operaţiunilor de bursă.

I. I.

CERERI

282. Ce termeni populari se întrebuinţează prin diferite părţi ale ţării pentru cuvintele *unghiu, triunghiu, dreptunghiu?*

Pe unde se zice la unghiu *corn,* la triunghiu *clin?*

I. I.

DIVERSE

a) Şedinţele Societăţii „Gazeta Matematică".

Joi 9 Februarie a fost convocată a doua adunare generală în localul societăţii.

D-l Prof. Ing. I. IONESCU a deschis şedinţa la ora 18^{30} schiţând pe scurt viaţa şi activitatea regretatului Profesor GH. ŢIŢEICA la « *Gazeta Matematică* ». La sfârşitul cuvântării sale D-l Prof. Ing. I. IONESCU a propus suspendarea lucrărilor adunării şi ridicarea şedinţei în semn de doliu.

b) Sporirea Bibliotecii.

PAUL SERRET. Géométrie de direction. Paris 1869.

Donată de D-l I. IONESSU, Inginer.

A. SCHOENFLIESS. La Géométrie du mouvement. Traduit pur CH. SPECKEL. Paris 1893.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1271. *Un fizician dispune de un curent de 220 volţi. La el în casă ard 20 lămpi normale de 110 volţi şi 16 lumânări, care consumă 3,4375 waţi de fiecare lumânare. Lămpile sunt legate paralel între ele şi în serie, cu laboratorul unde sau se încarcă o baterie de 4 acumulatori legaţi în serie, sau se excită o maşină dinamoelectrică pentru curent alternativ; în ambele cazuri fiind antecalate în laborator (legate în serie înainte) acelaşi număr de lămpi tot normale. Lămpile din casă ard cu lumina normală; acumulatorii sunt cu debit foarte mare, aşa că rezistenţa lor interioară se poate neglija. Fiecare celulă are nevoe de 2,5 volţi pentru a se încărca.*

Se cere în aceste condiţiuni să se găsească numărul lămpilor antecalate şi rezistenţa circuitului excitator.

M. SCHMIERER.

Numărul total de waţi al celor 20 lămpi a 16 lumânări fiind

$$20 \times 16 \times 3{,}4375$$

rezultă că intenzitatea I a circuitului este

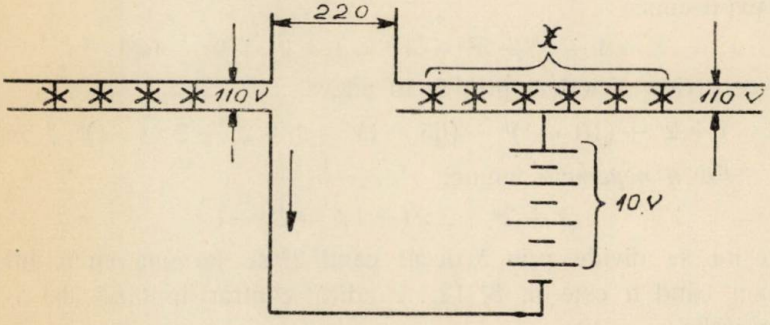
$$I = \frac{20 \times 16 \times 3{,}4375}{110} = 10 \text{ Amperi}$$

de unde rezultă că intensitatea în lampă este

$$i_{\text{lampa}} = \frac{10}{20} = 0{,}5 \text{ Amperi}$$

şi deci rezistenţa R în lampă

$$R_{\text{lampa}} = \frac{w}{i^2} = \frac{16 \times 3{,}4375}{0{,}25} = 220\,\Omega.$$



Voltajul în acumulatori fiind

$$4 \times 2{,}5 = 10 \text{ Volţi}$$

voltajul celor x lămpi antecalate în laborator va fi

$$110 - 10 = 100.$$

Acest voltaj fiind dat şi de formula

$$100^{\text{volt}} = 10^{\text{amp}} \times \frac{220^{\Omega}}{x}$$

se găseşte că numărul cerut, al lămpilor antecalate, este

$$x = \frac{220 \times 10}{100} = 22 \text{ lămpi.}$$

De aci se deduce rezistenţa R a circuitului excitator

$$R_{\text{excit.}} = \frac{220}{20} + \frac{220}{22} = 11^{\Omega} + 10^{\Omega} = 21\Omega.$$

S'a primit o soluţie analoagă dela D-l ANG. VASILESCU.

G-L GH. B.

PROBLEMA 2295. *Să se arate că expresiunea*

$$1+2^n+3^{2n}+4^{3n}+5^{4n}$$

nu se divide niciodată prin 5!.

A. ANASTASIU.

Proprietatea este evidentă căci 5! este pereche pe când expresiunea dată în enunț este nepereche.

Dacă semnul! este o greşală de tipar, atunci se poate arăta că expresiunea:

$$E=1+2^n+3^{2n}+4^{3n}=1+2^n+9^n+64^n$$

nu se divide niciodată prin 5. In adevăr:

$$E=1+2^n+(10-1)^n+(65-1)^n=1+2^n+2\times(-1)^n+5m.$$

Fie n nepereche, atunci

$$1+2^n+2\times(-1)^n=2^n-1$$

care nu se divide prin 5 decât când 2^n se termină cu 6, adică atunci când n este 4, 8, 12,... adică contrar ipotezei de a fi nepereche.

Fie n pereche. In acest caz

$$1+2^n+2\times(-1)^n=3+2^n$$

care se divide prin 5 când 2^n se termină cu 2 adică atunci când n este un număr din şirul 1, 5, 9, 13,... ceea ce este contra ipotezei ca n să fie pereche.

In concluzie expresiunea dată nu este multiplu de 5.

Au rezolvat problema, D-nii: G. ALDEA, V. ANASTASIE, A. ARNOLD, R. BELIAN, E BIERNAKI, A. BRENER, C. BRUMĂRESCU, A. BUCUR, C. BULGĂREANU, N. BUTU, C. CALMUSCHI, I. CARNABEL, V. CERNAT, M. CHARUS, H. CIOCANU F. COHN, GH. GH. CONSTANTINESCU, H. CUŞUTA, M. DAVIDESCU, I. DAVIDSOHN, TR. DINULESCU, GH. I. DUMITRESCU, A. DUMITRIU, I. FRANK, E. GEORGESCU, G. S. GEORGESCU, C. I. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, ST. GHIOLU, E. GRIGORESCU, S. GRÜNBERG, P. IONESCU, E. ISTRATE, A. JUSTER, E. S. KAUFMANN, S. KAUFMANN, D. LĂZĂRESCU, I. M. LĂZĂRESCU, I. G. LINTEŞ, A. LITEANU, D. LITEANU, L. LUCA, CR. MATEESCU, N. MAXIM, P. MELAS, AL. MIRESCU, C. MITESCU, ST. NEGOESCU, V. NEGULESCU, V. NEICU, D. I. NICOLAESCU, C. NICOLAU, GH. NICULESCU, ST. NICULESCU, G. OLTEANU, AL. PANTAZI, I. PANTOLEON. E. PAPAFIL, G. PĂUN, V. PINTILESCU, TH. PIRTEA, A. POPESCU, N. POPP, A. REINHORN, G. ROSENBERG, T. ROŞU, H. ŞAPIRA, D. SBURLAN, O. ŞERBĂNESCU, E. STIHI, L. TRESTIAN, N. TRESTIAN, AL. TRIANDAFIL, I. VELESCU, M. VERGULESCU, C. VIŞOIANU, A. VLĂDESCU şi C. ZOTTA.

Problema 2295 a fost propusă la pag. 461, Vol. XX, adică acum peste 24 de ani. Aşa se explică numele ce se întâlnesc printre rezolvitori, nume care se găsesc anunţate pe copertele Vol. XXI, XXII, XXIII şi XXIV, afară de D-l GH. GH. CONSTANTINESCU, care este anunţat pe coperta Vol. XLIII.

G-L GH. B.

PROBLEMA 3554. *Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu oarecare avem relaţia:*

$$\operatorname{cotg}^3A\operatorname{cotg}^3B+\operatorname{cotg}^3B\operatorname{cotg}^3C+\operatorname{cotg}^3C\operatorname{cotg}^3A=$$
$$1+3\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C[\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C$$
$$-(\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C)].$$

EMIL ŞTEFĂNESCU.

Soluţia I-a dată de D-nii: T. G. BACIU, GH. M. CĂLIN, ED. CAŢICHI, C. V. COSTĂCHESCU, CEZAR COŞNIŢĂ, HR. DĂSCĂLESCU, TH. V. DIACONESCU, ULPIU M. FLORESCU, † B. V. GATAIANŢU, AL. A. GHEORGHIU, GH. T. GHEORGHIU, P. I. GHIŞOIU, D. IOVĂNESCU, FELIX IOVĂNESCU, M. MARGULIUS, I. Z. PANŢU, ST. D. POPESCU, V. C. POPESCU, M. C. RĂDULESCU, I. O. ZAHARIA.

Ridicând la cub identitatea

$$(1)\quad \operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C+\operatorname{cotg}C\operatorname{cotg}A=1$$

şi grupând termenii, avem

$$(2)\quad \operatorname{cotg}^3A\operatorname{cotg}^3B+\operatorname{cotg}^3B\operatorname{cotg}^3C+\operatorname{cotg}^3C\operatorname{cotg}^3A=$$
$$1-3\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C(\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}^2B+\operatorname{cotg}^2A\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}^2B\operatorname{cotg}C$$
$$+\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}^2C+\operatorname{cotg}^2A\operatorname{cotg}C+\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}^2C+2\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C).$$

Adăugând şi scăzând în paranteză produsul $\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C$, paranteza devine:

$$(\operatorname{cotg}A\sum\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}B\sum\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B$$
$$+\operatorname{cotg}C\sum\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B-\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C).$$

Ţinând seamă de identitatea (1), valoarea parantezei este

$$\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C-\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C$$

şi introducând-o în (2), prin schimbare de semn, obţinem

$$\Sigma \operatorname{cotg}^3 A \operatorname{cotg}^3 B = 1 + 3 \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C$$
$$[\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C - (\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)];$$

relaţia din enunţ.

Soluţia II-a dată de D-nii: AURELIAN I. STAN, GH. I. BALABAN, C. ISTINIE-BREZUICA, N. I. DINULESCU, EUG. IACOB, OCT. S. IANCULESCU şi J. N. VÂLCEANU.

Dacă în identitatea

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

facem

$$x = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \quad ; \quad y = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C \quad ; \quad z = \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} A$$

avem

$$\Sigma \operatorname{cotg}^3 A \operatorname{cotg}^3 B = (\Sigma \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B)^3 - 3\Pi \operatorname{cotg} A \, \Pi (\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B).$$

Dar

$$\Sigma \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B = 1 \quad \text{şi} \quad \Pi (\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B) = \Pi \operatorname{cosec} A;$$

iar

$$\Pi \operatorname{cosec} A = \Sigma \operatorname{cotg} A - \Pi \operatorname{cotg} A.$$

(C. P. Trig. Goniometrie. X. 12).

Prin urmare

$$\Sigma \operatorname{cotg}^3 A \operatorname{cotg}^3 B = 1 + 3\Pi \operatorname{cotg} A (\Pi \operatorname{cotg} A - \Sigma \operatorname{cotg} A).$$

c. c. t. d.

Soluţia III-a dată de D-nii: AL. V. ROŞCULEŢ şi G. G. CONSTANTINESCU.

Folosim identitatea

$$\Sigma x^3 y^3 = (\Sigma xy)^3 - 3xyz(2xyz + xy^2 + y^2 z + x^2 y + x^2 z + z^2 x + z^2 y)$$

care se poate scrie succesiv sub formele:

$$\Sigma x^3 y^3 = (\Sigma xy)^3 - 3xyz[xyz + y^2(x + z)$$
$$+ xyz + x^2(y + z) + xyz + z^2(x + y) - xyz];$$

$$\Sigma x^3 y^3 = (\Sigma xy)^3 - 3xyz[y\Sigma xy + x\Sigma xy + z\Sigma xy - xyz];$$

$$\Sigma x^3 y^3 = (\Sigma xy)^3 + 3xyz[xyz - (x + y + z)\Sigma xy].$$

Făcând

$$x = \text{cotg}A \quad , \quad y = \text{cotg}B \quad , \quad z = \text{cotg}C$$

şi ţinând seamă că în acest caz, avem:

$$\Sigma xy = 1,$$

obţinem relaţia din enunţ.

Notă. 1. *Alte Soluţii* s'au primit dela D-nii: EMIL ALBEAŢĂ, V. GR. DĂNCIULESCU, G. GRUBERMAN, H. IONESCU-BISS, I. C. NICOLAU-DOBRIDOR, AL. AL. ROŞU şi I. G. ZAMFIRESCU.

2. *Relaţii similare:*

$$\Sigma \text{cotg}^3 mA \, \text{cotg}^3 mB = 1 + 3\Pi \, \text{cotg}mA \, (\Pi \, \text{cotg}mA - \Sigma mA)$$

[GR. MAREŞ şi I. C. NICOLAU-DOBRIDOR].

$$\Sigma \text{tg}^3 \tfrac{1}{2}A \, \text{tg}^3 \tfrac{1}{2}B = 1 + 3\Pi \, \text{tg}\tfrac{1}{2}A \, (\Pi \, \text{tg}\tfrac{1}{2}A - \Sigma \text{tg}\tfrac{1}{2}A)$$

[GH. BALABAN, AURELIAN STAN, F. IOVĂNESCU şi CEZAR COŞNIŢĂ].

3. *Celelalte soluţii* primite şi anunţate pe copertă, au prezentat mari erori.

GENERAL GH. I. LITEANU.

PROBLEMA 4240. *Se dau două sfere, una de aur şi alta dintr'un aliaj mai uşor, care imită perfect aurul (cupro-aluminium), ambele având aceeaşi mărime şi aceeaşi greutate, putând fi şi goale în interior. Cum s'ar putea deosebi sfera de aur de cealaltă de aliaj, utilizând numai o cale mecanică?*

CĂPITAN I. LINTEŞ.

Fie I_1 momentul de inerţie al sferei de aur, R raza exterioară şi r_1 raza interioară şi fie I_2, R şi r_2 aceleaşi pentru sfera care imită aurul. Dacă M este massa unei sfere, atunci avem:

$$I_1 = \frac{2}{5} \cdot M \cdot \frac{R^5 - r_1^5}{R^3 - r_1^3}$$

$$I_2 = \frac{2}{5} \cdot M \cdot \frac{R^5 - r_2^5}{R^3 - r_2^3}.$$

Dar sfera de aur având o densitate mai mare, urmează că

$$r_1 > r_2.$$

Observăm apoi că:

$$\frac{R^5 - r_1^5}{R^3 - r_1^3} > \frac{R^5 - r_2^5}{R^3 - r_2^3}.$$

Căci avem succesiv:

$$(R^5 - r_1^5)(R^3 - r_2^3) > (R^3 - r_1^3)(R^5 - r_2^5)$$

sau simplificând cu $(R - r_1)$ şi $(R - r_2)$ şi făcând calculele, apoi reducerile respective, obţinem:

$$R^3(r_1^3 - r_2^3) + R^2(r_1^4 - r_2^4) + R^2 r_1 r_2 (r_1^2 - r_2^2)$$
$$+ R r_1 r_2 (r_1^3 - r_2^3) + R r_1^2 r_2^2 (r_1 - r_2) + r_1^2 r_2^2 (r_1^2 - r_2^2) > 0$$

deoarece fiecare termen este mai mare ca zero.

In consecinţă vom avea şi:

$$I_1 > I_2 .$$

1. Dacă aşezăm acum cele două sfere pe o suprafaţă plană şi le făcem vânt cu o linie ambelor deodată, dând un acelaşi impuls fiecărei sfere, ele se vor rostogoli „de-a dura", căpătând o aceeaşi viteză de rotaţie $\left(\frac{dw}{dt}\right)$. Atunci forţele de inerţie ale acelor două sfere vor fi:

$$F_1 = I_1 \cdot \frac{dw}{dt} \quad \text{şi} \quad F_2 = I_2 \cdot \frac{dw}{dt} .$$

Dar se vede lesne că $F_1 > F_2$, prin urmare sfera de aur se va rostogoli mai mult (mai departe), decât sfera care imită aurul.

2. Operaţiunea mecanică se poate face lăsând sferele pe rând să se rostogolească pe un acelaş plan (jghiab) înclinat, pe rând, vom constata că sfera de aur merge „de-a dura" mai departe.

3. In sfârşit, dacă prindem, pe rând sferele, într'un sistem mecanic (un căluş, sau cleşte) astfel încât să materializăm un ax ce ar trece prin centrul lor, şi dacă producem aceeaşi rotaţie în jurul axului, atunci sfera de aur se va învârti mai mult.

In general deci orice soluţie mecanică, capabilă a pune în evidenţă proprietăţile momentelor de inerţie, este valabilă problemei de faţă.

O astfel de problemă face parte, în Mecanică, din teoria determinărei „volantu-lui" la maşini cu abur sau la motori cu combustiune internă.

Cpt. Comandor I. Linteş.

PROBLEMA 4420. *Să se arate că* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *fiind numere reale, avem inegalitatea*

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n}{a_i} \right| > 1.$$

Dacă n *este oarecare, limita inferioară 1 nu se poate înlocui cu nici un alt număr mai mare.*

TIBERIU POPOVICIU.

Soluția. Să notăm cu E_n expresia din membrul întâi și fie E_n^* marginea inferioară sau minimul lui E_n,

$$E_n^* = \min E_n .$$

Totul revine la a determina numărul E_n^*. Problema va fi rezolvată dacă arătăm că $E_n^* > 1$ pentru orice n și

$$\lim E_n^* = 1,$$

când numărul natural n ia toate valorile posibile. Va rezulta de altfel, mai precis, că

$$E_2^* = E_3^* > \ldots > E_n^* > \ldots$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} E_n^* = 1.$$

Pentru $n = 2$, $E_n = \left| \frac{a_2}{a_1} \right| + \left| \frac{a_1}{a_2} \right|$ și $E_2^* = 2$, care are loc pentru $|a_1| = |a_2|$.

Să presupunem $n > 2$. Dacă $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$, avem $E_n = n$, deci $E_n^* \leqq n$. Să presupunem acum că

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s = 0.$$

Putem atunci pune

$$x_i = \frac{a_i}{s} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

și expresia devine

$$(1) \qquad E_n = \sum_{i=1}^{n} \left| 1 - \frac{1}{x_i} \right| .$$

Trebue acum să determinăm minimul acestei expresii în ipoteza că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt n numere reale legate prin relaţia

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1. \tag{2}$$

Observăm întâi că pentru minimum este destul să presupunem că numerile x_i nu devin prea mici în valoare absolută. Intr'adevăr putem exclude valorile lui x_i pentru care $E_n > n$ deci cu atât mai mult acelea pentru care $\left|1 - \frac{1}{x_i}\right| > n$. Putem dar exclude valorile lui x_i pentru care $-\frac{1}{n-1} < x_i < \frac{1}{n+1}$. In particular, e deci destul să examinăm minimul lui (1) când x_i sunt diferiţi de zero.

Vom distinge acum trei cazuri:

I. Toate numerile x_i sunt pozitive. Trebue atunci ca $x_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Aplicând proprietatea că media aritmetică a n numere e cel puţin egală cu media lor armonică avem, în acest caz,

$$E_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} - n \geqq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i} - n = n(n-1).$$

II. Unul din numerile x_i este negativ şi celelalte sunt pozitive. Să presupunem că $x_n < 0$, $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Să punem $x_n = -z$, putem scrie

$$E = 1 + \frac{1}{z} + \sum_{i=1}^{n-1} \left|1 - \frac{1}{x_i}\right|, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = 1 + z. \tag{3}$$

Pentru a merge mai departe, să căutăm minimul expresiei (3). Deosebim aici trei subcazuri:

II_1. $x_i \leqq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. In acest caz $z \leqq n-2$ şi

$$E_n = 1 + \frac{1}{z} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} - (n-1) \geqq 1 + \frac{1}{z} + \frac{(n-1)^2}{1+z} - (n-1)$$

$$= \frac{n-1}{n-2} + (n-2-z)\left(\frac{1}{(n-2)z} + \frac{n-1}{1+z}\right).$$

Rezultă $E_n \geqq \frac{n-1}{n-2}$, egalitatea nefiind atinsă decât pentru

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 1 \quad , \quad z = n-2.$$

II_2. Unul din numerile x_i, de ex. x_1 este > 1 şi celelalte $\leqq 1$. Aici iarăşi se pot întâmpla două cazuri:

II_2'. $x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = 1$, $z > n-2$, atunci

$$E_n = 2 + \frac{1}{z} - \frac{1}{z-n+3} = \frac{n-1}{n-2} + \frac{(n-3)(1+z)(z-n+2)}{(n-2)\,z\,(z-n+3)},$$

deci tot $E_n \geqq \frac{n-1}{n-2}$, egalitatea având loc ca şi mai înainte.

II_2''. Printre numerile $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ există câteva mai mici decât 1. Să presupunem $x_2 < 1$. Dacă atunci înlocuim pe x_1, x_2 respectiv cu $x_1' = x_1 - \rho$, $x_2' = x_2 + \rho$, ρ fiind un număr pozitiv destul de mic, avem:

$$\left|1 - \frac{1}{x_1}\right| + \left|1 - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} = \left|1 - \frac{1}{x'}\right| + \left|1 - \frac{1}{x'}\right|$$

şi

$$x_1' + x_2' + x_3 + \ldots + x_{n-1} = 1 + z.$$

Se vede uşor că putem mări pe ρ până ce unul din numerile x_1', x_2' devine egal cu 1. Repetând acest lucru de un număr suficient de ori se vede că tot micşorând pe E_n cădem peste cazul II_2' sau peste cazul II_1.

II_3. Cel puţin două din numerile x_i sunt > 1. Să presupunem că $x_1 \geqq x_2 > 1$. Dacă înlocuim pe x_1, x_2, cu $x_1' = x_1 + x_2 - 1$, $x_2' = 1$, avem:

$$\left|1 - \frac{1}{x_1}\right| + \left|1 - \frac{1}{x_2}\right| = 2 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} > 2 - 1 - \frac{1}{x_1 + x_2 - 1}$$

$$= \left|1 - \frac{1}{x_1'}\right| + \left|1 - \frac{1}{x_2'}\right|$$

$$x_1' + x_2' + x_3 + \ldots + x_{n-1} = 1 + z.$$

Se vede dar că micşorând pe E_n revenim la cazul II_2.

III. Două cel puţin din numerile x sunt negative. Dacă $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ avem:

$$\left|1 - \frac{1}{x_1}\right| + \left|1 - \frac{1}{x_2}\right| > 2, \text{ deci } E_n > 2.$$

Din analiza precedentă rezultă că minimul lui E_n este egal cu $E_n^* = \frac{n-1}{n-2}$ pentru $n > 2$ şi acest minimum e atins numai dacă $n-1$ din numerile x_i sunt egale cu 1.

La această problemă s'a primit o soluţie complet greşită.

T. P.

PROBLEMA 4498. *Locul centrelor conicelor care au un contact de ordin 3 cu o conică fixă, într'un punct dat al ei, este diametrul acelui punct.*

(Enunţ rectificat).

LT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

I°. *Soluţie geometrică.*

Fie M un punct al unei conici fixe (C). Conicele (C_3) având un contact de ordin 3 cu (C), au comune cu aceasta 4 puncte confundate şi formează un *fascicol punctual.* Conicele acestui fascicol determină pe o dreaptă (D) din plan o involuţie, care are ca puncte duble, punctele N şi P.

Punctul N este punctul de contact al conicei (C_3) cu (D), iar P este intersecţia lui (D) cu tangenta în M la conica (C).

Locul polilor dreptei (D) faţă de conicele (C_3) este *dreapta* MN, deoarece punctele N şi P sunt conjugate faţă de toate conicele (C_3), iar M este propiul său conjugat. Această dreaptă este şi polara lui P.

Dacă acum dreapta (D) este aruncată la infinit, proprietatea de mai sus devine tocmai teorema din enunţ.

ION ILIE ŢIŢEICA
(Mănăstirea Dealului)

II°. *Soluţie analitică.*

Luând ca axe tangenta şi normala în M la conica (C), ecuaţiile conicelor (C) şi (C_3) se scriu:

$$(C) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2y = 0$$

$$(C_3) \qquad ax^2 + 2bxy + (c + \lambda)\, y^2 = 0.$$

Ecuaţiile ce determină centrul conicei (C_3) sunt:

$$^1/_2\, f'_x \equiv ax + by = 0$$

$$^1/_2\, f'_y \equiv bx + (c + \lambda)\, y + 1 = 0.$$

Locul centrelor este deci dreapta $ax + by = 0$, adică diametrul lui M în conica (C).

ION ILIE ŢIŢEICA
Student

III°. *Generalizare* *).

Dacă considerăm o curbă plană (C), ale cărei prime trei raze de curbură într'un punct dat O sunt R_1, R_2, R_3, cele trei conici având cu curba (C) un contact de ordinul 2, 3 sau 4 în punctul O, sunt:

$$(C_2) \qquad y - \frac{x^2}{2R_1} + \lambda xy + \mu y^2 = 0$$

$$(C_3) \qquad 3R_1x^2 - 2R_2xy - 6R_1^2 y + \lambda y^2 = 0$$

$$(C_4) \qquad 3R_1x^2 - 2R_2xy - 6R_1^2 y - \frac{3R_3R_1 - 5R_2^2}{3R_1} y^2 = 0.$$

Sistemul de axe fiind tangenta şi normala în O.

Sunt interesante proprietăţile acestor conici. Amintesc câteva:

1°. Conicele (C_2) formează o *reţea* având drept conici de bază: *parabola* tangentă în O curbei (C) şi având focarul în mijlocul primei raze de curbură;

1°. TRANSON. Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces (J. M. Appliqués t. VI).

2°. F. TISSERAND. Recueil complémentaire d'exercises sur le calcul infinitésimal 2e, ed. p. 66.

3°. M. D'OCAGNE. Sur les coniques qui ont avec une courbe donnée, en un de ses points, un contact d'ordre supérieur (Nouvelles Annales de Math. 3e, t. XVI 1897 p. 252).

4°. M. NICULESCU. Proprietăţi ale curbelor plane (G. M. t. 31, p. 287).

5°. T. POPOVICIU. Asupra curbelor plane (G. M. t. 41 p. 613).

6°. N. ABRAMESCU. Sur l'étude d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points et une nouvelle interprétation de la cubique donnant les tangentes de DARBOUX et LÈGRE (Mathematica t. 12 p. 217—226).

Cercul osculator în O şi *hiperbola equilateră* ce trece prin O şi are focarul în primul centru de curbură.

2°. Conicele (C_3) formează un *fascicol punctual,* care are drept conici de bază: *hiperbola* (H) tangentă în O curbei (C), având centrul pe *normala afină* în punctul O şi o asimptotă paralelă cu normala ordinară în O şi a doua conică, tangenta dublă în O.

Hiperbola (H) este omologică cu conicele (C_3), având drept centru de omologie O, iar ca axă tangenta OT.

Cum ecuaţia conicelor (C_3), arată că locul centrelor acestor conice este dreapta $3R_1x - R^2y = 0$, adică normala afină a curbei, putem enunţa:

Locul centrelor conicelor având un contact de ordin 3 cu o curbă dată într'un punct al ei, este normala afină a curbei în punctul de contact. Această normală este diametru în toate conicele (C_3).

Am generalizat proprietatea din enunţ.

Bazaţi pe omologia conicelor (C_3) cu hiperbola (H), putem avea o construcţie foarte simplă a acestor conice.

Printre conicele (C_3) se găseşte *parabola osculatrice* curbei (C) în O, care va avea *axa, paralelă cu normala afină.*

3°. Conica (C_4) este *conica osculatoare* curbei (C) în O. Ea face parte din fascicolul (C_3).

Câteva construcţii în jurul conicelor ($C_{2,3,4}$) am studiat într'un articol.

CPT. M. I. F.

PROBLEMA 4655. *O paralelă la latura* BC *a triunghiului* ABC *taie laturile* AC *şi* AB *în* E *şi* F. A', B', C' *fiind mijloacele laturilor triunghiului* ABC, *centrul radical al cercurilor* ABC, BB'E *şi* CC'F *este aşezat pe mediana* AA'.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie. Să considerăm mai general că dreapta B'C' nu este dreapta mijloacelor laturilor AC, AB ci o paralelă fixă oarecare, la BC. Vom determina locul centrului radical al cercurilor (ABC), (BB'E), (CC'F), când EF variază. Fie Δ_b, Δ_c axele radicale ale lui

(ABC) respectiv cu (BB'E) şi (CC'F). Când EF variază, dreptele Δ_b şi Δ_c *descriu două fascicole omografice* de vârfuri B, C, deoarece unei drepte Δ_b îi corespunde o singură dreaptă Δ_c, ce se obţine prin construcţii care necesită numai rigla şi compasul — şi reciproc. In adevăr, fie dată o dreaptă Δ_b, care taie cercul (ABC) în B_1. Cercul $(BB'B_1)$ taie a doua oară pe AC în E. Paralela din E la BC determină pe F. A doua intersecţie a cercurilor (CC'F), (ABC) este C_1. Dreapta CC_1 este Δ_c. Când $\Delta_b \equiv BC$, avem şi $\Delta_c \equiv BC$, iar când $\Delta_b \equiv BA$, avem $\Delta_c \equiv CA$. Rezultă că locul centrului radical considerat, recte intersecţia dreptelor Δ_b, Δ_c este *o dreaptă ce trece prin* A. Să vedem un alt punct al dreptei loc geometric.

Dacă EF se confundă cu B'C', cercurile (BB'E), (CC'F) devin tangente în B'C' respectiv la AC, AB. Conform teoremei lui STEINER, dreptele Δ_b, Δ_c se confundă cu dreptele BB'', CC'' — unde punctele B'', C'' sunt (primul pe AC, al doilea pe BC) definite de rapoartele

$$\frac{B''C}{B''A} = \frac{\overline{B'C}^2}{\overline{B'A}^2} \quad , \quad \frac{C''B}{C''A} = \frac{\overline{C'B}^2}{\overline{C'A}^2}$$

deoarece B'C' e paralelă cu BC, rezultă din aceste rapoarte că şi B''C'' e paralelă cu BC, ceea ce arată apoi imediat că punctul (BB'', CC'') este pe mediana AA'.

Prin urmare, locul geometric al centrului radical al cercurilor (ABC), (BB'E), CC'F) este mediana din A, când EF variază.

ILIE IOAN ŢIŢEICA
Liceul „M-rea Dealu".

Observare.

1°. Să notăm cu M intersecţia cu AC a axei radicale a cercurilor ABC, BB'E. Se ştie (teorema STEINER), că dacă o dreaptă AC taie două cercuri şi axul lor radical BM în punctele A, C, E, E', M avem relaţia

$$\frac{MA}{MC} = \frac{EA}{EC} \cdot \frac{B'A}{B'C}$$

analog, dacă N este intersecţia cu AB a axei radicale CN a cercurilor ABC, CFF' avem

$$\frac{NA}{NB} = \frac{FA}{FC} \cdot \frac{C'A}{C'B}$$

dar, prin enunţ, B'C' şi EF sunt paralele cu BC, adică

$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{C'A}{C'B} \quad \text{şi} \quad \frac{EA}{EC} = \frac{FA}{FC}$$

rezultă

$$\frac{MA}{MC} = \frac{NA}{NB}$$

deci MN este paralelă cu BC. Atunci centrul radical al celor trei cercuri din enunţ, care este intersecţia dreptelor BM şi CN, este situat pe mediana din A.

2°. Un bun corespondent, a încercat o soluţie directă ca la 1°. După ce observă relaţiile

$$MA \cdot MC = MB' \cdot ME$$

$$NA \cdot NB = NC' \cdot NF$$

le împarte între ele şi ajunge la o relaţie pe care o numeşte reciproca teoremei THALES generalizată (?) şi scoate concluzia.

Totuşi, o soluţie se poate obţine pe această cale.

Din

$$MA \cdot MC = MB' \cdot ME \quad \text{şi analoaga}$$

se poate deduce uşor

$$MA = \frac{AE \cdot AB'}{AE - CB'}, \quad NA = \frac{AF \cdot AC'}{AF - BC'}$$

şi acum se poate folosi teorema THALES, căci fie k raportul a două segmente omoloage, adică

$$AF = k \cdot AE \; ; \quad AC' = k \cdot AB' \; ; \quad BC' = k \cdot CB'$$

rezultă şi $\frac{NA}{MA} = k$, deci MN paralelă cu BC, etc.

3°. S'a mai primit două soluţii geometrice, fundamental greşite dela un bun şi harnic corespondent care a găsit metoda de a demonstra orice cu ajutorul rapoartelor anarmonice. Nu m'aş fi oprit asupra acestor soluţii naive, dacă n'aş fi văzut trecând zeci de probleme rezolvate în acelaşi gen, pe la redacţie, de altfel impecabile ca prezentare şi cu figurile desemnate cu foarte multă grijă.

4°. D-l ALEXANDRU N. POPESCU-ZORICA (Bucureşti) trimite o foarte bună soluţie analitică. Dar cea mai bună soluţie, care convine problemei, este *calculul baricentric*, aşa cum face D-l VIRGIL ECKSTEIN în soluţia d-sale. Vom aminti că ecuaţia unui cerc, în coordonate baricentrice este

$$\frac{F}{\delta} = f$$

unde $f = l\alpha + m\beta + n\gamma$ însemnând l, m, n puterile vârfurilor A, B, C la acest cerc şi $F : \delta$ o constantă depinzând de laturile triunghiului.

Axul radical a două cercuri

$$\frac{F}{\delta} = f \quad \text{şi} \quad \frac{F}{\delta} = f'$$

este $f - f' = 0$ şi când unul din cercuri este cercul circumscris de ecuaţie $F = 0$, axa radicală în un cerc oarecare se reduce la $f = 0$.

Pentru cercul BB'E avem

$$l = AB' \cdot AE \; ; \; m = 0 \; ; \; n = CB' \cdot CE$$

deci ecuaţia

$$AB' \cdot AE \cdot \alpha + CB' \cdot CF \cdot \gamma = 0$$

şi a cercului CC'F

$$AC' \cdot AF \cdot \alpha + BC' \cdot BF \cdot \beta = 0$$

dar

$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{AF}{AE} = \frac{BC'}{CB'} = \frac{BF}{CE}$$

şi ecuaţia a doua comparată ca prima dă $\beta = \gamma$, deci punctul de intersecţie a axelor radicale, care este centrul radical căutat, se află pe mediana din A, de ecuaţie $\beta = \gamma$.

Dacă axa radicală ce trece prin B are o ecuaţie de forma

$$(\Delta_b) \qquad \gamma + m\alpha = 0$$

se vede din desvoltarea precedentă, că axa ce trece prin C, va fi

$$(\Delta_c) \qquad \beta = m\alpha = 0$$

deci o strânsă legătură între ele şi numeroase consecinţe :

a) dacă $m = 0$, la $(\Delta_b) \equiv \gamma = 0$ deci $\Delta_b \equiv AB$ corespunde $(\Delta_c) \equiv \beta = 0$ deci $\Delta_c \equiv AC$.

b) dacă $m = \infty$, la $(\Delta_b) \equiv \alpha = 0$ sau $\Delta_b \equiv BC$ corespunde $\Delta_c \equiv BC$.

c) la $m = -1$, deci Δ_b suprapusă pe mediana din B, corespunde Δ_c peste mediana din C.

d) la $m = 1$, deci Δ_b paralelă cu AC corespunde Δ_c paralelă cu AB.

e) la $m = \frac{1}{2}$, deci Δ_b paralelă cu mediana AA', Δ_b şi Δ_c sunt paralele.

5°. De altfel, problema se mai poate enunţa şi astfel: *fie* B_1 *un punct oarecare pe cercul circumscris triunghiului* ABC. *Un cerc* (C) *arbitrar dus prin* B *şi* B_1 *taie latura* AC *în* B' *şi* E. *Paralelele din* B' *şi din* E *la* BC *taie pe* AB *în* C' *şi* F. *Cercul* CC'F *retaie cercul* ABC *într'un punct* C_1, *fix, oricare ar fi cercul* (C). *Aceasta face să corespundă unui punct* B_1, *un punct* C_1, *de ex : dacă* BB_1 *este mediană, ori paralelă cu* AC *ori* AA', *reciproc.* CC_1 *este mediană, ori paralelă cu* AB *ori cu* AA'.

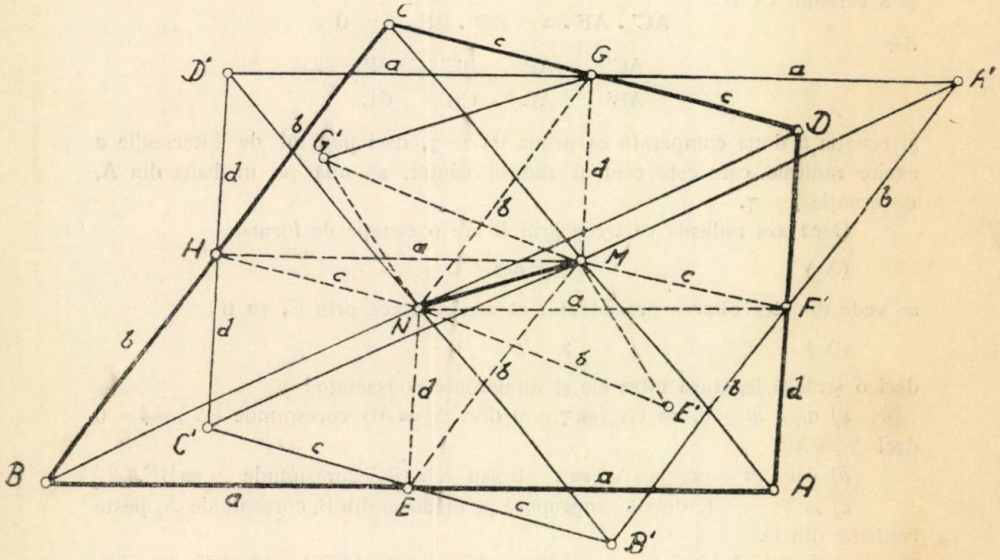
Sau şi enunţul particular : *fie* α *punctul unde mediana* AA' *a triunghiului* ABC *retaie cercul circumscris. Cercul ce trece prin* B *şi* α *şi tangent la* AC, *o atinge în* B', *paralela din* B' *la* BC *taie pe* AB *în* C'. *Cercul ce trece prin* C *şi e tangent în* C' *la* AB *trece prin* α.

6°. O altă soluţie a problemei 4655 este dată în articolul „*Propoziţii de Geometria Triunghiului*„ G. M., XLIII—525.

PROBLEMA 4773. *Să se construiască un patrulater oarecare cunoscând lungimile laturilor şi a segmentului care uneşte mijloacele diagonalelor.*

GH. POPESCU-BOTOŞANI.

Fie ABCD patrulaterul cerut, iar E, F, G, H, M, N mijloacele laturilor şi a diagonalelor AC, BD. Notez cu $2a$, $2b$, $2c$, $2d$ lungimile laturilor AB, BC, CD, DA şi cu $2e$ lungimea segmentului MN.



Se vede pe figură că HN, MF sunt egale şi paralele, ca fiind egale cu jumătate din latura AB şi paralele cu ea. Pentru motiv analog HM este egală şi paralelă cu FN.

Figura HNFM este un paralelogram cu laturile egale cu a şi c şi cu o diagonală egală cu $2c$. La fel figura ENGM este un paralelogram cu laturile egale cu b şi d. De aici construcţia: Pe MN ca diagonală se construesc două paralelograme, unul ca HNFM şi altul cu ENGM. Din H şi F se duc paralele la GM şi NG, iar din E şi N se duc paralele la HN şi HM. Prin intersecţiile acestor drepte se obţine patrulaterul ABCD.

Problema necesită o discuţie căci, nu are soluţie unică şi nici nu este totdeauna posibilă. Presupun, ca în cazul figurei, $d < c < a < b$.

Presupun construite, ca în figură, triunghiurile MGN şi MHN având laturile b, d, $2e$ şi a, c, $2e$. Pentru construcţia patrulaterului ABCD am dus din H paralelă la NG şi prin F paralelă la MG şi am completat paralelogramul HCGN şi FDGM.

Ducând prin H şi F paralele la MG şi NG şi completând paralelogramele HD'GM, FA'GN se obţine patrulaterul A'B'C'D' egal cu ABCD dar având altă poziţie. Dacă se consideră punctul G', simetricul lui G faţă de perpendiculara pe mijlocul lui MN şi se completează paralelogramul MG'NE' vom obţine *două* noi patrulatere egale cu ABCD şi având mijloacele laturilor şi ale diagonalelor în H, G', F, E', M, N. In fine considerând simetricul lui H faţă de perpendiculara pe mijlocul lui MN şi asociindu-l cu G şi apoi cu G' se găsesc încă patru soluţiuni de poziţie. *Deci dacă problema are o soluţiune* ABCD, *din aceasta se mai deduc încă 7 noi soluţiuni de poziţie.*

Pentru ca problema să fie posibilă trebue ca triunghiurile MGN, MHN să se poată construi, adică trebue să avem simultan

$$b - d < 2e < b + d \quad \text{şi} \quad a - c < 2d < a + c.$$

Combinând între ele în toate felurile posibile două câte două lungimile a, b, c, d şi asociindu-le cu $2d$ se pot construi 6 triunghiuri MGN şi MHN care să aibă baza MN comună, iar celelalte două laturi să fie

(a, b) cu (c, d) ; (a, c) cu (b, d) ; (a, d) cu (b, c)

(b, c) cu (a, d) ; (b, d) cu (a, c) ; (c, d) cu (a, b).

Ultimele 3 grupe fiind identice cu primele trei vom avea trei triunghiuri MGN şi trei triunghiuri MHN diferite între ele. La fiecare grup de triunghiuri fiind 8 soluţiuni de poziţie se conchide că *problema poate avea trei soluţiuni distincte fiecare cu câte opt soluţiuni de poziţie.*

Se mai obţin încă soluţiuni de poziţie considerând şi simetricele lui G, G', ... faţă cu MN.

Acest număr maxim de soluţiuni are loc când $2e$ este mai mic decât cea mai mare din sumele $a + b$, $a + c$, ..., $c + d$ şi mai mare decât cea mai mică din diferenţe ca $a - b$, $b - a$, $a - c$,

$c - a, \ldots$ etc. —, în caz contrar numărul soluțiunilor se restrânge la numărul posibil al neegalităților de forma

$$a_m - a_n < 2e < a_i + a_k$$

în care am notat cu a_g laturile a, b, c, d.

Notă. 1°. D-l V. ECKSTEIN (Elev inginer) a dat o *foarte bună* soluție vectorială și a făcut discuția completă și exactă. Dacă O este o origină

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(OA + OC) \quad , \quad \overline{ON} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OD})$$

$$\therefore \quad \overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OD} - \overline{OA} - \overline{OC})$$

$$\therefore \quad 2\overline{MN} = \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{CB} + \overline{AD}. \qquad (1)$$

Deci, pe aceeași bază $\alpha\beta = 2\overline{MN}$ se construesc două triunghiuri $\alpha\beta\gamma$ și $\alpha\beta\delta$ simetrice față de perpendiculara pe mijlocul lui $\alpha\beta$ și având laturile AB, CD și CB, AD. Ținând seamă de senzurile date de (1) se pot construi patrulatere ABCD cu laturile echivalente laturilor celor 2 triunghiuri.

2°. D-l M. AL. VASILESCU-STABU (Liceul „Lazăr", București) a rezolvat bine problema întrevăzând patru soluții, dar fără a face vre-o discuție.

3°. Au rezolvat problema găsind o singură soluție și fără a face vre-o discuție D-nii: E. GH. BEIU-PALADI, H. M. BODNĂRESCU, V. J. BUCURENCIU, A. CĂLINESCU, GH. D. CÂRDEIU, ST. D. CETĂȚEANU, A. DEUTSCH, I. D. DIACONESCU, P. DOBRESCU, V. ECKSTEIN, V. L. FLORESCU, I. A. ILIE, I. V. JAREGHIE, P. I. MAMUT, R. MARTAC, E. S. MODÂLCĂ, LT. P. NEGOIȚĂ, C. V. PANTELIMON, S-LT. I. C. PAREPEANU, ACHILE PETRESCU, M. D. POPA, I. STREDER, T. TRUFIN, S. R. TURCU, M. VASILESCU-STABU, S-LT. M. C. VLAD.

4°. Exact la fel se rezolvă problema dacă în loc de MN se dă EG sau HF. Pentru acest din urmă caz problema este cunoscută, a se vedea de ex. problema 287 dela pag. 426 *Exercices de Géometrie*, F. G. M., ediția 7-a unde este dată și o bibliografie.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4895. *Triunghiul isoscel și triunghiul dreptunghic sunt singurele triunghiuri, pentru cari o antiparalelă la bază este perpendiculară pe mediana respectivă.*

ALEXANDRU V. NICULESCU.

Soluție geometrică dată de D-nii: ȘTEFĂNESCU D. NICOLAE, FLORESCU VICTOR și RĂDULESCU OCT. (elevi L. M. N. F).

Presupunem cunoscută următoarea propoziție: „*In orice triunghiu, o antiparalelă la bază este perpendiculară pe diametrul vârfului opus*".

Fie atunci O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar M mijlocul laturii BC. Rezultă atunci, potrivit teoremei de mai sus că punctele A, M, O sunt coliniare, următoarele cazuri fiind posibile:

1. A, M, O *sunt trei puncte distincte,* deci $MO \perp BC$ și cum $MO \equiv AM$, mediana fiind și înălțime, Δ-*ul* ABC *este isoscel.* $(\overline{AB} = \overline{AC})$.

2. $M \equiv O$, centrul cercului circumscris este în mijlocul lui BC, deci $\sphericalangle BAC = 90^0$ și Δ-*ul* ABC *este dreptunghic în* A.

3. $A \equiv O$, raza cercului (ABC) este nulă, triunghiul se reduce la un punct.

4. $A \equiv M$, triunghiul ABC e degenerat într'o dreaptă, totuși este isoscel la limită (AB = AC).

Soluție dată de D-nii: ALEX. POPESCU-ZORICA (stud. matem.), CONSTANTIN V. PANTELIMON (Lic. Milit. Iași), CORNĂȚEANU AUREL, MOȚOC REMUS (Lic. Milit. Cernăuți), POPA D. MIRCEA, ȘERBĂNESCU N. ȘTEFAN, ȘAICHIN ADOLF, TĂTARU N. NICULAE (Liceul Militar T.-Mureș), TURCU SANDU (Lic. Milit. Iași).

Fie B' și C' punctele unde o antiparalelă relativă la unghiul A taie laturile AC și AB; rezultă:

$$\sphericalangle AB'C' = \sphericalangle B \quad , \quad \text{deci} \quad \sphericalangle B'AM = 90 - B$$

și

$$\sphericalangle MAC = A + B - 90^0.$$

Să aplicăm acum teorema sinusurilor Δ-urilor AMC și MAB, obținem:

$$\frac{AM}{\sin B} = \frac{a}{2\sin(A + B - 90)} \quad ; \quad \frac{AM}{\sin C} = \frac{a}{2\sin(90 - B)}$$

și prin împărțirea acestor relații

$$\sin C \cdot \cos C = \sin B \cdot \cos B$$

sau

$$\sin 2C = \sin 2B.$$

Soluţiile posibile ale acestei ecuaţii sunt :

1) $\hat{B} = \hat{C}$ şi Δ-ul ABC este isoscel

2) $2B + 2C = 180^0$

sau

$\hat{B} + \hat{C}$ 90^0 şi atunci Δ-ul ABC este dreptunghic.

In concluzie deci, numai triunghiul isoscel şi dreptunghic răspund problemei.

Observări.

a) Unii rezolvitori — nepublicaţi aci — au interpretat enunţul problemei astfel :

„Să se arate că într'un triunghiu isoscel sau dreptunghic o antiparalelă la bază este perpendiculară pe mediană".

Sub această formă, elementară şi cunoscută, problema îşi pierde desigur tot interesul.

Alţi corespondenţi au dat soluţii lipsite de rigurositate.

b) Soluţia geometrică a fost redactată, în bună parte, după aceea trimisă de D-l ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE.

c) Se poate arăta în acelaşi mod că *«singurul triunghiu pentru care o antiparalelă la bază este perpendiculară pe simediana sau bisectoarea respectivă, este tot triunghiul isoscel»*.

A. V. N.

PROBLEMA 4987. *Pe colţurile unui patrat şi la mijlocul laturilor lui se scrie câte o cifră. Parcurgând laturile lui în acelaşi sens, cifrele scrise dau patru patrate perfecte de câte trei cifre. Se cere dispoziţiunea acestor cifre.*

ION IONESCU.

Fie P patratul căutat:

$$\begin{matrix} abc \\ h\ d \\ gfe \end{matrix}$$

în care *abc, cde, efg, gha* sunt patrate perfecte. Numărul de şase cifre *abcdefgh* este prin urmare aşa fel că grupele *abc, cde, efg, gha* sunt patrate perfecte. Problema dată se poate dar înlocui cu următoarea:

Se cer numerele de şase cifre abcdefg aşa ca numerele abc, cde, efg, gha să fie patrate perfecte.

Cifrele *c, e, g, a,* care termină patrate, nu pot fi de cât 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. Pe 0 nu-l putem admite căci, dacă de exemplu $c = 0$, patratul *cde* nu mai are trei cifre, cum cere enunţul. Apoi patratele încep cu *a, c, e, g* şi prin urmare aceste cifre nu pot fi decât 1, 4, 5, 6 sau 9. Patratele de trei cifre *abc, cde, efg, gfa* nu pot dar fi decât:

121, 144, 169, 196, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 961.

Presupunând pe rând că *abc* este unul din aceste patrate şi racordându-l cu altul spre a forma grupa *abcde* găsim că această grupă ar putea avea una din următoarele 26 valori:

12121, 12144, 12169, 12196, 14441, 14484, 16961,

19625, 19676, 44121, 44144, 44169, 44196, 48441,

48484, 52961, 57625, 57676, 62529, 62576, 67625,

67676, 96121, 96144, 96169, 96196.

Să presupunem că în patratul P am scris în prima linie *abc* pe cel mai mic din cele patru patrate; altfel rotim pe P până ce în prima linie vine patratul cel mai mic. Soluţia nu se schimbă, numai că este altfel scrisă. Găsim astfel următoarele 14 soluţii:

12121, 12144, 12169, 12196, 14441, 14484, 16961,

19625, 19676, 48484, 52961, 57625, 57676, 67676.

Dacă rotim pe P cu 180°, *efgha* ia locul lui *abcde.* Deci soluţiile lui *efgha* sunt soluţiile lui *abcde.* Găsim o soluţie a lui P combinând o soluţie a lui *abcde* cu una a lui *efgha* cu condiţia ca ele să aibă pe *a* şi *e* comuni. Se găsesc astfel soluţiile următoare la care s'a păstrat *abc* cel mai mic patrat:

121212121, 121214441, 121216961, 121444121, 121448481,

121696121, 144414441, 144416961, 144848441, 169616961,

196252961, 484848484, 576767625, 676767676.

A patra soluție este a doua rotită cu 90°. De asemenea a șasea este a treia rotită cu 90°. Ne rămân astfel următoarele 9 soluțiuni distincte, pe care le putem grupa astfel:

3 făcute cu un patrat: 121212121, 484848484, 676767676.

3 „ „ două „ : 144414441, 144848441, 169616961.

3 „ „ trei „ : 121444121, 121696121, 576767625.

3 „ „ patru „ : 121448441, 144416961, 196252961.

Au dat soluțiuni, fără a cerceta dacă sunt distincte: D-ra LYDIA M. TUDORAN (Clasa IV-a, Școala centrală de fete „Marica Brâncoveanu", București) și D-l M. AL. VASILESCU-STABU (Clasa VI-a București). Soluțiuni sumare de D-nii: M. C. I. VLAD, ACHILLE PETRESCU, STELIAN CETĂȚIANU, H. REISCHER, GH. S. TOPALESCU.

PROBLEMA 5017. *Se cere un patrat perfect de patru cifre, astfel format ca cifra a doua, adunată cu cifra a treia să dea un număr egal cu întreitul sumei ce se obține adunând cifra întâia cu a treia; iar cifra a patra să fie egală cu îndoitul cifrei a treia.*

C. SĂNDULACHE.

Soluție dată de D-șoara LYDIA TUDORAN (Elevă Clasa IV-a, Școala Centrală „Marica Brâncoveanu", București) și M. AL. VASILESCU-STABU (Liceul „Gh. Lazăr", București).

Fie *abcd* numărul cerut. Enunțul neprecizând cum se face numărătoarea ordinei cifrelor, comportă examinarea a două cazuri.

Cazul I. Ordinea cifrelor se numără dela stânga la dreapta. Condițiile enunțului dau:

$$(1) \qquad b = 3a + 2c \quad ; \quad (2) \quad d = 2c.$$

Cifra d fiind pereche și terminație de patrat perfect poate avea numai valorile 0, 4, 6 cărora le corespund pentru c valorile 0, 2, 3. Se duc pe rând aceste valori în (1) și se dau lui a

valorile posibile dela 0 la 3 inclusiv, căci pentru $a \leqq 4$ se obţine $b > 10$. Se găsesc următoarele rezultate:

1) $c = d = 0$ cu $\begin{cases} a = 0\ ,\ 1\ ,\ 2,\ 3 \\ b = 0\ ,\ 3\ ,\ 6,\ 9 \end{cases}$

2) $c = 2\ ,\ d = 4$ cu $\begin{cases} a = 0\ ,\ 1 \\ b = 4\ ,\ 7 \end{cases}$

3) $c = 3\ ,\ d = 6$ cu $\begin{cases} a = 0\ ,\ 1 \\ b = 6\ ,\ 9. \end{cases}$

Din numerele *abcd* ce se pot forma cu aceste cifre, singurul patrat perfect şi deci soluţiune a problemei este;

$$1936 = 44^2.$$

Am eliminat soluţia de formă *0000,* care nu are nici un senz.

Cazul II. Ordinea cifrelor se numără dela dreapta la stânga. Condiţiile enunţului dau:

$$c = 3d + 2b \quad ; \quad a = 2b.$$

Examinând ca în cazul I nu găsesc nici o soluţie.

Au rezolvat bine problema examinând numai Cazul I, D-şoarele ANA S. MODÂLCĂ (Anul preparator, Şcoala Politehnică, Bucureşti), ELENA D. PAPADOPOL (Liceul de fete, Bacău), ANA C. GEREANU şi D-nii: V. V. ALDEA, E. R. ARENDT, D. D. BUZNEA, V. G. BÂRLEA-SUHĂŢEANU, M. I. CRĂCIUNESCU, M. DIACONESCU, A. D. FLOREŞTEANU, E. GH. VIJELIE-MUŞCEL (Liceul militar, Târgovişte), N. P. BĂDULESCU (Colegiul Naţional, Sf. Sava), V. C. ATANASIU, V. BÂRZU, AL. A. GHEORGHIU, T. MIROSLAV, ACHILE PETRESCU, I. I. PASCARU, C. PANTELIMON, M. D. POPA (Liceul militar Iaşi), D. C. BOJIN, GH. V. DOVGAN, C. V. DIACONESCU, R. E. GVIAZDOMORSCHI, CICERONE IONESCU, A. I. IANCULESCU, STELIAN D. IONESCU, P. IRIMESCU, V. ONIŞORU, M. PETRESCU, C. F. POPESCU, C. SUHĂŢEANU, GH. I. TOPÂRCEANU, A. R. TUTOVEANU, GH. I. VLĂDESCU (Liceul militar, Cernăuţi), H. M. BODNĂRESCU (Liceul Titu Maiorescu, Bucureşti), ST. CETĂŢEANU (Liceul Gh. Şincai, Bucureşti), A. I. CORNĂŢEANU (Şcoala navală Constanţa), CR. I. CONSTANTIN (Liceul militar, Chişinău), D. D. BOIANGIU, M. C. CLEANOVEANU, I. I. DIACONESCU, EM. S. MODÂLCĂ (Liceul Traian, Turnu Severin), I. N. GLIGOV, G. WEISSBERGER (Liceul „Moise Nicoară", Arad), C. MOTĂŞ, ISAC I. SOLOMON, H. L. REISCHER (Liceul Internat, Iaşi), D. D. MIHĂILESCU, GH. S. TOPALESCU (Liceul militar Tg.-Mureş), CRISTEA D. EFTIMIE, IULIAN PETRESCU (Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti), M. I. POPA (Bucureşti), M. C. BEDREAG, M. S. CHERŢMAN (Liceul „I. Maiorescu", Giurgiu), I. GH. COSTESCU (Liceul „M. Eminescu", Bucureşti), V. C. ROLLEA (Liceul Naţional, Iaşi), M. F. POPESCU (Şcoala Politehnică), FL. N. IORGULESCU (Liceul „B. P. Hajdău", Buzău), C. I. CRISTEA, I. C. DIMITRIU, E. V. DRĂNICEANU, D. D. ENESCU, A. V. MINEA, I. I. STAMATE şi V. R. VESA.

EXERCIŢII

14. 1°. Fiind date două triunghiuri omologice, dreptele care unesc vârfurile unuia cu proecţiile pe axa de homologie, ale vârfurilor celuilalt, sunt concurente.

2°. Cele 2 puncte de concurenţă se găsesc pe o dreaptă ce trece prin centrul de homologie şi e perpendiculară pe axa de homologie.

Generalizare.

LOCOT. M. I. FOCŞENEANU.

R. *Demonstraţia* se bazează pe teorema că intersecţia a 3 plane e un punct determinat de concurenţa intersecţiilor celor 3 plane, luate câte 2.

Se consideră laturile celor 2 triunghiuri, *urmele* planelor, iar axa de homologie, *linie de pământ.*

Dreptele din enunţ sunt proecţiile respectiv pe cele 2 plane, ale intersecţiilor planelor luate câte 2, care evident *sunt concurente,* pe o dreaptă ce este o *linie de ordine* şi deci perpendiculară pe linia de pământ, adică pe axa de homologie.

Dreapta aceasta mai trece şi prin centrul de homologie, care este punctul comun celor 3 plane, *rabătut pe planul vertical.*

Generalizarea se obţine observând că proecţiile vârfurilor unuia din triunghiuri pe axa de homologie, sunt pe 3 drepte paralele sau *concurente la infinit.*

Dacă le facem să fie *concurente la distanţă finită* avem teorma:

1°. Fiind date 2 triunghiuri homologice, cevienele unui punct într'unul din triunghiuri, taie axa de homologie în 3 puncte, care sunt intersecţiile a 3 ceviene, în celălalt triunghiu.

2°. Cele 2 puncte obţinute se găsesc pe o dreaptă ce trece prin centrul de homolgie şi primul punct.

PROBLEME PROPUSE

5061 [1]). Să se arate că dacă $\varphi(i)$ reprezintă indicatorul lui i, atunci avem:

$$n \cdot \varphi(n!) \leqslant n! \, \varphi(n).$$

Să se găsească o relaţie analoagă pentru suma numerelor prime cu un număr dat şi mai mici decât el.

CPT. COMANDOR I. LINTEŞ.

5074. Care este cea mai scurtă şi cea mai lungă distanţă dintre două puncte luate pe două cercuri mici de pe suprafaţa unei sfere.

Distanţele se măsoară pe suprafaţa sferei prin arce de cercuri mari.

I. IONESCU.

1) Problema 5061 din No. 5, Anul XLIV, fiind publicată sub No. 3413, se înlocueşte cu prezenta.

5075. Intrebuinţând câte o dată pe fiecare din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 să se formeze numerele *ab*, *cde* şi *fghi*, respectiv de două, trei şi patru cifre, între care există relaţiunea

$$6 \times fghi = ab \times cde.$$

G-L GH. BUICLIU.

5076. Să se arate că, dacă $p_1, p_2, \ldots, p_n$ reprezintă numerele prime cu N şi mai mici decât el, atunci avem:

$$(p_1 \cdot p_2 \ldots p_{\frac{n}{2}})^4 - 1 = \mathcal{M}_N.$$

CPT. COMANDOR I. LINTEŞ.

5077. Să se găsească patratele perfecte de şase cifre obţinute prin scrierea unui patrat perfect la stânga unui număr de cifre identice.

G. G. CONSTANTINESCU.

5078. Pe baza BC a unui triunghiu isoscel ABC se ia un punct M. Să se arate, că cercurile ABM şi AMC sunt egale.

GH. D. SIMIONESCU.

5079. Se dă un cerc O_1 şi două puncte A şi B. Să se construiască un alt cerc O_2, care să aibă raza dată R, să treacă prin punctul B şi astfel ca punctul A să fie situat pe axul radical al celor două cercuri O_1 şi O_2. Discuţie.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

5080. Fie O un punct arbitrar în planul triunghiului ABC; se consideră două cercuri trecând prin O şi A şi care taie sub unghiuri egale cercul OAB, respectiv OAC; primul taie cercul ABC în M şi N şi al doilea taie cercul OBC în M', N'.

1. Cercurile OMN, OBC sunt tangente.
2. Cercurile ABC, AM'N' sunt tangente.

N. N. MIHĂILEANU.

5081. Un punct P din planul triunghiului ABC se proiectează în A_1, B_1, C_1 pe laturile BC, CA, AB şi în A_2, B_2, C_2 pe înălţimile AA', BB', CC'. Să se demonstreze că dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concură în centrul cercului circumscris triunghiului podar al punctului P faţă de triunghiul A'B'C'.

V. THÉBAULT.

5082. Se consideră sistemele de câte trei cercuri astfel ca fiecare cerc al sistemului să treacă prin câte un punct fix, iar axele lor radicale, luate două câte două, să fie trei drepte concurente, fixe. Să se demonstreze că fiecare cerc al sistemului mai trece prin câte un punct fix.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5083. Fie dat triunghiul APQ, Δ şi Δ' perpendicularele ridicate în P, Q pe dreptele AP, AQ şi L un punct variabil pe dreapta PQ. Perpendiculara ridicată în L pe AL taie Δ şi Δ' în M şi N.

Să se arate că proecţia segmentului $\overline{MN}$ pe dreapta PQ este constantă.

C. IONESCU-BUJOR.

5084. Să se rezolve un triunghiu oarecare fiind cunoscute lungimile bisectoarelor, interioară şi exterioară, β' şi β'', precum şi suprafaţa triunghiului, S.

Aplicaţie numerică:

$$\beta' = 7{,}5\text{ m} \ ; \ \beta'' = 30{,}8\text{ m} \ ; \ S = 18{,}12\text{ m}^2.$$

VIRGIL GHIŢESCU.

5085. Se consideră arcele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Să se arate că dacă $0 \leqq a_i \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$, avem:

$$E = \sum_{i=1}^{n-1}{}' \sin^2 a_i \cos^2 a_{i+1} + \sin^2 a_n \cos^2 a_1 \leqq n \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

Dacă arcele sunt oarecare, atunci $E \leqq p$, unde p este partea întreagă a numărului $\frac{n}{2}$.

LT. C. D. IONESCU-ŢIU.

5086. Fiind dat triunghiul A(0, a) ; B(b, 0) ; C(c, 0) să i se determine coordonatele punctelor lui FEUERBACH.

GH. TH. GHEORGHIU.

5087. Să se studieze variaţia funcţiunii:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}}.$$

Să se trateze apoi curba reprezentativă.

VIRGIL CLAUDIAN.

5088. Tangenta în M(x, y) la o curbă (C) intersectează axa OX în T şi OY în T'. Paralelele cu OY şi OX respectiv din T şi T' întâlnesc normala curbei (C) în N şi N'. Se cere curba (C), ştiind că aria triunghiului T'NN' este necontenit zero.

ION V. MĂTIEŞ.

ERATĂ. La problema propusă 5052 (G. M. pag. 223 XLIV) la punctul 4° se completează astfel:

„4°. Secanta determinată de cele de-al doilea puncte de intersecţie ale cercului circumscris triunghiului MNH cu ipotenuza BC şi cateta AC, trece prin punctul C'.“

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea V. Minea (4908, 96); *Bârzu Gh. Vasile* (4996, 5041); *Bodnărescu Horia* (5036, 48, 62); *Boiangiu D. D-tru* (4908, 28, 34, 5000); *Buznea D. D.* (4996, 5025); *Cârdeiu D. Gh.* (5064); *Cerchez Mihu* (5004, 19, 25, 27, 55, 56); *Cetăţeanu St.* (4885, 5018, 25, N); *Cotulbea I. Const.* (5055); *Cristea D. Eftimie* (5018, 63); *Diaconescu D. I.* (5035, 48); *Dovgan V. Gh.* (5055); *Drăghicescu P. Paul* (5048, 62, 63); *Dumitriu Călin* (4458, 829, 996); *Eckstein Virgil* (4921); *Eftimie D. G.* (5060, 66); *Enescu D-tru* (4996); *Georgescu Răducan* (N); *Gligor N. Ion* (4996); *Gloden A.* (3873, A, N); *Grumăzescu M.* Subloc. (5011, 15, 25, 40, 54, 55); *Gviazdomorschi E. Romulus* (5005, 48, 62); *Herman V.* (4881); *Iancu I.* (4895, 5064, 65); *Ionescu Al. Doru* (4996); *Jareghie V. Ion* (5055); *Mărculescu Origen* (5035, 39); *Mătieş V. I.* (A, P); *Modâlcă S. Emil* (4788, 815, 5011, 25); *Motaş Camil* (4996); *Petrescu Iulian* (5063); *Petrescu Mihail* (5063); *Petrescu V. Achile* (5048, 62, 63); *Popa N. Aurel* (5048, 62, 63); *Popescu Filip Mihail* (5027); *Postolache Veniamin* (N); *Ripianu D-tru* (4794, 5025, 41); *Rohr I. Alex.* (4887, 5006, 07); *Rosenblatt S. Millu* (4996, 5004, 11, 20, 39); *Săndulache C.* (4870); *Solomon Iancu Isac* (5011, 24); *Stamate I. Ionel* (4908, 96, N); *Stoenescu Al.* (P); *Stoenescu D. Mirel* (5025); *Suhăţeanu-Bârlea Victor* (4996); *Sulițeanu Const.* (5055); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (4870, 904, 52, 5025, 32, 36, 46, 48, 55, P); *Vijelie Eugen* (4996).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea «*Gazetei Matematice*» se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anual şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă). (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie.* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică,* Fascicola I. Ediţia II-a revăzută şi adăogită, 1923. (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice. (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice. (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

C. 53.864

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIV

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1939

SUMARUL

1. Adunarea generală a Societății „Gazeta Matematică" din ziua de 23 Februarie 1939.
2. Dare de seamă asupra mersului Societății „Gazeta Matematică". *Delegația Societății.*
3. I. H. Alsted la Alba-Iulia . . . *Victor Marian.*
4. Aplicații ale coordonatelor tangențiale . . . . . *N. Abramescu.*
5. O problemă de construcție . . . *M. Ghermănescu.*
6. Premiul de aritmetică . . . . . *Comisiunea pentru Premii.*
7. Note Matematice: 24 — 28.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 283.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 3236, 4822, 4838, 4908, 4921, 4996, 5035.
12. Exerciții 15.
13. Probleme propuse: 5089 — 5103.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1939

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stoica**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1938 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5002, 09, 10, 14, 22, 23, 26, 28, 29, 30, 37, 43, 45, 47, 49, 50, 51, 53, 58, 59, 61, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 79, 80, 81, 82, 85, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 01, 02, 03.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

In Biblioteca «Gazetei Matematice» a apărut:

CULEGERE DE PROBLEME DE GEOMETRIE ANALITICĂ

INTOCMITĂ DE

G. ȚIȚEICA

PARTEA I. EDIȚIA II-a

ADĂOGITĂ DE

N. BOTEA

Prețul: 140 lei

ADUNAREA GENERALĂ A SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“ DIN ZIUA DE 23 FEBRUARIE 1939

Cuvântarea de deschidere ţinută de D-l Ing. D. STAN, membru în delegaţie

Domnilor,

Deschizând şedinţa acestei Adunări generale, avem datoria să facem mai întâi un popas dureros, dar care, în acelaş timp nu poate fi decât înălţător.

In acest mediu al *Gazetei Matematice* şi, în ultimii ani, în această casă a Gazetei, prezenţa atât de preţioasă a ilustrului profesor GH. ŢIŢEICA a avut totdeauna darul de-a crea o atmosferă de înălţare, şi intelectuală şi morală. Cu atât mai mult acum, când ni-i sufletul îndurerat de plecarea lui definitivă dintre noi, evocarea ilustrei lui personalităţi, a marelui său suflet şi-a nepieritoarelor lui merite, nu poate decât să ne înalţe şi să ne insufle acea judecată dreaptă şi cumpănită care forma trăsătura cea mai frapantă din fiinţa lui, şi de care avem nevoe spre a duce la sfârşitul cel mai bun lucrările Adunării noastre de azi.

Domnilor, vorba domoală dar precisă şi aleasă a lui ŢIŢEICA, figura lui severă dar totdeauna înflorită de un zâmbet revelator de caldă bunătate, sunt icoane încă atât de vii în memoria noastră, că în mod natural o adâncă tulburare ne cuprinde din amestecul acesta al trecutului cu prezentul şi dacă ritmul accelerat al inimilor noastre poate avea vre-o semnificaţie în acest moment, este că avem cu toţii sentimentul că spiritul lui ŢIŢEICA planează în clipa asta peste capetele noastre. Aşa înţeleg că trebue să fi fost atmosfera, cu secole în urmă, printre creştinii care se adunau să sanctifice pe unul din sfinţii credinţei lor biruitoare. In orice caz, pentru *Gazeta Matematică*, în calendarul spiritual al Gazetei, cât timp va dăinui ea, numele lui ŢIŢEICA va rămâne scris cu literile de aur şi venerat ca al unuia din sfinţii ei cei mai mari.

Nu este momentul şi n'am competinţa de-a expune şi caracteriza opera ştiinţifică nepieritoare ce lasă în urma sa ŢIŢEICA, şi nici marea contribuţie, pe atâtea căi, la atâtea Instituţii, pe care-a adus-o munca lui entuziastă şi neîntreruptă pentru înălţarea ţării şi neamului nostru, în destinele căruia avea nemărginită încredere. Viaţa exemplară a acestui om cu adevărat întreg, ne-a fost evocată,

cu 2 săptămâni în urmă de cei care s'au închinat la mormântul lui, dând glas durerii întregii suflări intelectuale dela noi.

Ţin însă să amintesc astăzi, aci, dragostea constantă şi activă cu care a înconjurat el *Gazeta Matematică*, în bună parte şi opera lui, şi să formulez îndemnul pe care exemplul lui l-a personificat până acum între noi, de-a pune cu toţii, toată râvna şi toate posibilităţile noastre în susţinerea *Gazetei Matematice*, pe căile bătute de el: cu entuziasm reţinut dar nedesminţit, cu dragoste caldă dar nedemonstrativă, cu muncă ordonată şi neîntreruptă, cu demnitate şi probitate, cu judecată senină şi cumpănită, în rezumat: cu impecabilă ţinută de om întreg.

Domnilor, pentru a da timp lacrimilor noastre să se prelingă liniştite şi pentru a putea prinde mesagiile pe care de dincolo de moarte le trimite sufletelor noastre recunoscătoare iubitul nostru profesor şi îndrumător permanent, să rămânem câte-va clipe în linişte perfectă şi adâncă reculegere.

DARE DE SEAMĂ

ASUPRA MERSULUI SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“

Domnilor Membri,

Mergând pe drumul neted şi sigur pe care a fost aşezată şi condusă de-alungul atâtor ani, Societatea noastră este, credem, la adăpost de surprize, şi dacă darea de seamă asupra activităţii ei anuale nu dă loc la anunţarea realizării de beneficii, pe care nu le urmăreşte, în schimb poate cuprinde satisfacţia preţioasă şi rară că *Societatea noastră îşi îndeplineşte misiunea cu scrupulozitate şi cu succes crescând.* Această constatare, la fel ca în anii precedenţi, o putem face şi pentru 1938.

In adevăr, editarea revistei „Gazeta Matematică“, primordialul scop şi principala activitate a Societăţii noastre, s'a făcut în aceleaşi ireproşabile condiţii de regularitate şi acurateţă, devenite normă absolută, cu acelaş număr de pagini lunar, 56, şi cu menţinerea neştirbită a nivelului ei ştiinţific de totdeauna. Ca utilitate şi prestigiu, revista a urmat şi în 1938 curba ascendentă pe care toate sforţările

noastre trebue s'o menţină veşnic. Acesta fiind singurul progres pe care-l urmărim, avem dreptul deci să spunem că „Gazeta Matematică“ a progresat normal şi în anul trecut, cu toate că avem de înregistrat o uşoară scădere a numărului de abonaţi atât la „Gazetă“ unde am avut 300 abonaţi faţă de 332 în 1937, cât şi la „Supliment“ unde au fost 1828 abonaţi, faţă de 1987 în anul precedent.

Activitatea corespondenţilor Gazetei ca şi a Suplimentului, a dovedit că interesul în jurul publicaţiilor noastre este mereu în creştere.

*

După cum spunea în raportul său, în veci regretatul ŢIŢEICA, „fără trâmbiţe şi surle, dar cu adânc temeiu“, Concursul anual al Gazetei s'a ţinut în zilele de 28, 29 şi 30 Aprilie, „profesori şi elevi rupându-şi din odihna vacanţei ca să dovedească printr'o sforţare comună că în ţara noastră se poate face o muncă sistematică serioasă“.

Am avut de data aceasta 104 candidaţi, faţă de 120 în anul precedent şi au fost admişi 99 candidaţi şi 2 candidate, la fel ca în 1937.

La oral au intrat din aceştia numai 24, faţă de 32 anul trecut.

După caracterizarea dată de D-l I. IONESCU la masa comună tradiţională cu care s'a terminat concursul, el a avut şi anul acesta „un caracter militar“, numărul candidaţilor militari fiind mult mai mare decât cel al candidaţilor civili, iar dintre cei 6 premiaţi, 5 aparţin liceelor militare.

Este natural deci ca şi anul acesta, în darea noastră de seamă să apară numele D-lui GENERAL I. DEMETRESCU, însoţit de elogii, D-sa fiind acel care veghează cu deplină convingere şi nedesmințit entuziasm destinele învăţământului matematicilor în şcolile militare, şi care a făcut chiar legământ că „oricare ar fi împrejurările Învăţământului Secundar, să se străduiască ca studiul matematicilor în Liceele Militare, să rămână cel de azi“.

Mai remarcăm că, după mulţi ani, printre premiaţii concursului Gazetei, anul acesta s'a plasat şi o Domnişoară, elevă a Şcolii Centrale din Bucureşti.

*

Cea de-a doua preocupare de realizări a Societății noastre, editarea de cărți de matematici, care se manifestă prin intermediul „Bibliotecii Gazeta Matematică", prezintă un bilanț superior multor ani din urmă.

In adevăr, în anul trecut s'a editat în această Bibliotecă:

Culegerea de probleme de algebră, de D-l A. G. IOACHIMESCU, Partea I, sub îngrijirea D-lor Profesori O. N. ȚINO și C. IONESCU-BUJOR.

Culegerea de probleme de trigonometrie de V. CRISTESCU, Partea II-a (Trigonometrie plană), revăzută și adăogită de D-l GH. T. GHEORGHIU.

Iar sub tipar, se găsesc încă:

Culegerea de probleme de algebră de D-l A. G. IOACHIMESCU, Partea II-a, și

Culegerea de probleme de geometrie analitică de G. ȚIȚEICA.

Editând aceste culegeri de probleme și altele ce urmează la rând, Societatea „Gazeta Matematică" are conștiința că împlinește un gol foarte simțit dela epuizarea, de atâția ani, a edițiilor precedente.

*

Inainte de-a încheia însemnările anului acesta pe răbojul realizărilor Societății noastre, trebue să notăm satisfacția de-a fi reușit a pune la punct *chestiunea premiilor* acordate de „Gazeta Matematică".

Dela războiu încoace, fondurile de premii rămăseseră cu totul neînsemnate, și valoarea premiilor nu mai cadrà cu importanța și prestigiul Societății noastre și nici cu nivelul științific al lucrărilor ce se cereau pentru acordarea premiilor.

Mulțumită generozității mai multor donatori, în fruntea cărora stă și de data aceasta D-l ING. A. IOANOVICI, cu votul Adunării Generale din August trecut s'a putut înființa și înzestra cu suma de 428.175 lei, *Fondul General de premii* al „Gazetei Matematice", din care urmează să se întregească pe viitor valoarea premiilor vechi: «V. CRISTESCU», «SPIRU HARET», «VASILE CONTA» și «H. CAPRIEL» și să se acorde anual trei premii noui: pentru aritmetică, pentru geometrie și pentru algebră, a câte 5.000 lei anual.

Delegația „Gazetei" ține să vă roage, cu această ocazie, să dați cu toți aprobarea D-v., cu toată însuflețirea, ca premiul de geometrie să poarte de aci înainte numele lui GH. ȚIȚEICA.

Cu această ocazie s'au modificat regulamentele premiilor vechi, s'au întocmit regulamentele celor noui precum şi regulamentul Fondului general de premii, toate aceste regulamente fiind puse de acord cu noua situaţie creată.

Prin donaţiunile D-lor PROFESOR GH. BOTEA şi A. ROŞU, au mai luat fiinţă 2 premii noui: Premiul «NICOLAE G. BOTEA» pentru geometria triunghiului şi a tetraedrului şi premiul «INGINER AL. ROŞU» pentru răsplătirea celui mai harnic corespondent al „Gazetei Matematice".

Decernarea unora din aceste premii urmează să se facă pentru prima oară, de către Adunarea Generală de astăzi.

Avem convingerea că s'a creat pe această cale o pârghie puternică în mâinile Societăţii noastre pentru servirea scopului ei: „Răspândirea gustului pentru studiul ştiinţelor matematice şi îndrumarea spre cercetări originale, relative la această ramură de ştiinţă".

In sfârşit tot cu bucurie trebue să notăm la această încheere de bilanţ de activitate, că în toamna trecută Societatea noastră, administrând fondul Bursei PROFESOR ION IONESCU, a putut să acorde pentru prima oară două burse din acest fond, D-lor LT. AVRAM C. şi LT. ŞOVA C., elevi în anul III al Facultăţii de Construcţii dela Şcoala Politecnică. Pentru membrii Societăţii noastre atât de pătrunşi de atmosfera morală a „Gazetei Matematice", nimic nu poate fi mai îmbucurător decât să constate că bursa aceasta, menită *să perpetueze o tradiţie de muncă şi disciplină*, nu mai rămâne neacordată din lipsă de candidaţi demni de ea, ca în anii trecuţi.

*

Trecând la mişcarea din sânul Societăţii noastre şi la situaţia ei materială pe anul 1938, trebue să notăm următoarele:

Numărul membrilor Societăţii a crescut la 195, dela 189 cât era la finele anului 1937, adică s'a sporit cu 6. Au fost aleşi 8 membri noui, în cursul anului, şi anume: D-şoara P. BUNGEŢEANU şi D-nii: ING. I. ALEXIU, PROF. G. G. CONSTANTINESCU, PROF. ZAHARIA FLORIAN, GENERAL AL. GHEORGHIEŞ, LT. I. SAVIN, LT. AURELIAN STAN şi PROF. T. VESCAN.

Iar până la finele anului 1938, am înregistrat pierderea mult regretaţilor PROF. A. ANGELESCU şi GENERAL SC. PANAITESCU.

*

Numărul cărţilor donate bibliotecii a crescut dela 2147 la 2289, adică cu 142 volume.

In afară de donaţiunile numeroase şi însemnate, care au dat posibilitatea înfiinţării „Fondului general de Premii“ şi care au fost acceptate de Adunarea Generală din August 1938, după cum indică şi convocarea de astăzi s'au mai primit următoarele donaţiuni a căror acceptare se supune votului D-vs.

Dela Ministerul Apărării Naţionale . . . Lei 31.000.
Dela Ministerul Educaţiei Naţionale . . . „ 2.500.

*

Din darea de seamă financiară ce vi se supune odată cu aceasta, scoatem în evidenţă următoarele rezultate în legătură cu administrarea imobilului proprietatea Societăţii: Veniturile brute din chirii au fost de lei 221.771, în timp ce cheltuelile şi impozitele au însumat 179.250. Diferenţa de lei 42.520 a fost întrebuinţată pentru amortizarea deficitului pe 1936, pentru mărirea fondului pentru mobilier şi bibliotecă, pentru amortizarea imobilului, etc.

Mobilierul nostru s'a îmbogăţit cu 2 dulapuri pentru cărţi.

Incheind această dare de seamă, Delegaţia crede că poate constata că mersul Societăţii pe anul trecut se soldează cu un frumos pas înainte, pe calea propăşirii şi vă roagă ca după examinarea situaţiei financiare şi ascultarea raportului cenzorilor, să binevoiţi a-i da cuvenita descărcare pentru gestiunea pe 1938.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII
ING. D. A. STAN, C-DOR GR. ZAPAN,
CASIER A. BUNESCU.

I. H. ALSTED LA ALBA-IULIA

(Cu prilejul tricentenarului morţii sale)

IOHANN HEINRICH ALSTED, profesorul de filozofie dela „*Collegium Bethlenianum*“ din Alba-Iulia, mort la 30 Noemvrie 1638, în plină activitate şi în floarea vieţii a fost o personalitate de seamă a epocei sale şi a avut o influenţă deosebită asupra desvoltării ştiinţelor în Ardeal. Având o cultură universală — a fost un adevărat

polihistor — şi autor al unui mare număr de cărţi, a îndrumat această şcoală timp de opt ani cât a funcţionat la ea în toate domeniile, precum şi în acela al ştiinţelor matematice unde activitatea lui a avut o importanţă deosebită.

Cred deci că e interesant să schiţez pe scurt viaţa şi activitatea în domeniul matematicii a acestui profesor german dela moartea căruia s'au împlinit nu de mult 300 de ani. Pentru a-i înţelege însă valoarea e necesar să arăt cadrul în care s'a desfăşurat această activitate, voiu insista deci în câteva rânduri asupra rostului şi al funcţionării Colegiului Bethlenian din Alba-Iulia, în veacul al XVII.

* * *

In Evul Mediu Ardealul nu a avut şcoli superioare. Tinerii ardeleni studiau fie la Universităţile din Ungaria, fie la cele din străinătate, mulţi din ei ajungând chiar profesori la acele şcoli.

Totuşi ideia unei Universităţi ardelene a preocupat în continu pe conducătorii acestei provincii. Ea însă nu s'a putut realiza decât după lupta dela Mohaciu (1526) când Ardealul deveni provincie independentă de Ungaria. Astfel deja primul principe al Ardealului, regele IOAN SIGISMUND, a înfiinţat la 1557 o şcoală superioară catolică, la conducerea căreia a chemat pe vestitul profesor din Paris, PIERRE DE LA RAMÉE (PETRUS RAMUS). Mai târziu voia să infiinţeze o Universitate la Sebeşul-Săsesc. Ceea ce pentru SIGISMUND era numai o dorinţă, a realizat principele Ardealului ŞTEFAN BATHORY, totodată şi rege al Poloniei, cu ajutorul iezuiţilor (vezi *Gazeta Matematică,* Anul XLII, pag. 620). Această Universitate a funcţionat la Cluj între anii 1581 şi 1605, când iezuiţii au fost alungaţi din Ardeal.

Dela 1605 până la 1690, anul în care a fost ocupat de Habsburgi, Ardealul a avut principi protestanţi. Deja cel dintâi dintre ei, GAVRIL BETHLEN, a conceput ideia unei Universităţi protestante în Ardeal şi anume la reşedinţa sa din Alba-Iulia. In 1622 aduse la cunoştinţa Dietei din Cluj [1]) că va deschide în curând noua Universitate. In acest scop reorganiză colegiul din Alba-Iulia, care exista dela 1560, apelând în primul rând la forţele intelectuale din ţară, apoi la cele din străinătate. Astfel a fost adus

1) O. GHIBU: *Universitatea Daciei Superioare.* Bucureşti. Cultura Naţională 1929.

în 1622 profesorul şi poetul german MARTIN OPITZ, care însă, după doi ani, a părăsit Ardealul. Şcoala dela Alba-Iulia, numită oficial „*Collegium Bethlenianum*“ a ajuns la înflorire numai după ce lui BETHLEN i-a reuşit să aducă din Germania pe profesorii I. H. ALSTED dela Herborn, PISCATOR (FISCHER) dela Heidelberg şi H. BISTERFELD. Personalitatea cea mai proeminentă dintre aceştia era ALSTED, care a reorganizat şcoala şi a îndrumat-o în toate manifestările ei.

* * *

I. H. ALSTED (latineşte ALSTEDIUS) e originar din provincia Nassau; s'a născut la 7 Ianuarie 1588 în Biken, unde tatăl său IACOB era preot reformat. ALSTED şi-a început studiile la Herborn, continuându-le la Universităţile din Marburg, Heidelberg şi Basel. Intors la Herborn fu numit profesor de filozofie la Universitatea de acolo, în care calitate a funcţionat timp de 21 de ani. Aici avu ca elev şi pe vestitul pedagog COMENIUS. Renumele lui deveni atât de mare încât BETHLEN se hotărî să-l învite la Alba-Iulia cu orice jertfă. ALSTED primi invitarea după ce i s'a oferit întreţinere completă împreună cu numeroasa lui familie, plus 1200 taleri imperiali pe an, ceea ce corespunde azi la o leafă lunară de aproape 100000 lei.

ALSTED sosi la Alba-Iulia în ziua de 19 Noemvrie 1629, două săptămâni după moartea lui BETHLEN. Cel dintâi lucru a lui ALSTED fu reorganizarea şcoalei, cerând ca ea să funcţioneze după modelul „celor mai vestite şcoli şi seminarii din Germania, Gallia şi altele“ şi după legile redijate de dânsul în spiritul celor „ale academiei din Heidelberg“. Cu toate acestea, şcoala din Alba-Iulia nu a avut caracterul unei adevărate Universităţi.

Ni s'a păstrat regulamentul de funcţionare a *Colegiului lui* BETHLEN. In secţia inferioară profesori ajutori aveau să pregătească pe începători pentru înţelegerea ştiinţelor.

Secţia superioară, sau Colegiul propriu zis, se împărţia în alte trei secţiuni: teologie, filozofie (care cuprindea şi ştiinţele) şi filologie. Teologia o preda PISCATOR, filozofia ALSTED, matematica şi fizica ginerele său BISTERFELD, iar la filologie se ceru al patrulea profesor. Pe lângă Colegiu exista un internat cu 40 de bursieri. Cursurile durau trei ani, iar limba de predare cea latină.

ALSTED depuse atâta râvnă şi talent încât în curând avu elevi nu numai din Ardeal ci şi din Ungaria şi Polonia. Deşi a păstrat pentru sine catedra de filozofie, el era sufletul întregei şcoli, compunând singur aproape toate manualele necesare elevilor şi îndrumând activitatea profesorilor fie direct, fie indirect prin scrierile sale.

Moartea l'a răpit în etate de 50 de ani. El fu înmormântat în Alba-Iulia.

„*Collegium Bethlenianum*" i-a supraveţuit 20 de ani, fiind apoi distrus complet cu ocazia invaziei tătăreşti din 1658. Continuarea acestei şcoli, în proporţii cu mult mai modeste, este liceul reformat din Aiud.

ALSTED a scris faţă de epoca sa, foarte mult. Inainte de a veni la Alba-Iulia publicase deja peste 40 de volume, iar la moartea sa numărul lor era de 61. Activitatea lui de scriitor e admirabil caracterizată prin următor distichon în care din ALSTEDIUS, prin anagramă s'a format cuvântul sedulitas:

„*Sedulus in libris scribendis at que legendis,* ALSTEDIUS *nomen sedulitatis habet*".

(Neobosit în scrierea şi cititul cărţilor, numele lui ALSTED este sârguinţa).

(Va urma) VICTOR MARIAN.

APLICAŢII ALE COORDONATELOR TANGENŢIALE

Multe din problemele de Geometrie analitică se rezolvă uşor întrebuinţând coordonate tangenţiale. Vom da exemple de găsirea unei înfăşurătoare şi de aflarea locului descris de focarele unei conice.

1. Să considerăm două conice cu centru omofocale C' şi C''

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-1=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a+\lambda}+\frac{y^2}{b+\lambda}-1=0$$

şi punctele $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$ respectiv pe aceste conice. Avem

$$(1)\ \frac{x'^2}{a}+\frac{y'^2}{b}-1=0 \quad , \quad (2)\ \frac{x''^2}{a+\lambda}+\frac{y''^2}{b+\lambda}-1=0.$$

Să găsim *înfășurătoarea dreptei* M'M", *știind că tangente la conicele* C' *și* C" *în* M' *și* M",

$$\frac{xx'}{a}+\frac{yy'}{b}-1=0 \quad , \quad \frac{xx''}{a+\lambda}+\frac{yy''}{b+\lambda}-1=0,$$

sunt paralele. Urmează condiția

$$\frac{x'}{y'}\,\frac{b}{a}=\frac{x''}{y''}\,\frac{b+\lambda}{a+\lambda}=\mu,$$

care se poate scrie

$$(3)\ bx'-a\mu y'=0 \quad , \quad (4)\ (b+\lambda)\,x''-(a+\lambda)\,\mu y''=0,$$

μ fiind variabil.

Să scriem ecuația dreptei M'M" subt forma $ux+vy+wz=0$, punând în evidență coordonatele ei tangențiale (u, v, w). Pentru ușurință se face în calcule $w=1$, $z=1$ și ecuația dreptei este

$$ux+vy+1=0.$$

A găsi înfășurătoarea acestei drepte, înseamnă să aflăm relația dintre u și v, care se zice ecuația tangențială a curbei înfășurătoare. Scriind că dreapta trece prin M' (x', y'), M" (x'', y''), avem

$$(5)\quad ux'+vy'+1=0 \quad , \quad (6)\ ux''+vy''+1=0.$$

Ecuația înfășurătoarei se află eliminând pe x', y', x'', y'', μ între relațiile (1), (2), (3), (4), (5), (6). Astfel, din (3) și (5), (4) și (6) avem

$$x'=\frac{-a\mu}{au+bv} \quad , \quad y'=\frac{-b}{au+bv},$$

$$x''=-\frac{(a+\lambda)\,\mu}{(a+\lambda)\,u+(b+\lambda)\,v} \quad , \quad y''=-\frac{b+\lambda}{(a+\lambda)\,u+(b+\lambda)\,v}.$$

Aceste valori înlocuite în (1) și (2), dau

$$a\mu^2+b=(au+bv)^2 \quad , \quad (a+\lambda)\,\mu^2+b=[(a+\lambda)\,u+(b+\lambda)\,v]^2.$$

Egalând valorile lui μ^2, și suprimând pe λ, obținem

$$a(a+\lambda)\,u^2+2a(a+\lambda)\,uv+(a\lambda+2ab-b^2)\,v^2-a+b=0,$$

care este ecuația tangențială a înfășurătoarei dreptei M'M".

Făcând ecuaţia omogenă cu ajutorul lui w, devine

(7) $a(a+\lambda)u^2+2a(a+\lambda)uv+(a\lambda+2ab-b^2)v^2+(b-a)w^2=0,$

şi este de forma

$$F(u, v, w)u^2 = a_1u^2 + 2b_1uv + c_1v^2 + 2d_1uw + 2e_1vw + f_1w^2 = 0.$$

Fiind de gradul al doilea în raport cu u, v, w, reprezintă o conică. Se ştie [1]) că ecuaţia punctuală a acestei conice se obţine cu relaţia

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 & x \\ b_1 & c_1 & e_1 & y \\ d_1 & e_1 & f_1 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

unde elementele determinantului sunt coeficienţii derivatelor parţiale

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u} = a_1u + b_1v + d_1w \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial v} = b_1u + c_1v + e_1w,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial w} = \partial_1u + e_1v + f_1w.$$

Desvoltând, se obţine

$$(a\lambda + 2ab - b^2)x^2 - 2a(a+\lambda)xy + a(a+\lambda)y + a(a+\lambda)(a-b) = 0,$$

de unde rezultă că înfăşurătoarea este o conică cu centru în origine [2]).

2. Să presupunem că conica C′ este fixă şi conica C″ este variabilă cu λ şi să găsim *locul focarelor conice* (7). Se ştie că tangentele duse la conică din focar sunt dreptele izotrope ce trec prin focar. Ecuaţia dreptei izotrope care trece prin focarul (x, y) este

(8) $Y - y = i(X - x)$, $iX - Y + (y - ix) = 0$, $i = \sqrt{-1}$,

ale cărei coordonate tangenţiale omogene $(ux + vy + wz = 0)$ sunt

$$u = i \quad , \quad v = -1 \quad , \quad w = y - ix.$$

Locul focarului se găseşte scriind că dreapta (8) este tangentă la conica (7), adică coordonatele sale tangenţiale

$$u = i \quad , \quad v = -1 \quad , \quad w = y - ix$$

---

1) N. ABRAMESCU, *Lecţiuni de Geometrie Analitică* (Cursul universitar), ediţia II, 1937, p. 143.

2) Cu această ocazie, se consideră rezolvată problema 4912, *Gazeta Matematică*, t. 43, 1938, p. 280.

verifică ecuația (7). Inlocuind în (7), avem

$$(b-a)^2-(b-a)(y^2-x^2)+2i[(b-a)xy+a(a+\lambda])=0.$$

Egalând cu zero partea reală și coeficientul lui i, obținem

$$x^2-y^2+b-a=0\ ,\quad (b-a)xy+a(a+\lambda)=0.$$

Locul focarului (x, y) se află eliminând pe λ între aceste ecuații. Prima neconținând pe λ, este chiar locul focarelor și deci acest loc este iperbola echilateră $x^2-y^2+b-a=0$, cu același centru ca și conicele C' și C".

N. ABRAMESCU.

O PROBLEMĂ DE CONSTRUCȚIE

1. *Fiind dat un triunghiu* ABC, *să se construiască pe laturile* AB *și* AC *respectiv punctele* D *și* E — *numai cu rigla și compasul* — *astfel încât să avem* BD = DE = EC.

Acestei probleme, rezolvată de D-l O. ȚINO într'un articol precedent din *Gazetă*, având același titlu, i se poate da și soluția ce urmează:

Să adoptăm pe laturile AB și AC sensul pozitiv dela A la B, respectiv dela A la C, A fiind luat ca origine. Observăm că punctul D poate fi cuprins între A și B, pe prelungirea pozitivă a lui AB sau pe prelungirea negativă a acestui segment. La fel, avem trei poziții pentru E, situat pe AC. La o poziție a lui D corespund trei poziții pentru E și viceversa: Vom avea în total $3\times 3=9$ poziții posibile pentru punctele D și E în același timp, date de tabloul schematic alăturat, în care am notat cu a_i, b_i, c_i aceste poziții:

	E între A și B	E pe prel. + a lui AC	E pe prel. — a lui AC
D între A și B	a_1	a_2	a_3
D pe prel. + a lui AB	b_1	b_2	b_3
D pe prel. — a lui AB	c_1	c_2	c_3

Pe o figură, deducem uşor pentru fiecare caz:

a_1. $AD = AB - DB$, $AE = AC - EC$,

$\therefore$ $AD - AE = AB - AC$.

a_2. $AD = AB - DB$, $AE = AC + CE$,

$\therefore$ $AD + AE = AB + AC$.

a_3. $AD = AB - DB$, $AE = AC - EC$,

$\therefore$ $AD - AE = AB - AC$.

b_1. $AD = AB + BD$, $AE = AC - EC$,

$\therefore$ $AD + AE = AB + AC$.

b_2. $AD = AB + BD$, $AE = AC + CE$,

$\therefore$ $AD - AE = AB - AC$.

b_3. $AD = AB + BD$, $AE = AC - EC$,

$\therefore$ $AD + AE = AB + AC$.

c_1. $AD = AB - DB$, $AE = AC - EC$,

$\therefore$ $AD - AE = AB - AC$.

c_2. $AD = AB - DB$, $AE = AC + CE$,

$\therefore$ $AD + AE = AB + AC$.

c_3. $AD = AB - DB$, $AE = AC - EC$,

$\therefore$ $AD - AE = AB - AC$.

Rezultă deci că pentru cazurile a_1, a_3, b_2, c_1, c_3 vom avea:

(α) $AD - AE = AB - AC$,

iar pentru celelalte a_2, b_1, b_3, c_2 vom avea:

(β) $AD + AE = AB + AC$.

Aceste relaţiuni arată că punctele (D, E), (B, D) sunt în *corespondenţă homografică asemenea*, definită de relaţia (α), respectiv (β). Se ştie atunci că DE înfăşură o parabolă, înscrisă triunghiului ABC, punctele de contact cu AB, AC fiind omoloagele lui A pe aceste două drepte, adică punctele P şi Q, P situat pe AB, iar Q pe AC, astfel încât

$$AP = AB \pm AC \quad , \quad AQ = AC \pm AB,$$

semnul — corespunzând relației (α), iar + relației (β). Se vede că în cazul (α) parabola este înscrisă în unghiul suplimentar lui A punctul de contact cu latura cea mai mare AB sau AC fiind în interior, iar cu latura cea mai mică fiind pe prelungirea acestei laturi, în sensul negativ. Din contră, în cazul (β), segmentele AP, AQ sunt ambele pozitive, deci parabola corespunzătoare se găsește înscrisă în unghiul A, de aceeași parte cu triunghiul ABC și exterioară acestuia.

Vom lua, pentru a fixa ideile, $AB > AC$, excluzând cazul $AB = AC$ care se tratează foarte ușor. Urmează pentru (α), că P se află între A și B, iar Q pe prelungirea negativă a lui AC, PQ este evident paralelă cu bisectoarea interioară a unghiului A și taie pe BC într'un punct R, situat între B și C.

Pentru cazul (β), să însemnăm cu P', Q', R' analoagele punctelor P, Q, R. R' se va găsi pe prelungirea laturii BC în spre B, căci $P'B < Q'C$ din cauza $AB > AC$.

2. Până acum am întrebuințat numai ipoteza $BD = CE$. Dacă luăm ipoteza completă $BD = DE = EC$, vom observa că cele nouă cazuri precedente nu pot avea loc simultan, existența unora excluzând pe a altora, ba, unele neexistând de loc.

Mai întâiu, este ușor de observat că se exclud, cazurile b_1, b_3 și c_1. In adevăr, pentru c_1, avem totdeauna $CE < BD$, căci $AB > AC$. Deoarece $AB > AC$, urmează $B < C$, deci B *este totdeauna un unghiu ascuțit.* Urmează, în cazul b_1, cu $DE > DB$, ca oblice față de BC. In cazul b_3 avem întotdeauna $DB \neq DE$, ca oblice față de BE.

Rămân numai șase cazuri de cercetat. Din acestea, dacă $A < 90^0$, se exclude cazul c_2, căci $ED > EA > EC$, ca oblice față de DAB. Deasemenea, dacă $C < 90^0$, se exclude cazul a_2, căci $ED > EC$, ca oblice față de BC.

In definitiv, *sunt trei ipoteze de făcut asupra triunghiului* ABC, *după cum are toate unghiurile ascuțite,* C *obtuz sau* A *obtuz.*

Pentru prima ipoteză avem de examinat cazurile a_1, a_3, b_2, c_3; pentru a doua, cazurile a_1, a_2, a_3, b_2, c_3, iar pentru a treia, cazurile a_1, a_3, b_2, b_3, c_2, c_3. Evident, cazurile a_1, a_3, b_2, c_3, comune tuturor acestor ipoteze, vor fi examinate odată pentru toate.

Observăm acum că, oricare ar fi ipoteza și cazul studiat, din cauza corespondenței omografice a punctelor D și E *dreptele*

BE, CD *se întâlnesc pe* PQR *într'un punct* M. Acest punct îl vom determina noi pe dreapta PQR în fiecare din cazurile ce vom studia.

In toate cazurile, vom evalua unghiul BMC.

3. *Cazul* a_1. Deoarece BP = AC, urmează că D este situat între B şi P, astfel că M este între P şi R, pe dreapta PQR. (Fig. 1 şi 2 din articolul D-lui O. ŢINO).

Pe figură vedem uşor că:

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle BMR + \sphericalangle CMR.$$

Insă:

$$\sphericalangle BMR = \sphericalangle DBE + \sphericalangle DPR = \sphericalangle \frac{ADE}{2} + \frac{A}{2},$$

căci din triunghiul isoscel BDE rezultă:

$$\sphericalangle DBE = \sphericalangle DEB = \frac{1}{2} \sphericalangle ADE.$$

Deasemenea,

$$\sphericalangle CMR = \sphericalangle ECD + \sphericalangle AQP = \sphericalangle \frac{AED}{2} + \frac{A}{2},$$

căci din triunghiul isoscel DEC rezultă:

$$\sphericalangle ECD = \sphericalangle EDC = \frac{1}{2} \sphericalangle AED.$$

Vom avea astfel:

$$\sphericalangle BMR = A + \frac{1}{2}(\sphericalangle AED + \sphericalangle ADE)$$

$$= A + \frac{1}{2}(180^0 - A) = 90^0 + \frac{A}{2}.$$

4. *Cazul* a_3, D se află între P şi A, iar E între Q şi A, astfel că M este între P şi Q, (Fig. 5 şi 6, acelaşi articol). Avem, din triunghiul EMC

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle BEC + \sphericalangle MCE = A + \sphericalangle MCE - \sphericalangle EBA,$$

căci din triunghiul BEA deducem:

$$(1) \qquad \sphericalangle BEC = A - \sphericalangle EBA.$$

Din triunghiul isoscel BED deducem:

$$\sphericalangle EBA = \sphericalangle BED,$$

iar din triunghiul isoscel DEC deducem:

$$\sphericalangle ECD = \sphericalangle EDC = \frac{1}{2}(180^0 - \sphericalangle DEC),$$

$$\therefore \quad \sphericalangle DEC = 180^0 - 2 \sphericalangle ECD.$$

Relația (1) devine:

$$\sphericalangle EBA + \sphericalangle DEC = A - \sphericalangle EBA$$

sau

$$\sphericalangle ECD - \sphericalangle EBA = 90^0 - \frac{A}{2} = \sphericalangle MCE - \sphericalangle EBA$$

deci

$$\sphericalangle BMC = A + 90^0 - \frac{A}{2} = 90^0 + \frac{A}{2}.$$

Rezultă de aci că cele două cazuri a_1 și a_3 se exclud unul pe altul căci cercul capabil de unghiul $90^0 + \frac{A}{2}$, descris pe BC, nu poate întâlni dreapta PR în două puncte situate de aceeași parte a coardei BC.

Pentru a preciza care anume din aceste două cazuri are loc efectiv, trebue să cunoaștem mărimea unghiului BPC față de $90^0 + \frac{A}{2}$. Ori

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BPR + \sphericalangle RPC = \frac{A}{2} + \sphericalangle RPC$$

deci, dacă $\sphericalangle RPC < 90^0$, M este între P și R și avem cazul a_1; dacă $\sphericalangle RPC > 90^0$, M este între P și Q și avem cazul a_3, iar dacă $\sphericalangle RPC = 90^0$, M și D se confundă cu P, E vine în A și problema nu e posibilă decât dacă

$$DE = AP = AB - AC = CE = AC,$$

adică $AB = 2\,AC$. Se observă ușor că în cazul a_1 avem $AB < 2\,AC$, iar în cazul a_3 $AB > 2\,AC$, prin urmare, fiind dat triunghiul ABC, putem dinainte ști, numai cu ajutorul riglei și compasului, care din cazurile a_1 și a_3 va avea loc.

5. *Cazul* b_2 (Fig. 3, acelaşi articol). Punctul M se va găsi pe PR, dedesubtul lui R. Din triunghiul isoscel BDE deducem:

$$\sphericalangle BED = \sphericalangle EBD = \frac{1}{2}(180^0 - \sphericalangle BDE) = 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle BDE.$$

Din triunghiul isoscel CED deducem:

$$\sphericalangle CDE = \sphericalangle DCE = \frac{1}{2}(180^0 - \sphericalangle CED) = 90^0 - \frac{1}{2}\sphericalangle CED,$$

deci

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle DME = 180^0 - \sphericalangle BED - \sphericalangle CDE$$

$$= \frac{1}{2}(\sphericalangle BDE + \sphericalangle CED) = \frac{1}{2}(180 - A) = 90^0 - \frac{A}{2},$$

adică M se află pe acelaşi cerc ca la cazurile a_1 şi a_3, fiind a doua intersecţie a sa cu dreapta PR.

6. *Cazul* c_3, (Fig. 4, acelaşi art.). Deoarece CE=BD>AC=CQ, rezultă că E se află pe CA, dincolo de Q, astfel ca AD = QE. Pentru a preciza în ce parte se află punctul de întâlnire M al dreptelor BE, CD, să comparăm segmentele EQ, BP între ele.

Din triunghiul isoscel BDE rezultă:

$$\sphericalangle EBD = \sphericalangle BED > \sphericalangle BEA,$$

deci în triunghiul EAB, EA > AB, adică EQ > BP. Faţă de triunghiul isoscel PAQ, rezultă că BE şi deci CD vor întâlni PQ de partea lui P, adică sub BC.

Din triunghiul isoscel BDE deducem:

$$\sphericalangle EBD = \sphericalangle DEB = \sphericalangle DEC + \sphericalangle CEB.$$

Din triunghiul isoscel CED deducem:

$$\sphericalangle ECD = \sphericalangle EDC = \sphericalangle EDA + \sphericalangle CDA.$$

Deducem:

$$(2) \quad \sphericalangle DEB + \sphericalangle EDC = \sphericalangle EBD + \sphericalangle ECD = \sphericalangle DEC + \sphericalangle CEB + \sphericalangle EDA + \sphericalangle CDA.$$

Insă în triunghiul EBA avem:

$$\sphericalangle CEB = A - \sphericalangle EBD;$$

în triunghiul CDA avem:

$$\sphericalangle CDA = A - \sphericalangle ECD,$$

iar în triunghiul EAD avem:

$$\sphericalangle EDA + \sphericalangle DEC = 180^0 - A,$$

aşa că (2) devine:

$$\sphericalangle EBD + \sphericalangle ECD = 180^0 - A + 2A - \sphericalangle EBD - \sphericalangle ECD$$

sau

$$\sphericalangle DEB + \sphericalangle EDC = \sphericalangle EBD + \sphericalangle ECD = 90^0 + \frac{A}{2},$$

aşa că din triunghiul MED deduce imediat

$$\sphericalangle EMD = 90^0 - \frac{A}{2},$$

adică M e pe acelaşi cerc ca la cazul b_2, ceea ce face că şi cazurile b_2 şi c_3 se exclud unul pe altul.

Pentru a decide care din aceste două cazuri are loc pentru un triunghiu dat, să luăm punctul M′, simetric lui P faţă de R: figura BACM′ este evident un paralelogram, iar $\sphericalangle BM'C = A$. Dacă M se află între R şi M′ adică $90^0 - \frac{A}{2} > A$ sau $A < 60^0$, avem cazul b_2; dacă M se află mai jos decât M′, adică $A > 60^0$, avem cazul c_3, iar dacă M se află chiar în M′ adică $A = 60^0$, atunci D şi E sunt aruncate la infinit respectiv pe AB şi AC, DE fiind în acest caz tangenta dela infinit a parabolei. Acesta constitue un caz limită, care va constitui *soluţia infinită* a problemei.

Acest caz explică de altfel uşor prin calcul: dacă însemnăm $BD = DE = EC = x$, avem ecuaţia pentru cazurile b_2, c_3

$$(b \pm x)^2 + (c \pm x)^2 - 2(b \pm x)(c \pm x)\cos A = x^2$$

sau

$$(1 - 2\cos A)x^2 \pm 2(b + c)(1 - \cos A)x + a^2 = 0,$$

ecuaţie care are o rădăcină infinită dacă $1 - 2\cos A = 0$, adică $A = 60^0$.

7. Putem rezuma discuţia de mai sus prin următoarele:

Pentru un triunghiu ABC, *cu toate unghiurile ascuţite, problema propusă admite totdeauna două soluţiuni şi numai două, ce se obţin prin următoarea construcţiune simplă.*

Prin B *şi* C *ducem un cerc astfel ca din punctele sale de deasupra coardei* BC *aceasta să se vadă sub un unghiu de* $90^0 + \frac{A}{2}$; *acest cerc este tăiat de dreapta* PR *în două puncte* M *şi* M', M *deasupra, iar* M' *dedesubtul coardei* BC. *Dreptele* BM, CM *întâlnesc laturile* AC, AB *respectiv în punctele căutate* D *şi* E. *Analog* BM', CM'.

Punctul M *ne dă cazul* a_1 *sau* a_3, *după cum* $AB \lesseqgtr 2AC$, *iar punctul* M' *ne dă cazul* b_2 *sau* c_3, *după cum* $A \lesseqgtr 60^0$.

Dacă $A = 60^0$, *punctul* M' *ne dă o soluţie infinită, aşa că de fapt există o singură soluţie, corespunzătoare lui* a_1 *sau* a_3.

8. Să examinăm, a doua ipoteză făcută asupra triunghiului ABC, adică $C > 90^0$. Avem de studiat numai cazul a_2, pe lângă cele precedente, care se aplică după, cum am spus, în toate ipotezele făcute asupra lui ABC. Acesta corespunde fig. 7 din articolul D-lui O. Ţino.

Fie M punctul de întâlnire al dreptelor BE, CD. Din triunghiul MBD deducem:

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle BMD = \sphericalangle CDE - \sphericalangle DEB.$$

Insă din triunghiul isoscel DEC deducem:

$$(\alpha) \qquad 2 \sphericalangle CDE + \sphericalangle CED = 180^0,$$

iar din triunghiul isoscel BDE deducem:

$$\sphericalangle DBE = \sphericalangle DEB.$$

Din triunghiul ABE rezultă deci:

$$(\beta) \qquad 2 \sphericalangle DEB + \sphericalangle CED = 180^0 - A,$$

pe care scăzând-o din (α) deducem:

$$2(\sphericalangle CDE - \sphericalangle DEB) = A,$$

adică:

$$\sphericalangle BMC = \frac{A}{2}.$$

Vom descrie deci pe BC un arc de cerc capabil de unghiul $\frac{A}{2}$, de aceeaşi parte cu A faţă de BC, a cărui intersecţie cu P'Q' ne dă punctul M căutat.

Fie O' centrul acestui arc de cerc; se găseşte uşor pentru rază:

$$O'B = \frac{a}{2 \sin \frac{A}{4}},$$

iar pentru depărtarea O'D' la dreapta P'Q'

$$O'D' = \frac{(b+c) \sin \frac{3A}{4}}{2 \sin \frac{A}{4}}.$$

Pentru ca cercul O' să întâlnească dreapta P'Q' trebue să avem $O'B \geqslant O'D'$, care se reduce la

$$(b+c) \sin \frac{3A}{4} \leqslant a.$$

Acest caz (a_2) procură deci 2, 1, 0 soluţii, care adăugate la cele 2 singure date de cazurile a_1, a_3, b_2, c_3, permit a spune că:

In cazul când unghiul C *este obtuz, problema propusă admite 2, 3 sau 4 soluţii, numărul acestora scăzând cu o unitate dacă* $A = 60^0$.

9. Ne-a mai rămas, în fine, ipoteza $A > 90^0$ şi cazul c_2 (fig. 8*a*, 8*b* din articolul D-lui O. Ţino). Punctul M, intersecţia dreptelor BE, CD vine dedesubtul laturei BC, adică nu de aceeaşi parte cu A.

Din triunghiul isoscel BDE deducem:

$$\sphericalangle DBE = \sphericalangle DEB = \sphericalangle DEA + \sphericalangle AEB,$$

din triunghiul ABE deducem:

$$\sphericalangle DBE + \sphericalangle AEB = 180^0 - A,$$

deci

$$\sphericalangle DEA + 2 \sphericalangle AEB = 180^0 - A.$$

Din triunghiul isoscel DEC deducem:

$$\sphericalangle DCE = 90^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle DEA,$$

iar din triunghiul MCE

$$\sphericalangle CME = \sphericalangle DCE - \sphericalangle AEB = 90^0 - \frac{1}{2}(\sphericalangle DEA + 2 \sphericalangle AEB)$$

$$= 90^0 - \frac{1}{2}(180^0 - A) = \frac{A}{2}.$$

Deducem imediat

$$\sphericalangle BMC = 180^0 - \frac{A}{2},$$

deci vom descrie pe BC arcul de cerc capabil de unghiul $180^0 - \frac{A}{2}$, de partea opusă lui A; acest arc este tăiat de dreapta P'Q' în punctul M căutat. Vom avea de asemenea 2, 1, 0 soluţii corespunzătoare acestui caz, care împreună cu cele dela a_1, a_3, b_2, c_3, permit a spune:

Dacă unghiul A *este obtuz, problema admite 4, 3, 2 soluţii.*

M. GHERMĂNESCU.

PREMIUL DE ARITMETICĂ

Regulamentul premiului anual de aritmetică prevede la Art. 2 că acest premiu să se decearnă autorului unor lucrări de aritmetică dintre cele publicate în ultimul volum apărut, iar la Art. 3 prevede că autorul lucrărei trebue să fie român, elev de liceu.

In Volumul XLIII nu s'au publicat nici articole, nici note matematice semnate de elevi de liceu, aşa că am restrâns examenul nostru, la soluţiile date la cele 28 de probleme rezolvate de aritmetică.

In fruntea rezolvitorilor şi ca număr şi ca valoare, stă D-l M. F. AMĂRĂŞTEANU, care însă nu intră în prevederile Art. 3, nefiind elev de liceu.

Dintre elevii de liceu, acela care stă în primul rând este D-l M. VASILESCU-STABU, (elev la Liceul „Mihai-Viteazul", Alba-Iulia). D-sa a dat cele mai bune soluţiuni la problemele 4677, 4689, 4893 şi în special la problema 4736, care prezintă dificultăţi foarte serioase. D-sa a reuşit să dea acestei probleme o soluţie foarte completă şi elegantă în acelaş timp, clasificând şi reducând numărul cazurilor de examinat cu o logică strânsă, de spirit matur. La problema 4677 a dat deasemeni o prea frumoasă soluţie, afirmându-şi anume subtilităţi în mânuirea delicatelor probleme de teoria numerilor. De altfel, în afară de D-l M. AL. VASILESCU-STABU, numai încă un rezolvitor a atacat această problemă.

In fine, nu putem să neglijăm forma foarte îngrijită cu care D-l M. AL. VASILESCU-STABU trimete soluțiile sale.

Pentru aceste considerațiuni, propunem a se acorda D-lui M. AL. VASILESCU-STABU premiul de 5000 (cinci mii) lei, pentru aritmetică.

In sita cu care am cernut soluțiile problemelor de aritmetică, publicate în Vol. XLIII, au mai rămas două nume care merită să fie menționate.

Punem în rândul întâi pe D-ra ALEXANDRA AL. VASILESCU (Lic. de fete, Alba-Iulia), care a rezolvat tot așa de bine și complet ca și celălalt, problema 4677 și care a dat soluțiuni pline de originalitate problemelor 4689, 4633 și 4784.

Vine apoi pe aceeași linie D-l N. D. ȘTEFĂNESCU (elev Lic. „N. Filipescu", Târgoviște) pentru problemele 4663, 4855, 4868.

Regretăm că regulamentul și resursele nu ne îngăduie a le acorda premii, îi menționăm cu plăcere și cu nădejdea că numele D-lor vor stimula în viitor și pe alții să abordeze chestiunile de aritmetică.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL DE ARITMETICĂ
G-L GH. BUICLIU, PROF. ING. I. IONESCU,
CPT. C-DOR GH. ZAPAN.

Acest raport a fost citit și aprobat în ședința Adunării Generale de la 23 Februarie 1939.

NOTE MATEMATICE

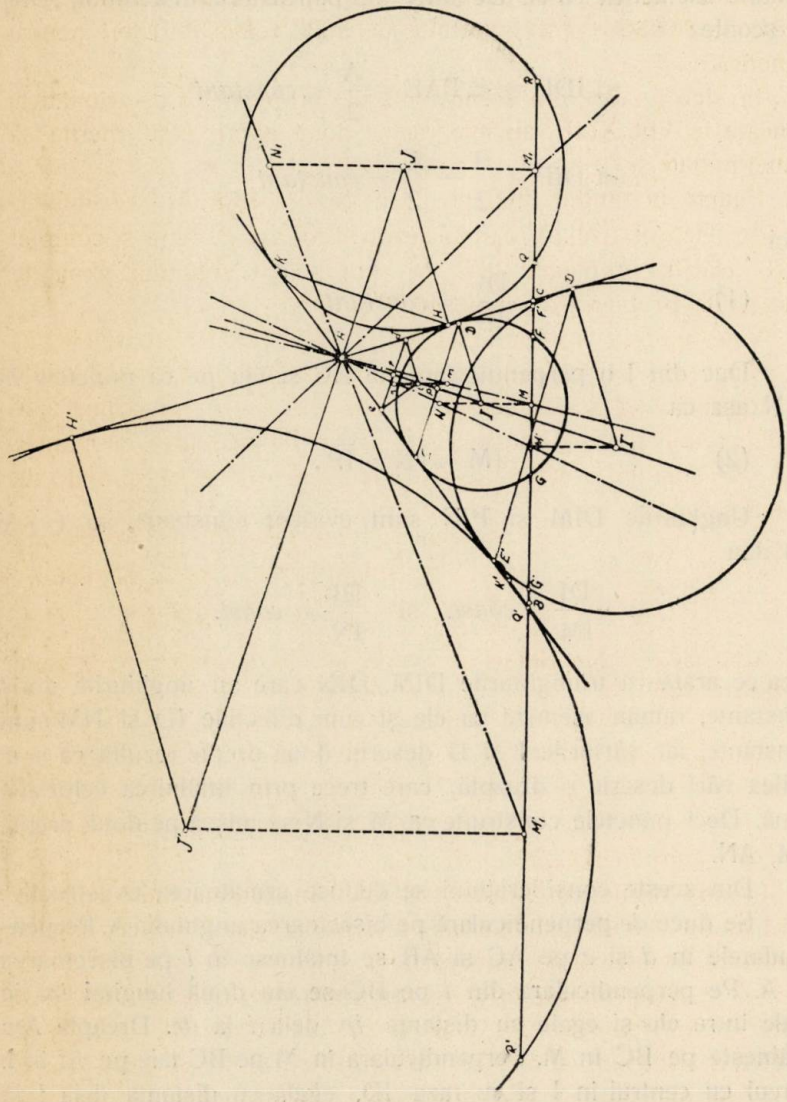
24. *O problemă de construcție.*

In luna Martie sau Aprilie 1938, pe când lucram într'o comisie la Ministerul Aerului și Marinei, D-l Locot. A. STAN mi-a pus următoarea problemă de construcție:

Să se construiască un cerc tangent în D *și* E *laturilor* AC, AB *ale unui triunghiu* ABC *și care să taie latura* BC *în* F *și* G *astfel ca corzile* DE *și* FG *să fie egale.*

Problema fiind foarte interesantă, m'am ocupat de ea, am rezolvat-o și am pregătit o notă să o public în *Gazeta Matematică*, dar nu am dat-o încă la imprimat din cauza figurei prea complicate. Acum găsind propusă această problemă la pag. 130, Vol. V,

în N-rul de pe Decemvrie 1938 — Ianuarie 1939 al revistei *Ştiinţă şi Progres*, public în această notă soluţia ce aveam pregătită.



Presupun problema rezolvită şi fie I centrul cercului căutat. Evident că I se află pe una din bisectoarele unghiului A şi că distanţele IP şi IM de la I la DE şi BC sunt egale. In fine

observ că ID $\perp$ AC şi că DE $\perp$ AI. Presupunând că deplasez pe DE paralel cu ea însăşi, se vede că triunghiul dreptunghic DPI rămâne asemenea cu el. De altfel din patrulaterul inscriptibil IDAF se scoate:

$$\sphericalangle IDP = \sphericalangle PAE = \frac{A}{2} = constant$$

$$\sphericalangle DIP = \frac{\Pi}{2} - \frac{A}{2} = constant$$

deci

$$(1) \qquad \frac{DI}{IP} = constant.$$

Duc din I o perpendiculară pe BC şi iau pe ea punctele M şi N aşa ca

$$(2) \qquad \overline{IM} = \overline{IN} = \overline{IP}.$$

Unghiurile DIM şi PIN sunt evident constante, iar (1) şi (2) dau

$$\frac{DI}{IM} = const. \quad şi \quad \frac{DI}{IN} = const.$$

ceea ce arată că triunghiurile DIM, DIN care au unghiurile din I constante, rămân asemeni cu ele şi cum direcţiile ID şi NM sunt constante, iar vârfurile I şi D descriu două drepte rezultă că şi al treilea vârf descrie o dreaptă, care trece prin întâlnirea celorlalte două. Deci punctele construite ca M şi N se mişcă pe două drepte AM, AN.

Din aceste consideraţiuni se deduce următoarea construcţie:

Se duce *de* perpendiculară pe bisectoarea unghiului A. Perpendicularele în *d* şi *e* pe AC şi AB se întâlnesc în *i* pe bisectoarea lui A. Pe perpendiculara din *i* pe BC se iau două lungimi *im*, *in* egale între ele şi egale cu distanţa *ip* dela *i* la *de*. Dreapta A*m* întâlneşte pe BC în M. Perpendiculara în M pe BC taie pe A*i* în I. Cercul cu centrul în I şi cu raza ID, egală cu distanţa dela I la AC sau AB, este cercul cerut. In adevăr el este tangent laturilor AB, AC şi deoarece distanţele IM şi IP la corzile DE, FG sunt egale, aceste corzi sunt de asemenea egale.

Luând intersecţia M′ a lui A*n* cu BC se obţine un al doilea cerc D′F′E′G′ tangent în D′, E′ la AC, AB şi pentru care D′E′ şi F′G′ sunt egale.

Aceleaşi construcţii ne dau cercurile cu centrele J şi J′ pe bisectoarea exterioară a unghiului A.

Problema este totdeauna posibilă şi are patru soluţiuni distincte.

In afară de această construcţie cu rigla şi compasul, problema se poate rezolva şi algebric, dând loc la o prea interesantă discuţie. Vom reveni, după ce se va publica soluţia problemei propusă în „*Ştiinţă şi Progres*“.

Problema se poate chiar generaliza înlocuind egalitatea

$$\overline{DE} = \overline{FG}$$

prin egalitatea

$$\overline{DE} = k \,.\, \overline{FG} \quad \therefore \quad \overline{DP} = k \,.\, \overline{FM}$$

unde k este o constantă.

Ca şi în cazul particular, triunghiul dreptunghic DPI rămâne asemenea cu el, iar unghiul DIM rămâne constant.

Din triunghiul dreptunghic IMF se scoate

$$\overline{IM}^2 = \overline{IF}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{ID}^2 - \frac{1}{k^2} \cdot \overline{DP}^2$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{IM}^2}{\overline{ID}^2} = 1 - \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\overline{DP}^2}{\overline{ID}^2}$$

şi cum $\frac{DP}{ID}$ este constant în triunghiurile asemeni DPI, rezultă că şi $\frac{IM}{ID}$ este constant. Deci M descrie o dreaptă IM şi construcţia este ca la cazul întâi cu deosebirea că raportul $\frac{im}{id}$ este dat de:

$$\frac{\overline{im}^2}{\overline{id}^2} = 1 - \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\overline{DP}^2}{\overline{ID}^2} \,.$$

Vom avea şi în acest caz general 4 soluţiuni.

G-L GH. BUICLIU.

25. *Asupra unei probleme din teoria ecuațiilor algebrice.* Intr'o conversație avută cu D-l Profesor S. STOILOW, D-sa mi-a comunicat, printre altele, următoarea proprietate:

Dacă $P(x)$ *este un polinom, nu există decât cel mult o singură constantă* a, *astfel ca ecuația* $P(x) - a = 0$ *să nu aibă nici o rădăcină simplă.*

Demonstrația e ușoară. Fie n gradul polinomului $P(x)$. Dacă ecuația

$$P(x) - a = 0 \tag{1}$$

nu are nici o rădăcină simplă, ea are cu ecuația derivată $P'(x) = 0$ cel puțin $n - \left[\frac{n}{2}\right]$ rădăcini comune distincte sau nu, unde $[\alpha]$ este cel mai mare întreg cuprins în α. Să presupunem acum că ar exista încă o constantă $b \neq a$ astfel ca ecuația

$$P(x) - b = 0 \tag{2}$$

să nu aibă nici o rădăcină simplă. Se vede că ecuațiile (1), (2) nu pot avea nici o rădăcină comună. Ar urma deci că ecuația derivată, care e de gradul $n - 1$, să aibă cel puțin $2n - 2\left[\frac{n}{2}\right] \geqq n$ rădăcini, ceea ce este imposibil.

a fiind o constantă, discriminantul ecuației (1) este un polinom de gradul $n - 1$ în a, deci ecuația (1) are totdeauna toate rădăcinile distincte, afară numai pentru $n - 1$ valori distincte sau nu ale lui a.

Să presupunem, în general, că ecuația (1) are k_1 rădăcini simple, k_2 rădăcini duble, ..., k_μ rădăcini de ordinul μ de multiplicitate. Avem atunci

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + \mu k_\mu = n.$$

Să presupunem deasemenea că ecuația (2), unde $b \neq a$, are l_1 rădăcini simple, l_2 rădăcini duble, ..., l_ν rădăcini de ordinul ν de multiplicitate, atunci

$$l_1 + 2l_2 + \ldots + \nu l_\nu = n.$$

Să mai presupunem că $\mu \geqq 3$, $\nu \geqq 3$ și că $p > 2$ este un număr natural cel mult egal cu μ și ν.

Ecuația derivată va avea cel puțin

$$k_2 + 2k_3 + \ldots (\mu - 1)\, k_\mu + l_2 + 2l_3 + \ldots + (\nu - 1)\, l_\nu$$
$$= 2n - k_1 - k_2 - \ldots - k_\mu - l_1 - l_2 - \ldots - l_\nu \text{ rădăcini.}$$

Dar

$$p(k_p + k_{p+1} + \ldots k_\mu) \leqq pk_p + (p+1)\, k_{p+1} + \ldots + \mu k_\mu$$
$$= n - k_1 - 2k_2 - \ldots - (p-1)\, k_{p-1} \leqq n - k_1 - k_2 - \ldots - k_{p-1},$$

și la fel

$$p(l_p + l_{p+1} + \ldots + l_\nu) \leqq n - l_1 - l_2 - \ldots - l_{p-1}.$$

Rezultă că ecuația derivată are cel puțin

$$2n - \sum_{i=1}^{p-1} (k_i + l_i) - \frac{2n - \sum_{i=1}^{p-1} (k_i + l_i)}{p} = \frac{p-1}{p} \left[2n - \sum_{i=1}^{p-1} (k_i + l_i) \right]$$

rădăcini.

Să presupunem că

$$\sum_{i=1}^{p-1} k \leqq \mathrm{N}, \quad \sum_{i=1}^{p-1} l_i \leqq \mathrm{N},$$

unde N este un număr natural. Atunci ecuația derivată are cel puțin

$$\frac{p-1}{p} (2n - 2\mathrm{N})$$

rădăcini. Deducem de aici că:

Fiind date numerele naturale $p > 2$ *și* N *nu există decât cel mult o valoare a constantei* a, *astfel ca ecuația* (1) *să aibă cel mult* N *rădăcini distincte de ordin de multiplicitate mai mic decât* p, *din moment ce gradul* n *al polinomului* $\mathrm{P}(x)$ *este mai mare decât* $\dfrac{2(p-1)\mathrm{N} - p}{p-2}$.

Proprietatea se mai poate enunța și astfel:

Fiind dat un număr natural $p > 2$ *și un polinom* $\mathrm{P}(x)$ *de gradul* n, *ecuația* (1) *are cel puțin* $r = \dfrac{(p-2)n + p}{2(p-1)}$ *rădăcini distincte de ordin de multiplicitate mai mic decât* p, *afară poate de cel mult o valoare a lui* a. *Dacă* r *nu este întreg se poate înlocui cu* $[r] + 1$.

La fel se demonstrează proprietatea ceva mai generală:

Fiind date numerele naturale $p > 2$, q, N, *nu există decât cel mult* q *valori distincte ale constantei* a, *astfel ca ecuația* (1) *să aibă cel mult* N *rădăcini distincte de ordin de multiplicitate mai mic decât* p, *din moment ce gradul* n *al polinomului* $P(x)$ *este mai mare decât* $\frac{(q+1)(p-1)N-p}{qp-q-1}$.

Se mai poate spune că:

Fiind date numerele naturale $p > 2$, q *și un polinom* $P(x)$ *de gradul* n, *ecuația* (1) *are cel puțin* $r = \frac{(qp-q-1)n+p}{(q+1)(p-1)}$ *rădăcini distincte de ordin de multiplicitate mai mic decât* p, *afară poate pentru cel mult* q *valori diferite ale lui* a. *Dacă* r *nu este întreg se poate înlocui cu* $[r]+1$.

TIBERIU POPOVICIU.

26. *Asupra problemei 4988.*

D-l M. AL. VASILESCU-STABU ne trimite o soluție a acestei probleme, în care observăm că pot exista și relațiunile:

$$\sum_1^n R(2^{\alpha_i}) = \sum_1^n R(2^{\alpha_i}-1)$$

și

$$\prod_1^n R(2^{\alpha_i}) = \prod_1^n R(2^{\alpha_i})-1).$$

I. L.

27. *Asupra problemei 4595.*

1°. In problema 4595, propusă în *Gazeta Matematică*, Vol. XLI, Nr. 3 de NICOLAE BOTEA, considerându-se patru puncte A, B, C, N situate într'un plan, se arată că un punct M care împlinește condițiile

$$(1)\quad (1+k)\overline{MA}^2 - k\overline{NA}^2 = (1+k)\overline{MB}^2 - k\overline{NB}^2 = (1+k)\overline{MC}^2 - k\overline{NC}^2$$

se găsește pe dreapta ON (O este centrul cercului ABC) și împarte segmentul $\overline{ON}$ în raportul k.

Condiţiile (1) sunt şi necesare pentru ca M să se afle pe ON şi să împartă $\overline{ON}$ în raportul k.

2°. Eliminând parametrul k între cele două relaţii (1), găsim:

$$\frac{\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2}{\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2} = \frac{\overline{NA}^2 - \overline{NB}^2}{\overline{NB}^2 - \overline{NC}^2},$$

care exprimă condiţia necesară şi suficientă ca punctul M situat în planul punctelor A, B, C, N să descrie dreapta ON (O fiind centrul cercului ABC).

Dacă notăm:

$$\frac{\overline{NA}^2 - \overline{NB}^2}{\overline{NB}^2 - \overline{NC}^2} = \lambda,$$

rezultă:

$$\overline{MA}^2 - (1+\lambda)\overline{MB}^2 + \lambda\overline{MC}^2 = 0,$$

exprimând că punctul M, aflat în planul punctelor A, B, C descrie o dreaptă.

Se regăseşte astfel — pentru cazul a trei puncte date A, B, C — proprietatea [1]).

„Fiind date punctele $A_i (i = 1, \ldots n)$ în acelaş plan, locul punctelor M pentru care

$$\sum_1^n \alpha_i \overline{MA}_i^2 = k \quad \text{şi} \quad \Sigma \alpha_i = 0,$$

este o dreaptă".

3°. Deasemenea rezultă proprietatea:

„Dându-se punctele O, N, A şi M pe ON astfel încât

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{MN}} = k,$$

punctul P definit de relaţia:

$$(1+k)\overline{MA}^2 - k\overline{NA}^2 = (1+k)\overline{MP}^2 - k\overline{NP}^2$$

descrie cercul de centru O şi rază OA".

C. IONESCU-BUJOR.

1) G. PAPELIER: Exercices de Géométrie moderne. Vol. I. Pag. 110.

28. *O proprietate a patrulaterului complet.*

Fie ABCDEF un patrulater complet, (A, C), (B, D), (E, F) fiind perechi de vârfuri opuse şi M, N două puncte în planul său, nesituate cumva pe laturile sale.

Conicele circumscrise celor patru triunghiuri ale patrulaterului şi care trec prin M şi N mai au un punct comun P.

Această proprietate decurge printr'o transformare omografică din chiar teorema lui MIQUEL. Totuşi demonstraţia directă nu este lipsită de interes.

Cubica constituită din conica (BCFMN) şi dreapta (ADE) taie cubica formată din conica (CDEMN) şi dreapta (ABF) în punctele A, B, C, D, E, F, M, N şi P, al patrulea punct comun conicelor (BCFMN) şi (CDEMN). Dacă considerăm acum şi cubica constituită din conica (ADFMN) şi dreapta (BCE), care trece prin cele opt puncte A, B, C, D, E, F, M, N puse în evidenţă, rezultă după teorema punctului al noulea. (Compléments de Géométrie moderne, CH. MICHEL, p. 103), că ea conţine şi punctul P.

Punctul P nu se găseşte pe dreapta (BCE), căci el nu se află pe laturile patrulaterului, deci el este situat pe conica (ADFMN). In mod analog se arată că şi conica (ABEMN) trece prin P.

Această proprietate poate căpăta diferite înfăţişări, dacă particularizăm punctele M, N. Dacă ele sunt două puncte oarecare pe dreapta dela inifinit obţinem:

Conicele circumscrise celor patru triunghiuri ale unui patrulater complet, cu aceleaşi direcţii asimptotice, au un punct comun real la distanţa finită.

Drept cazuri particulare ale acestei propoziţii avem teorema lui MIQUEL şi cazul parabolei şi hiperbolei echilatere.

Putem obţine şi alte propoziţii prin dualitate, sau particularizarea elementelor figurei.

ION ILIE ŢIŢEICA
Student.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXXVI. Nr. 4. Noemvrie 1938. Extensiuni ale teoremei ABEL-STOLZ asupra unor transformări lineare de JUAN C. VIGNAUX.

Buletinul Societăţii Politecnice din România. Anul LII. Nr. 10. Octomvrie 1938. Bucureşti. Invăţământul tecnic român de N. VASILESCU-KARPEN.

Buletinul Institutului Român pentru Betoane, Construcţii şi Drumuri. Anul III. Nr. 10—12. Octomvrie-Decemvrie 1938. Bucureşti.

Buletinul „I. R. E.". Anul VI. Nr. 4. Decemvrie 1938. Bucureşti.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 44. Nr. 12. Partea I. Decemvrie 1938. Menasha şi New-York.

Journal de Mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 63. Nr. 9, din 1 Februarie 1939. Paris.

Idem. Anul 63. Nr. 10, din 15 Februarie 1939. Paris.

Nieuw Archief voor wiskunde. Vol. XX. Nr. 1. 1939. Groningen.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVIII. Nr. 12. 15 Februarie 1939. † GHEORGHE ŢIŢEICA de V. ALACI. Trigonometria patratică (urmare) de V. ALACI.

Sphinx, revue mensuelle des questions récréatives. Anul IX. Nr. 3. Martie 1939. Asupra soluţiei ecuaţiei nedeterminate $x^4 + y^4 = kz^2$ de M. RIGNAUX. Relaţiunile învăţământului matematicelor cu alte învăţăminte de M. DECERF.

Ştiinţă şi progres, revista ştiinţifică a liceelor militare. Anul V. Nr. 6. Februarie 1939. Liceul militar Tg.-Mureş.

The Mathematical Gazette. Vol. XXIII. Nr. 258. Februarie 1939. Matematicele în şcoală şi universitate.

EMILE BOREL. *Traité du calcul des probabilités et de ses applications.* Tome IV. *Applications diverses et conclusions.* Fascicule II. *Application au jeux de hasard.* Redigé par JEAN VILLE. Paris. Gauthier Villars et Fils. 1938.

Intr'o broşură de 122 pagini, autorul publică cursul său făcut la Facultatea de Ştiinţe din Paris în anul 1936—1937. Se ştie că probleme relative la jocurile de noroc, în special cele cu zaruri, au condus la ideea calculului probabilităţilor. Domeniul acestui calcul s'a extins apoi la ştiinţa asigurărilor, la teorii de fizică, etc.

Capitolul I se ocupă cu jocurile de zaruri şi următorul cu celebra problemă a partidelor, adică a împărţirii raţionale a mizelor când jocul nu se termină.

Capitolul III se ocupă de probleme relative la cărţile de joc.

Capitolul IV de chestiunile de ordin psihologic care intervin la multe jocuri de noroc. Aci se ţine seamă de abilitatea jucătorilor, care schimbă rezultatele ce le-ar da numai norocul. Se studiază în Capitolul V din acest punct de vedere jocul de *Pocker.*

La fine este o notă a D-lui JEAN VILLE asupra teorii generale a jocurilor în care intervine abilitatea jucătorilor şi o notă asupra acestei chestiuni a D-lui EMILE BOREL.

Cartea aceasta este interesantă prin problemele pe care le tratează şi prin faptul că ea arată cum calculul probabilităţilor pătrunde din ce în ce mai mult în studiul faptelor fizice certe.

Nu trebuie însă ca jucătorii să creadă că prin asemenea cărţi se pot da reguli certe pentru a câştiga orice joc, căci atunci toată lumea ar câştiga şi nu ar mai pierde nimeni cari să le dea bani de câştig; cel mult se poate da unora mijloace de a exploata pe neştiutori. Cartea e mai utilă oamenilor de ştiinţă decât jucătorilor.

I. I.

N. ABRAMESCU. *Sur les coniques osculatrices à une courbe et sur l'étude de la forme d'une courbe ou voisinage d'un de ses points.* (Publicat în *Bulletin mathématique des Facultés des Sciences et des Grands Ecoles.* Publications de la Faculté des Sciences de Marseille. Juillet - Août 1938. Bar-Le-Duc).

CERERI

283. Asupra Riglelor de Calcul s'au publicat în această revistă, un articol de către ION G. ZOTTU în anul I şi o recenzie a Riglei lui BÉGHIN în anul IV pag. 108, de către C. ERBICEANU. Unde se mai găsesc tratate Riglele de calcul, în limba română, prin cărţi de matematici pure sau aplicate, ori în broşuri speciale?

I. I.

DIVERSE

a) Şedinţele Societăţii „Gazeta Matematică".

Joi 23 Februarie a avut loc Adunarea generală a membrilor Societăţii «*Gazeta Matematică*». S'a comemorat memoria profesorului GH. ŢIŢEICA fost membru al Societăţii, păstrându-se apoi câteva clipe de reculegere şi hotărîndu-se ca premiul de Geometrie să poarte deacum înainte numele: Premiul „GH. ŢIŢEICA".

După aceasta s'a trecut la ordinea de zi.

A fost ales membru în Delegaţia Societăţii D-nul Ing. D. STOICA, în locul D-lui Ing. D. STAN, al cărui mandat a expirat.

Au fost admişi ca noui membri în Societate D-nii: ANDREI DOBRESCU, N. GHIRCOIAŞIU, TIBERIU IONESCU, BAL LASCU, EMIL GH. MORŢUN, AL. STOENESCU.

A fost exclus dintre membrii Societăţii D-l ROD N. RACLIŞ.

S'a admis să se acorde corespondenţilor Gazetei, cari îndeplinesc condiţiunile prevăzute de Regulamentul Premiilor, premiile specificate mai jos:

Premiul „*Ing. Al. Roşu*“ . . . . D-lui NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU.
„ „*V. Cristescu*“ . . . . . „ D. MAVRODIN.
„ de *Aritmetică* . . . . . „ MIRCEA AL. VASILESCU-STABU.
„ „ *Algebră* . . . . . „ N. D. ŞTEFĂNESCU.
„ „ *Geometrie Elementară* „ MIRCEA AL. VASILESCU-STABU.

Premiul „*Spiru Haret*“ nu s'a acordat, neîntrunind nimeni condiţiunile

b) Sporirea Bibliotecii.

C. ALASIA. Producto de una serie cualquiera por la exponencial e^{-x} Tempio.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Sulle involuzioni di ordine superiori. Civitanova Marche. 1898.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Su di alcune proprietà delle linee geodetiche Sassari, 1898.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Relazioni fra gli elementi di un triangolo piano. Num. 566 formule. Città di Castello. 1900.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Une méthode élémentaire de recherches des maxima et des minima et ses applications. Bucarest. 1902.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Su di alcune proprietà delle superficie a generatrice circolare. 1901.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Sul movimento di una sfera che rotola in un plano mobile non orizontale. Pavia, 1905.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. H. FAYE. Pavia. 1902,
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Nozioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni. Palermo. 1905.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3236. *Se dau două drepte* D *şi* D', *care se taie în* A *şi punctul* P *în planul lor. O dreaptă variabilă, ce trece prin* P, *taie dreptele* D *şi* D' *în punctele* B *şi* C. *Să se arate că locul ortocentrului triunghiului* ABC *este o conică. Să se afle locul centrului acestei conice, când* P *descrie un cerc cu centrul în* A *şi de rază dată.*

P. TROFIMOV.

Soluţie dată de DORA SONNENREICH, G. G. CONSTANTINESCU, V. COŞNIŢĂ, N. TEODORESCU, I. C. VASILIU şi E. WEISS.

Fie (a, b) coordonatele lui P şi

$$y = mx \tag{1}$$

ecuaţia dreptei D' în sistemul de axe AD şi perpendiculara în A pe D. Dacă λ este un parametru variabil atunci ecuaţia dreptei PB este

$$y - b = \lambda (x - a) \tag{2}$$

$$\therefore \quad B\left[\frac{a\lambda - b}{\lambda}, 0\right]$$

şi deci ecuaţiile înălţimilor AA', BB' ale triunghiului ABC, vor fi

$$y = -\frac{1}{\lambda} x \tag{3}$$

$$y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{a\lambda - b}{\lambda}\right). \tag{4}$$

Locul ortocentrului triunghiului ABC se află eliminând pe λ între ecuaţiunile (3) şi (4). Găsim hiperbola

$$x^2 + mxy - ax - by = 0 \tag{5}$$

care trece prin origina A şi prin proecţia lui P pe D.

Coordonatele centrului acestei hiperbole sunt date de ecuaţiile

$$2x + my - a = 0$$

$$mx - b = 0.$$

Eliminând pe a şi b între aceste ecuaţiuni şi relaţiunea

$$a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

se găseşte că atunci când $P(a, b)$ descrie cercul

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

centrul hiperbolei (5) descrie elipsa

$$(4 + m^2)\, x^2 + 4mxy + m^2 y^2 - R^2 = 0.$$

PROBLEMA 4822. *Se dau două cercuri ortogonale* O *şi* O_1, *care se taie în* P *şi* P_1, *şi punctul* A *pe cercul* O_1. *Dreapta* AP *taie cercul* O *a doua oară în* B, *iar dreapta* BP_1 *taie cercul* O_1 *a doua oară în* C.

Când A *este mobil pe cercul* O_1, *care este locul centrului cercului* ABC.

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU.

1°. *Soluţie* şi *generalizare:*

Considerăm mai general două cercuri oarecare O, O_1, care se taie în P şi P_1, restul de construcţii fiind cel indicat în enunţul problemei.

Cum dreptele AC, PP_1 sunt antiparalele, iar centrul cercului circumscris unui triunghiu este situat pe izogonala înălţimei, rezultă că perpendicularele BB'_h, BB_h respectiv pe PP_1, AC, sunt simetrice în raport cu bisectoarea unghiului ABC şi deci conţin centrele ω, O ale cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, BPP_1. Pe de altă parte, ω se găseşte şi pe perpendiculara ridicată în mijlocul B_m al segmentului AC, perpendiculară ce trece prin O_1.

Ca urmare a celor stabilite mai sus, rezultă că patrulaterul $OB\omega O_1$ este un paralelogram şi în consecinţă locul centrului ω al cercului circumscris triunghiului ABC este cercul de centru O_1 şi rază egală cu a cercului O.

Observări:

1°. Ortocentrul H al triunghiului ABC este situat pe înălţimea BOB_h, astfel ca: $BH = 2 \cdot \omega B_m$.

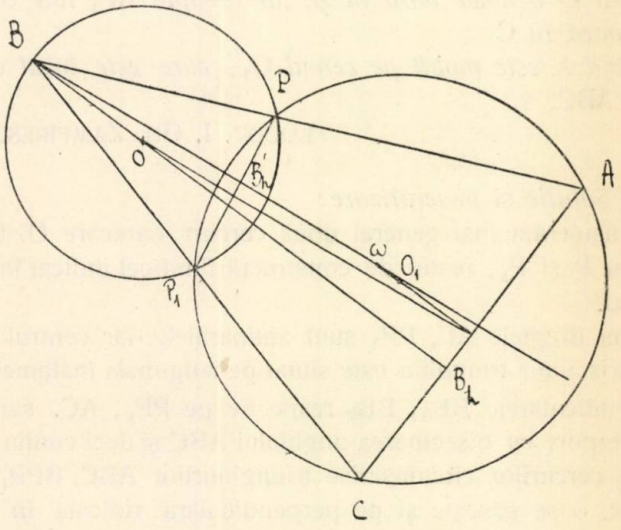
Ori unghiul constant ABC are ca măsură : $^1/_2$ (arc AC — arc PP_1) şi cum arcul PP_1 este fix, rezultă că arcul AC este constant şi deci la fel coarda AC şi ca urmare distanţa O_1B_m este invariabilă în raport cu poziţia lui A pe cercul O_1.

Deci, locul lui H este cercul de centru O şi rază egală cu:

$$OH = 2 \cdot \omega B_m - OB = 2(\omega O_1 + O_1B_m) - OB = OB + O_1B_m = \text{const.}$$

2°. Centrul de greutate G este aşezat după cum se ştie pe mediana BB_m la $^2/_3$ plecând din B, mediană ce trece prin punctul fix E de pe linia centrelor OO_1, întrucât din trapezul BOO_1B_m rezultă:

$$\frac{EO}{EO_1} = \frac{OB}{O_1B_m} = \text{const.}$$



Paralela dusă prin G la ωB_m taie pe OO_1 în F, astfel că vom avea succesiv:

$$\frac{EO}{EF} = \frac{EB}{EG}\ ;\ \frac{EO + EF}{EF} = \frac{EB + EG}{EG} \text{ sau: } \frac{FO}{EF} = \frac{GB}{EG} \ldots \quad (1)$$

$$\frac{EF}{EG} = \frac{EO_1}{EB_m}\ ;\ \frac{EF}{EG} = \frac{EO_1 - EF}{EB_m - EG} \text{ sau: } \frac{EF}{EG} = \frac{FO_1}{GB_m} \ldots \quad (2)$$

Din ultimele relaţii ale şirurilor (1), (2) deducem:

$$\frac{FO}{GB} = \frac{EF}{EG} = \frac{FO_1}{GB_m}.$$

Deci, punctul F împărţind segmentul OO_1 în raportul $FO/FO_1 = 2$, va fi fix şi cum avem:

$$\frac{FG}{O_1B_m} = \frac{EF}{EO_1} \; ; \; FG = \frac{EF}{EO_1} . O_1B_m = \text{const.},$$

rezultă că locul lui G e un cerc de centru F.

3°. Razele $O_1\omega$, OH, FG ale cercurilor locuri geometrice ale centrului cercului circumscris, ortocentrului şi centrului de greutate în triunghiul ABC sunt paralele şi au extremităţile lor ω, H, G situate pe dreapta lui EULER a triunghiului considerat. Rezultă dar, că cele trei cercuri sunt omotetice în raport cu punctul de intersecţie al liniei centrelor lor OFO_1, cu dreapta $HG\omega$.

4°. Este de observat apoi, că toate cevienele importante dintr'un triunghiu şi care pleacă din vârful B al triunghiului variabil ABC, trec prin câte un punct fix.

a) S'a văzut astfel că înălţimea BB_h trece prin punctul fix O.

b) Simediana ce pleacă din vârful B în triunghiul ABC, este mediană în triunghiul PBP_1 şi deci trece prin mijlocul segmentului PP_1, evident fix.

c) Mediana BB_m a triunghiului ABC, este simediană în triunghiul PBP_1 şi ca urmare ea va trece prin intersecţia tangentelor în P şi P_1 la cercul O. Deci această intersecţie se confundă cu punctul fix E (prin care am văzut că trece mediana), întrucât mediana considerată nu este invariabilă.

Dacă cercurile O, O_1 sunt ortogonale, punctul E vine în O_1 şi din:

$$EO_1/EO = O_1B_m/OB,$$

rezultă că:

$$O_1B_m = 0.$$

Deci AC trece în acest caz prin O_1 şi ca urmare, dreptele AP_1, CP trece prin ortocentrul H, punct ce aparţine de astădată cercului O, după cum uşor se poate vedea.

d) Bisectoarea unghiului B evident conţine mijlocul fix al arcului PP_1 din cercul O.

Ea fiind însă şi bisectoare în triunghiul OBω, vom avea, notând cu L intersecţia ei cu segmentul Oω:

$$LO/L\omega = BO/B\omega = BO/OO_1 = k = \text{const.},$$

de unde:

$$OL/O\omega = k/k+1 = \text{const.}$$

Cum O este fix, iar ω descrie un cerc, rezultă că L va descrie un cerc omotetic primului, în raport cu O ca centru de omotetic.

M. C. POSTELNICESCU
Elev-Inginer, Bucureşti.

2°. *Soluţia II.* Fie D şi E proecţiile punctelor P şi B pe AC. Dreptele PO_1 şi PD sunt izogonale în unghiul APC, deci:

$$\sphericalangle O_1PC = \sphericalangle DPA = \sphericalangle EBA = \sphericalangle BPO,$$

deoarece triunghiul BOP este isoscel. Dar din cauza ortogonalităţi cercurilor date,

$$\sphericalangle O_1PC + \sphericalangle CPO = 90^0$$

sau

$$\sphericalangle BPO + \sphericalangle OPC = 90^0$$

deci dreapta CP este perpendiculară pe AB şi cum

$$\sphericalangle APC = 90^0,$$

AC trece prin O_1. *Deci unghiul* B *al triunghiului* ABC, *unghiu înscris în cercul* (O), *a cărui măsură este* $\frac{1}{2}$ *are* PP_1 *este constant, latura* AC *are lungimea constantă (diametrul cercului* (O_1)*) şi mijlocul segmentului* AC, O_1 *este fix.*

Distanţa centrului ω al cercului ABC la BC, notată *d* este

$$d = r_1 \operatorname{tg}\overset{\frown}{\omega CO_1} = r_1 \operatorname{tg}\overset{\frown}{PCB} = r_1 \operatorname{cotg} B$$

(r_1 fiind raza cercului O

deci locul centrului cercului ABC este un cerc de centru O_1 şi d rază $r_1 \operatorname{cotg} B = r$ (r = raza cercului O).

In adevăr, din triunghiul dreptunghiu O_1PO,

$$r = r_1 \operatorname{cotg}\overset{\frown}{POO_1} = r_1 \operatorname{cotg} B,$$

deoarece

$$\sphericalangle POO_1 = \tfrac{1}{2} \sphericalangle POP_1 = \sphericalangle B.$$

Observaţiune. CP este înălţime a triunghiului ABC, analog se arată acelaşi lucru pentru AP_1. Patrulaterul (AP_1, CP) PBP_1 fiind inscriptibil, cercul PBP_1 trece prin (AP_1, CP) ortocentrul triunghiului ABC. Deci locul ortocentrului triunghiului ABC este cercul (O).

Soluţie asemănătoare a dat D-l VICTOR FLORESCU (clasa VII-a, Liceul militar „Nicolae Filipescu").

3°. *Soluţia III.* Se arată ca în soluţia precedentă că dreptele PC şi AP_1 sunt înălţimi ale triunghiului ABC şi că ortocentrul triunghiului se află pe cercul (O). Apoi urmăm astfel: Cercul O_1PP_1 este cercul lui EULER al triunghiului ABC şi cum punctele O_1, P, P_1 sunt fixe, rezultă că toate cercurile ABC au acelaş cerc al lui EULER. ω centrul său, este centrul de simetrie al centrului cercului ABC şi ortocentru. Cum ortocentrul descrie cercul (O), centrul cercului ABC descrie simetricul cercului (O) faţă de ω.

In acest mod a soluţionat problema D-l M. AL. VASILESCU-STABU (clasa VI-a Liceul Mihai Viteazu Alba-Iulia).

4°. S'au primit alte soluţii dela D-nii: IOAN V. JAREGHIE, CONSTANTIN V. PANTELIMON, M. D. POPA, ACHILE PETRESCU şi SANDU R. TURCU toţi dela Liceul militar Iaşi.

Domnul ADOLF DEUTSCH a dat şi o soluţie analitică.

5°. *Notă.* Problema se mai poate pune şi astfel:

Fie ABC *un triunghiu cu unghiul* B *constant şi latura* AC *de lungime constantă mobilă în jurul mijlocului* B_1. *Locul geometric al centrului cercului circumscris este un cerc* ω *cu centrul în* B_1 *şi având raza egală cu raza cercului* ω' *ce trece prin* B *şi prin picioarele înălţimilor corespunzătoare vârfurilor* A, C — *iar locul ortocentrului este cercul* ω'.

C. I. B.

PROBLEMA 4838. *Să se demonstreze că:*

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{1}^{n} \frac{u_i}{x^i} = 0$$

u_n *fiind termenul de rang* n *în şirul lui* FIBONACCI.

G-L GH. BUICLIU.

Patru luni după ce am propus această problemă, s'a publicat, la pag. 142, Vol. XLIII, soluţia problemei 2397 în care s'a stabilit că valoarea sumei

$$(1) \qquad S = 1 + \frac{2}{p} + \frac{3}{p^2} + \frac{5}{p^3} + \frac{8}{p^4} + \dots$$

este dată de

$$(2) \qquad S = \frac{p^2}{p^2 - p - 1}.$$

Se observă că numărătorii fracţiilor din (1) sunt termenii consecutivi ai şirului lui FIBONACCI, deci S este tocmai suma a cărei limită se cere. Din (2) se vede că dacă p tinde spre infinit, limita lui S este 1, ceea ce demonstrează proprietatea.

D-l PROFESOR M. GHERMĂNESCU mi-a comunicat în Decemvrie 1938 că soluţia problemei 4838 este cuprinsă în soluţia problemei 2397.

Problema 4838 care este anterioară soluţiei problemei 2397, îşi are origina în o serie de proprietăţi a şirului FIBONACCI, care m'au condus la problemele 4465 şi 4689 ale căror soluţiuni s'au publicat în Vol. XLIII.

GH. B.

PROBLEMA 4908. *Să se calculeze expresia:*

$$E = \frac{5y^2}{9x^2 - 3y} - \frac{x^2(27x^2 - y)}{3(9x^4 - y^2)} + \frac{x^2 - 6y}{3y} - \frac{x^2(x^2 - y)}{y(3x^2 + y)}.$$

GH. VASILIU.

Soluţia D-lor BÂRLEA G. VICTOR, CÂRDEIU D. GH., CETĂŢEANU STELIAN, CORNĂŢEANU AUREL, DIACONESCU D. ION, GOLDENBERG IACOB, GRUMĂZESCU M., MIROSLAV ST. TUDOREL, PANTELIMON V. CONST., PÂRVULESCU AL. VLADIMIR, PETRESCU ACHILE, POPA D. MIRCEA, POPESCU-ZORICA N. AL., PRECIADO I. THEODOR, ROŞCULEŢ MARCEL, SAVIN I. ION, ŞERBĂNESCU ŞTEFAN, STREDER I., TILICĂ C. ŞTEFAN, TURCU R. SANDU şi VIJELIE GH. EUGEN, este următoarea:

Expresia adusă la acelaş numitor şi făcându-i toate reducerile se scrie succesiv:

$$E = \frac{5x^2y(3x^2+y)-x^2y(27x^2-y)+(x^2-6y)(9x^4-y^2)-3x^2(x^2-y)(3x^2-y)}{3y(9x^4-y^2)}$$

$$= \frac{6y^3+2x^2y^2-54x^4y}{3y(9x^4-y^2)} = 2\left(\frac{x^2y}{3(9x^4-y^2)}-1\right).$$

Dacă expresia ar fi fost:

$$E = \frac{5x^2}{9x^2-3y} - \frac{x^2(27x^2+y)}{3(9x^4-y^2)} + \frac{x^2-6y}{3y} - \frac{x^2(x^2-y)}{y(3x^2+y)}$$

atunci s'ar fi găsit:

$$E = -2.$$

Soluţii în care expresia nu a fost simplificată la forma cea mai simplă şi care nu au remarcat că diferenţa dela numărătorul celei de a doua fracţii ar fi trebuit transformată într'o sumă pentru a obţine un rezultat şi mai simplu s'au primit dela D-rele: CRĂCIUNESCU I. MIOARA, GEREANU C. ANA, BACIU I. MARGARETA, ROMAŞCANU GEORGETA, TUDORAN M. SONIA şi dela D-nii: ALEXANDRESCU C. MIHAIL, ANDRONACHE VIRGIL, BARTIC GH. GH., BODNĂRESCU M. HORIA, BOIAN EMIL, BONCEA N. NIC., BOSINCEANU D. GH., BOTEZ D. TRAIAN, BROTEA T. GH., COSTINESCU P. ADRIAN, CURCĂ C., DUMITRESCU M. GH., FLORESCU VICTOR, FLOAREŞ I. ADRIAN, GVIAZDOMORSCHI E. ROMULUS, HORTOPAN GH. GH., KERCIU S., IONESCU B. M. GH., JIPA C. NIC., LUPULESCU C. AUREL, MAZILU C. GH., NECŞESCU I. AUREL, NICULESCU V. CORNELIU, OBREJA DORIN, PĂDUREŢ A. VASILE, PETRESCU MIHAI, POPA C. BENONE, RUSU I. EUG., SECU V. DINU, SEGAL JOE, SOLOMON I. I., TĂTARU N. NIC., TOPALESCU S. GH., VASILESCU-STABU AL. M. şi VLAD I. C. MIHAI.

S'au primit şi 7 soluţii complet greşite.

GH. V.

PROBLEMA 4921. *Se dă un triunghiu* ABC *şi un punct* P *în planul său, se notează* A', B', C' *baricentrele triunghiurilor* PBC, PCA, PAB. *Fie* α *intersecţia dreptei* B'C' *cu dreapta ce uneşte mijlocul lui* AP *cu simetricul piciorului cevienei* AP *pe latura* BC *faţă de mijlocul acestei laturi. Fie* β, γ *punctele analoage pe dreptele* C'A', A'B'.

Să se arate că dreptele A'α, B'β, C'γ *sunt concurente în* G, *baricentrul triunghiului* ABC.

AD. GHEORGHIU.

Soluţia I dată de D-l NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU (Bucureşti).

Presupunem triunghiul ABC omogen şi de greutate F aplicată, cum se ştie, în baricentrul G.

Punctul P împarte triunghiul în trei triunghiuri PAB, PBC, PCA de greutăţi respectiv F_c, F_a, F_b aplicate în baricentrele lor C', A', B', ca forţe paralele şi de acelaşi sens dacă P e în interiorul triunghiului ABC sau una de sens contrar celorlalte dacă P e în afara triunghiului ABC.

Compunând forţele F_a, F_b, F_c obţinem deci ca rezultantă orţa F aplicată în G. Să executăm această compunere de exemplu, astfel: compunem forţele F_b şi F_c şi apoi rezultanta parţială a acestora s'o compunem cu F_a:

Fie deci r punctul de aplicaţie al rezultanţei parţiale $F_b + F_c$, pe dreapta B'C' şi după cum se ştie astfel ca:

$$\frac{\overline{rC'}}{\overline{rB'}} = \frac{F_b}{F_c} = \frac{\text{aria } \overline{PCA}}{\text{aria } \overline{PAB}}. \tag{1}$$

Triunghiurile PCA şi PAB au însă o bază comună PA deci Cc şi Bb fiind respectiv înălţimele corespunzătoare acestei baze în cele două triunghiuri, avem:

$$\frac{\overline{rC'}}{\overline{rB'}} = \frac{\overline{Cc}}{\overline{Bb}}. \tag{2}$$

L_1 fiind piciorul cevienei AP pe BC şi L_2 simetricul său faţă de mijlocul acestei laturi avem:

$$\frac{\overline{Cc}}{\overline{Bb}} = \frac{\overline{L_1C}}{\overline{L_1B}} = \frac{\overline{L_2B}}{\overline{L_2C}}. \tag{3}$$

Deci din relaţia (2) rezultă: $\frac{\overline{rC'}}{\overline{rB'}} = \frac{\overline{L_2B}}{\overline{L_3C}}$. (4)

Adică, A_1 fiind mijlocul lui AP şi cum C'B' e omotetica lui BC faţă de A_1 şi în raportul $^3/_1$ rezultă că r este intersecţia (C'B', A_1L_2). Deci r punctul de aplicaţie al rezultantei $F_b + F_c$ coincide cu punctul α din enunţ şi deci compunând această rezultantă parţială cu forţa F_a din A', rezultanta totală are punctul de aplicaţie pe A'α; cum această rezultantă totală este însăşi F, greutatea triunghiului ABC, reese că *dreapta* A'α *conţine baricentrul* G *al triunghiului* ABC.

Analog se arată că B'β *şi* C'γ *trec prin* G.

Observare. Punctul α se poate introduce pe aceeaşi cale de consideraţiuni mecanice:

Să observăm că centrul de greutate al suprafeţei triunghiului coincide cu centrul forţelor paralele şi de acelaşi sens, egale, aplicate în vârfuri.

Fie atunci aplicate în vârfurile triunghiurilor PAB, PBC, PCA respectiv câte trei forţe de valori $\frac{1}{3}F_c$, $\frac{1}{3}F_a$, $\frac{1}{3}F_b$. Astfel că compunerea forţelor F_b şi F_c din B' şi C' se poate face în două moduri:

Direct, ca mai sus, dând rezultante aplicată pe C'B'; şi indirect compunând cele şase forţe din vârfurile triunghiurilor PCA şi PAB astfel: cele din A şi B unde avem câte o forţă egală cu $\frac{1}{3}F_c + \frac{1}{3}F_b$ şi a căror rezultantă e aplicată în mijlocul A_1 al lui AP. Apoi forţele: $\frac{1}{3}F_c$ din B şi $\frac{1}{3}F_b$ din C, care dau o rezultantă în L_2 pe BC obţinut ca mai sus. Incât prin acest al doilea mod, aceeaşi rezultantă apare aplicată pe dreapta A_1L_2. Deci din aceste două moduri de-a defini aceeaşi rezultantă $F_b + F_c$, reese că punctul ei de aplicaţie este intersecţia $\alpha \equiv$ (C'B', A_1L_2).

Soluţia II dată de D-nii: M. AL. VASILESCU-STABU cl. VI-a liceul „Mihai Viteazu", Alba-Iulia şi VIRGIL ECKSTEIN elev inginer.

a) *Dreptele* A'α, B'β, C'γ *sunt concurente:*

1. Se observă că triunghiul A'B'C' e invers omotetic triunghiului ABC în raportul $\frac{1}{3}$ şi faţă de punctul ω = (AA', BB', CC'). Considerând dreptele concurente A_1B, A_1L_2, A_1C (cu notaţiile de mai sus) tăiate de paralelele C'B' şi BC, avem:

$$\frac{\overline{\alpha B'}}{\overline{\alpha C'}} = \frac{\overline{L_2C}}{\overline{L_2B}} = \frac{\overline{L_1B}}{\overline{L_1C}} \qquad (1)$$

căci L_1 şi L_2 sunt simetrice faţă de mijlocul L al laturei BC.

Analog avem, M, M_1, M_2; N, N_1, N_2 fiind punctele analoage lui L, L_1, L_2 pe laturile CA, AB:

$$\frac{\overline{\beta C'}}{\overline{\beta A'}} = \frac{\overline{M_2A}}{\overline{M_3C}} = \frac{\overline{M_1C}}{\overline{M_1A}} \quad (2) \qquad \text{şi} \qquad \frac{\overline{\gamma A'}}{\overline{\gamma B'}} = \frac{\overline{N_2B}}{\overline{N_2A}} = \frac{\overline{N_1A}}{\overline{N_1B}}. \quad (3)$$

De aci rezultă că α, β, γ şi L_1, M_1, N_1 sunt puncte respectiv omoloage în cele două triunghiuri omotetice A'B'C' şi ABC dec şi dreptele $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sunt respectiv omoloage dreptelor AL_1, BM_1, CN_1. Cum acestea din urmă sunt concurente în P, prin ipoteză, şi primele sunt concurente în omologul să P' în aceeaşi omotetie (M. AL. VASILESCU-STABU).

2. Din şirurile de rapoarte (1), (2), (3) obţinem:

$$\frac{\overline{\alpha B'}}{\overline{\alpha C'}} \cdot \frac{\overline{\beta C'}}{\overline{\beta A'}} \cdot \frac{\overline{\gamma A'}}{\overline{\gamma B'}} = \frac{\overline{L_2C}}{\overline{L_2B}} \cdot \frac{\overline{M_2A}}{\overline{M_2C}} \cdot \frac{\overline{N_2B}}{\overline{N_2A}}$$

$$= \frac{\overline{L_1B}}{\overline{L_1C}} \cdot \frac{\overline{M_1C}}{\overline{M_1A}} \cdot \frac{\overline{N_1A}}{\overline{N_1B}} = -1$$

căci prin ipoteză $(AL_1, BM_1, CN_1) \equiv P$. Ceea ce arată că $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sunt concurente într'un punct P' care în virtutea aceloraşi rapoarte e omologul lui P din triunghiul ABC în triunghiul asemenea A'B'C' (VIRGIL ECKSTEIN, M. AL. VASILESCU-STABU).

b) *Punctul* P' *coincide cu baricentrul* G.

1. Observăm că $AL_1 \parallel A'\alpha \parallel C_1M$ căci C_1 şi M sunt mijloacele lui CP şi CA. A' fiind însă baricentrul în PBC avem $\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC_1}} = \frac{2}{3}$, iar $A'\alpha$ fiind paralelă cu C_1M, taie pe BM în acelaşi raport $\frac{2}{3}$, ori punctul care împarte mediana BM a triunghiului ABC în raportul $\frac{2}{3}$ este însăşi baricentrul său. Deci $A'\alpha$ trece prin G, analog se arată că $B'\beta$ şi $C'\gamma$ trec prin G, deci P' coincide cu G (M. AL. VASILESCU-STABU).

Observare. Această demonstraţie stabileşte simultan ambele proprietăţi *a)* şi *b)*.

2. Punctele P şi P′ fiind omoloage în omotetia $ABC \to A'B'C'$ $\left(\omega, -\frac{1}{3}\right)$, să găsim indirect poziţia punctului P′ observând că avem omotetiile succesive:

$$ABC \to LMN \quad \left(G, -\frac{1}{2}\right)$$

$$LMN \to A'B'C' \left(P, \quad \frac{2}{3}\right).$$

Deci numind P_1 omologul lui P în LMN avem, aplicând cele două omotetii:

$P \to P_1 \to P'$, adică avem:

$$\frac{\overline{GP_1}}{\overline{GP}} = -\frac{1}{2} \text{ şi apoi } \frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP'_1}} = \frac{3}{2}.$$

Ori din primul raport avem:

$$\frac{\overline{PG} + \overline{GP_1}}{\overline{PG}} = \frac{3}{2} \text{ adică } \frac{\overline{PP_1}}{\overline{GP}} = \frac{3}{2}$$

şi comparând cu al doilea raport rezultă:

$$\overline{PP'} = \overline{PG}$$

adică P′ coincide cu G (VIRGIL ECKSTEIN).

Soluţia III dată de D-nii: ACHILE PETRESCU, TURCU R. SANDU (lic. Milit. Iaşi) şi HORIA M. BODNĂRESCU (Sem. Ped. Titu Maiorescu, Bucureşti), este analoagă soluţiei dela punctul *b.* 1) de mai sus.

Soluţia IV de geometrie analitică, a fost dată de D-nii: AUREL I. CORNĂŢEANU şi I. STREDER dela liceul Militar Iaşi.

Observaţiuni făcute de D-l M. AL. VASILESCU-STABU.

1. Dreptele AL_2, BM_2, CN_2 sunt concurente în G_1.

2. Dreptele αL_1, βM_1, γN_1 sunt concurente în ω.

3. Notând cu $\alpha' \equiv (C'B', A_1L_1)$ şi β', γ' analoagele dreptele $A'\alpha'$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sunt concurente într'un punct G'_1 omologul lui G_1 în omotetie $ABC \to A'B'C'$ $\left(\omega, -\frac{1}{3}\right)$.

4. Punctele G_1, ω, G'_1 sunt colineare.

5. Dreptele $\alpha'L_2$, $\beta'M_2$, $\gamma'N_2$ sunt concurente în ω.

6. Ereptele A_1L, B_1M, C_1N sunt concurente în ω.

7. Dreptele A_1A', B_1B', C_1C' sunt concurente în ω_1.

8. Punctele ω, G, P sunt colineare fiind centrele de omotetie a trei triunghiuri omotetice două câte două.

9. Analog, punctele ω_1, P, ω sunt colineare.

10. Punctele G, P_1, P sunt colineare.

11. Punctele ω, G, P, ω_1, P_1 sunt colineare.

A. G.

PROBLEMA 4996. *Să se demonstreze identităţile:*

$$\frac{\operatorname{tg}3a}{\operatorname{tg}a} = \operatorname{tg}(60^0 - a)\operatorname{tg}(60^0 + a)$$

$$\frac{4\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}4a} = (1 - \operatorname{tg}^2 a)(1 - \operatorname{tg}^2 2a).$$

ALEX. V. NICULESCU.

1. *Soluţie.* Se ştie că:

$$\operatorname{tg}3a = \frac{3\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}$$

atunci, membrul întâiu al primei identităţi devine succesiv:

$$\frac{\dfrac{3\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg}a} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a} = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}a}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}a} \times \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}a}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}a}$$

$$= \operatorname{tg}(60^0 + a)\operatorname{tg}(60^0 - a).$$

2. *Soluţie şi generalizare* dată de D-ra MODÂLCĂ S. MARIA (Şcoala Politehnică, Bucureşti).

Se ştie că avem:

$$\operatorname{tg}2a = \frac{2\operatorname{tg}a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}, \text{ de unde: } (1 - \operatorname{tg}^2 a) = \frac{2\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}2a}.$$

Dând lui a succesiv valorile:

$$x,\ 2x,\ 4x,\ \ldots\ 2^{n-1}x,$$

vom avea:

$$(1 - \operatorname{tg}^2 x) = \frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$(1 - \operatorname{tg}^2 x) = \frac{2\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 4x}$$

$$\vdots$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 2^{n-1} x = \frac{2\operatorname{tg} 2^{n-1} x}{\operatorname{tg} 2^n x}.$$

Inmulțind aceste relații între ele:

$$\prod_{i=0}^{n-1} (1 - \operatorname{tg}^2 2^i x) = \frac{2^n \prod_{0}^{n-1} \operatorname{tg} 2^i x}{\prod_{1}^{n} \operatorname{tg} 2x} = \frac{2^n \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2^n x}.$$

Pentru $n = 2$ și $x = a$ avem identitatea din enunț.

Observare. Ceilalți corespondenți anunțați pe copertă, au dat soluții analoage, însă fără generalizare, arătând totodată că aceste relații erau cunoscute. (Exerc. de trig. par F. G. M. pag. 259).

A. V. N.

PROBLEMA 5035. *Să se construiască un triunghiu* ABC, *dreptunghic în* A, *știind că ipotenuza* BC *are o lungime dată și că înălțimea* AA', *bisectoarea* BB' *și mediana* CC' *sunt concurente.*

Dacă S *și* S' *sunt ariile triunghiurilor* ABC *și* A'B'C', *atunci*

$$b^6 S = a^6 S'.$$

GH. BAZACOV.

I. *Soluție* dată de D-l ORIGEN MĂRCULESCU (Craiova), AA', BB', CC' fiind concurente avem:

$$(1) \qquad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1$$

și deoarece prin construcție

$$\overline{C'A} = -\overline{C'B}$$

(1) devine:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \tag{2}$$

care arată că A'B' *este paralelă cu* AB şi cum BB' este bisectoarea unghiului B, rezultă că triunghiul BA'B' este isoscel şi că deci:

$$\overline{A'B} = \overline{A'B'}. \tag{3}$$

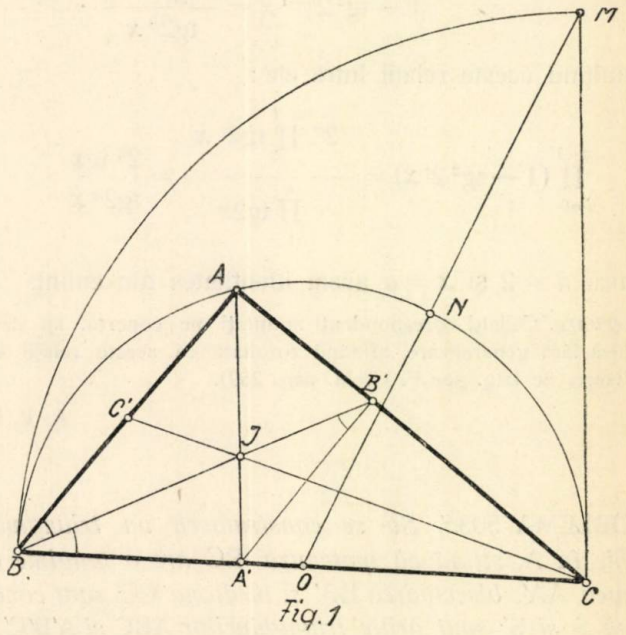


Fig. 1

Triunghiul BAC dă:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{A'B}, \tag{4}$$

iar proprietăţile bisectoarei şi (2) conduc la:

$$\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$$

sau ţinând seamă de (4)

$$\overline{A'C} = \overline{AB}$$

care dus în (4) dă:

$$\overline{A'C}^2 = \overline{A'B} \cdot \overline{BC} \tag{5}$$

(5) arată că punctul A' împarte pe BC în medie şi extremă raţiune, construcţia lui este deci cunoscută.

Perpendiculara în A' pe BC taie cercul de diametru BC în A. Problema are totdeauna o soluţie BAC şi o soluţie de poziţie, egală şi simetrică cu BAC faţă de axa de simetrie BC.

Pentru partea a doua a problemei observ că AB' este înălţime în triunghiul A'B'C', corespunzător laturei A'B', deci după o teoremă bine cunoscută.

$$(6) \qquad \frac{S}{S'} = \frac{a \times \overline{AA'}}{\overline{A'B'} \times \overline{AB'}}.$$

Triunghiurile asemeni AA'B', ABC dau:

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{AB'}} = \frac{a}{c},$$

iar din (4) se scoate

$$\overline{A'B'} = \frac{c^2}{a},$$

aşa că (6) devine după înlocuire

$$\frac{S}{S'} = \frac{a^3}{c^3} = \frac{a^6}{(ac)^3} = \frac{a^6}{(a \times \overline{A'C})^3} = \frac{a^6}{b^6}$$

care este tocmai relaţiunea de demonstrat.

II. *Soluţie* dată de D-nii: H. M. BODNĂRESCU (Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti); M. AL. VASILESCU-STABU (Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti); I. V. JAREGHIE, C. PANTELIMON (Liceul militar, Iaşi); ACHILE PETRESCU, M. PETRESCU (Liceul militar, Cernăuţi); GH. N. B. IONESCU (Elev inginer, Student matematici, Bucureşti); AD. O. ŞAICHIN (Elev inginer, Bucureşti); I. D. DIACONESCU (Liceul „Traian", T.-Severin).

Avem:

$$\overline{A'B} = \frac{c^2}{a} \quad ; \quad \overline{A'C} = \frac{b^2}{a} \quad ; \quad \overline{B'C} = \frac{ab}{a+c} \quad ; \quad \overline{B'A} = \frac{bc}{a+c}$$

pe care ducându-le în (1) se găseşte

$$a \times c = b^2 = a^2 - c^2$$

$$\therefore \qquad c = a \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

care arată că c este latura decagonului convex înscris în cercul de rază a. Construcţia-i este cunoscută şi se urmăreşte pe figura 1, unde MN este latura decagonului convex, înscris în cercul de rază BC.

Partea a doua ca la soluţia I.

Notă. 1°. D-nii: AD. O. ŞAICHIN şi M. D. POPA au dat şi soluţii analitice primei părţi.

2°. Am dat întâietate soluţiei D-lui O. MĂRCULESCU pentru că ea pune în evidenţă două proprietăţi caracteristice triunghiurilor cerute în problemă, anume *că la aceste triunghiuri* A'B' *este paralelă cu* AB *şi că* A'C *este egală cu* AB.

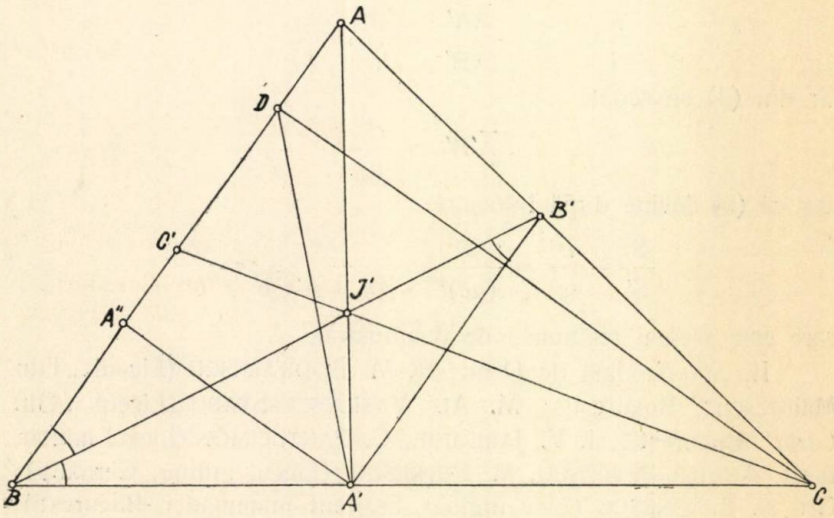


Fig. 2

Proprietăţile se extind şi la triunghiuri oarecare, nu numai la cele dreptunghice, ceea ce vom demonstra în rândurile următoare evidenţiând şi alte proprietăţi.

3°. Fie în figura 2 un triunghiu ABC cu toate unghiurile ascuţite şi având înălţimea AA', bisectoarea BB' şi mediana CC' concurente în I. Se construeşte foarte uşor, un astfel de triunghiu. Dintr'un punct A de pe o latură a unghiului B se scoboară perpendiculara AA' pe cealaltă latură şi se notează cu I intersecţia lui AA' cu bisectoarea lui B. Se uneşte mijlocul C' lui AB cu I şi se ia intersecţia lui C'I cu BA'.

Plecând dela relaţia (1) dela soluţia I se găseşte:

$$(7) \qquad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$$

deci A'B' *este paralelă cu* AB.

Reciproc: *Dacă dreapta care uneşte piciorul înălţimei* AA' *cu al bisectoarei* BB' *este paralelă cu* AB *atunci* CI *este mediană.*

Ţinând seamă de (7), scriind relaţiunea lui CEVA pentru cevienele AA', BB', CI şi înlocuind segmentele determinate pe laturi de A' şi B' în funcţie de laturi se ajunge la

$$\overline{BC'} = \overline{C'A}$$

care demonstrează reciproca.

4°. In triunghiul ABC avem:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{A'B}{A'C} = \frac{B'A}{B'C} = \frac{c}{a}$$

şi cum

$$A'B = c\cos B \quad ; \quad A'C = b\cos C$$

rezultă

$$a\cos B = b\cos C$$

$$\therefore \quad \overline{BD} = \overline{A'C}$$

D fiind piciorul înălţimei CI. Deci:

Dacă într'un triunghiu înălţimea AA', *bisectoarea* BB' *şi mediana* CC' *sunt concurente, atunci proecţia laturei* BC *pe* AB *este egală cu proecţia laturei* AC *pe* BC.

5°. Din proprietatea dela 3° rezultă:

$$\sphericalangle A'B'B = \sphericalangle B'BA = \sphericalangle B'BA'$$

$$\therefore \quad \overline{A'B'} = A'B.$$

Această proprietate arată că triunghiurile CA'B' şi A'BD, care au unghiurile din A' şi B egale, sunt egale. Deci o nouă proprietate:

$$\overline{CB'} = \overline{A'D}.$$

6°. Fie A'' proecţia lui A' pe AB. Dreapta A'A'' este egală cu înălţimea din C' în triunghiul A'B'C' şi cu înălţimea din B în triunghiul A'BB'. *Aceste triunghiuri sunt deci echivalente.*

Pentru acelaşi motiv

$$S' = \text{Supr. } A'B'C' = \text{Supr. } A'BB' = \text{Supr. } AA'B'.$$

7°. Dela 6° rezultă:

$$S' = \frac{1}{2} A'B' \times A'A'' = \frac{1}{2} \times A'B \times A'A''.$$

Dar:

$$\frac{A'A''}{CD} = \frac{A'B}{BC}$$

$$\therefore \quad A'A'' = \frac{CD \times A'B}{BC} = \frac{h_c \times A'B}{a} = \frac{ch_c \cos B}{a}$$

$$\therefore \quad S' = \frac{1}{2} \frac{h_c c^2 \cos^2 B}{a} = S \frac{c \cos^2 B}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{S}{S'} = \frac{a}{c \cos^2 B}$$

care este generală pentru aceste triunghiuri speciale.

Când unghiul din A este dat, atunci:

$$\cos B = \frac{c}{a}$$

şi relaţiunea precedentă devine:

$$c^3 S = a^3 S'$$

care s'a văzut din enunţul problemei că este echivalentă cu:

$$b^6 S = a^6 S'.$$

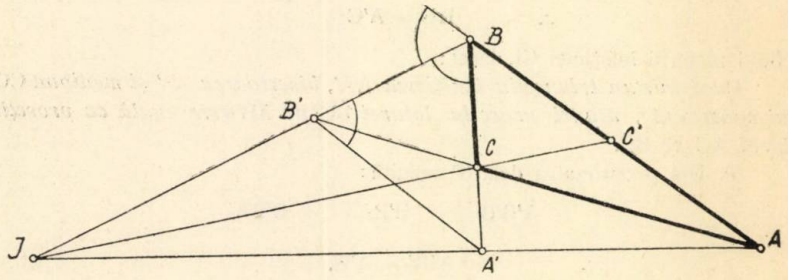


Fig. 3

8°. Până aici am considerat bisectoarea interioară a unghiului B. Considerăm figura 3 ce urmează un triunghiu în care bisectoarea exterioară a unghiului B este concurentă cu înălţimea AA' şi mediana CC'.

Se ştie că:

$$B'C = \frac{ab}{c - a} \quad ; \quad B'A = \frac{bc}{c - a}$$

care duse în (1) dau:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{c}{a} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$$

ceea ce arată că AB ∥ A'B'.

De aici în colo se deduc toate celelalte proprietăţi, aşa că teoremele stabilite se pot enunţa astfel : *Dacă într'un triunghiu* T *înălţimea* AA', *mediana* CC' *şi* **una** *din bisectoarele unghiului* B *sunt concurente atunci...*

9°. Dacă în egalitatea

$$BD = A'C$$

facem înlocuiri în funcţie de laturi şi unghiuri, se găseşte

$$a \cos B = b \cos C$$

sau punând cosinusurile în funcţie de laturi :

$$a^3 + ac^2 - ab^2 = a^2c + cb^2 - c^3$$

care este relaţiune caracteristică triunghiurilor speciale de care ne-am ocupat până aici.

Dacă triunghiul este dreptunghic în A, această relaţiune devine :

$$a^2 - c^2 = b^2 = a - c$$

care a fost găsită şi la soluţiunea I a problemei 5035.

Triunghiurile acestea au încă alte proprietăţi caracteristice.

G-L GH. BUICLIU.

EXERCIŢII

15. Se dă transformarea omografică

$$T_1 \equiv y_1 = \frac{Ax_1 + B}{Cx_1 + D}.$$

Se consideră transformările :

$$T_2 \equiv y_2 = \frac{Bx_2 + C}{Dx_2 + A}, \quad T_3 \equiv y_3 = \frac{Cx_3 + D}{Ax_3 + B}, \quad T_4 \equiv y_4 = \frac{Dx_4 + A}{Bx_4 + C}.$$

In raport cu două axe de coordonate oblice Ox, Oy fie S_i (a_i, b_i) centrul de perspectivă pentru transformarea T_i.

1) Coeficientul unghiular al dreptei OS_i este egal cu a_{i+1} $(i_5 = i_1)$;

2) $b_1 b_3 = b_2 b_4 = 1$;

3) Să se arate că dându-se a_1, b_1, b_2 transformările T_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sunt determinate şi să se construiască punctele S_i.

C. IONESCU-BUJOR.

R. 1) şi 2). Se ştie că [1]) :

$$a_1 = -\frac{D}{C}, \quad b_1 = \frac{A}{C}.$$

---

1) R. GARNIER : Leçons d'Algébre et de Géométrie.

Analog, $a_2 = -\frac{A}{D}$, $b_2 = \frac{B}{D}$ etc.

3) α^0. T_1 este determinat dacă se cunosc valorile

$$\frac{A}{C}, \frac{B}{C}, \frac{D}{C}. \; a_1 \text{ şi } b_2 \text{ dau pe } \frac{A}{C} \text{ şi } \frac{D}{C};$$

cum $$b_2 = \frac{B}{D} = \frac{B}{C} : \frac{D}{C} = \frac{B}{C} : (-a_1),$$

rezultă $$\frac{B}{C} = -a_1 b_2.$$

β^0. Deoarece $a_2 = \frac{b_1}{a_1}$, se măsoară segmentul unitate OU pe Ox şi din U ducem paralelă la Oy care întâlneşte OS_1 în A_2. $a_2 = UA_2$. Analog, din a_2, b_2 se determină a_3, iar b_3 este inversul lui b_1; etc.

PROBLEME PROPUSE

5089. Scriind unul după altul doi $\mathcal{M}3$ când numărul format este $\mathcal{M}9$?

I. IONESCU.

5090. Să se găsească toate cuburile perfecte de cinci cifre, ştiind că suma cifrelor acestor cuburi este egală cu rădăcina lor cubică.

G-L GH. BUICLIU.

5091. Să se găsească nouă numere în progresie aritmetică, care să se deducă dintr'unul din ele prin permutări circulare asupra cifrelor acestuia.

M. AL. VASILESCU-STABU.

5092. Din trei puncte, de pe polarele punctelor A, B, C în raport cu cercurile I_a, I_b, I_c exînscrise triunghiului ABC, se duc tangente respectiv la cele trei cercuri, care intersectează laturile BC, CA, AB respectiv în perechile de puncte: a_1, a_2 ; b_1, b_2 ; c_1, c_2. Dacă punctele a_1, b_1, c_1 sunt colineare, punctele a_2, b_2, c_3 sunt picioarele a trei ceviene concurente.

OCTAVIAN GH. RĂDULESCU.

5093. Un cerc, concentric cercului O, circumscris triunghiului ABC, taie laturile BC, CA, AB în A_1 şi A_2 ; B_1 şi B_2 ; C_1 şi C_2. Cercurile circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 concură într'un punct P_1, iar cercurile circumscrise triunghiurilor AB_2C_2, BC_2A_2, CA_2B_2 concură într'un punct P_2. Să se arate că punctele P_1, P_2 sunt echidistante de O şi că produsele distanţelor lor la vârfurile triunghiului ABC sunt egale.

V. THÉBAULT.

5094. Se dau în plan punctele A, B, C, D. Să se determine punctele M, N astfel ca patrulaterele ABMN şi CDMN să fie armonice [1]).

AD. GHEORGHIU.

5095. Paralelele duse prin vârfurile A, B, C ale unui triunghiu la laturile opuse taie cercul circumscris în punctele A', B', C. Fie A_1, B_1, C_1 intersecţiile (BC, B'C'); (AC, A'C'); (AB, A'B'). Să se demonstreze:

1°. Că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 concură în punctul lui STEINER al triunghiului ABC;

2°. Că dreptele $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ concură în inversul reciprocului punctului lui STEINER;

3°. Că triunghiul $A_1B_1C_1$ şi triunghiul anticomplementar al lui ABC sunt *omologice*, axa de omologie fiind *polara trilineară a reciprocului centrului hiperbolei lui* KIÉPERT;

4°. Că această dreaptă trece prin cele două puncte precedente;

5°. Că inversul reciprocului punctului lui STEINER e situat pe cercul ABC.

CONST. C. POPOVICI.

5096. Să se studieze natura seriei cu termenul general

$$u_n = \frac{n^n - (n-1)^{n-1}}{(n+1)^{n+1} - n^n}.$$

M. GHERMĂNESCU.

5097. Să se demonstreze că avem:

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 = \frac{1}{\pi e}.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

5098. In planul axelor de coordonate *xoy* se consideră punctul N şi dreapta (D); fie P mobil pe (D); perpendiculara din O, originea axelor, pe NP taie paralela din P la OY în M; locul lui M este o hiperbolă trecând prin origine de asimptote OX, OY.

Caz particular când (D) e paralelă cu OX.

N. N. MIHĂILEANU.

5099. Dreapta care uneşte *centrele de curbură* relative la A, ale conicelor de focare B, C şi trecând prin A, precum şi analoagele ei, taie laturile triunghiului ABC în trei puncte colineare.

CĂP. M. I. FOCŞENEANU.

---

1) Se numeşte patrulater armonic patrulaterul inscriptibil ABMN în care $\overline{MA} : \overline{MB} = \overline{NA} : \overline{NB}$.

5100. Se dă un cerc fix O şi un diametru $\overline{AB}$. Fie AM o dreaptă ce taie, tangenta în B la cercul O, în M. Din M se duce cea de-a doua tangentă la cercul O, punctul de contact fiind N. Dreapta $\overline{AM}$ taie cercul a doua oară în Q.

Se cere înfăşurata dreptei NQ. M. NICOLAU.

5101. Se dau în plan trei vectori concurenţi V_1, V_2 şi V_3. Ştiind că:

$$\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}_2} = 90^0, \; | \, V_2 \, | = 2 \, | \, V_1 \, | \text{ şi } | \, V_3 \, | = 3 \, | \, V_1 \, | \, ,$$

să se studieze variaţiunea mărimii vectorului rezultant al acestor trei vectori şi să se găsească hodograful acestui vector, când vectorul V_3 se roteşte în jurul punctului de concurenţă.

Ce se întâmplă când vectorul V_3 se roteşte în jurul unui alt punct din plan?

Se cere o soluţie vectorială. ION S. ANTONIU.

5102. Un avion A_1 sboară orizontal cu viteza 324 km/oră, într'o direcţie dată, la înălţimea de 4000 m. De pe acest avion se trage cu un tun într'un alt avion A_2, care sboară orizontal cu viteza 360 km/oră, într'o direcţie perpendiculară direcţiei de sbor a avionului A_1 şi la înălţimea de 3000 m. Cum ar trebui îndreptată ţeava tunului de pe avionul A_1, pentru ca proectilul să ajungă în avionul A_2, ştiind că:

— Viteza iniţială a proectilului este 1000 m/sec;

— Distanţa (apreciată) dela A_1 la A_2 este de 1000 m;

— In momentul tragerei ambele avioane sunt în acelaşi plan vertical;

— Rezistenţa aerului întâmpinată de proectil este presupusă nulă.

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

5103. Dintr'un punct O, la un moment dat, se asvârl două proectile în acelaşi plan vertical, cu iuţeala V_0, făcând cu orizontala unghiuri complementare. Să se arate că în timpul mişcării dreapta Δ care uneşte cele două mobile rămâne paralelă cu o direcţie fixă.

Să se studieze mişcarea centrului G al dreptei Δ.

Să se arate că tangentele în extremităţile dreptei Δ şi în centrul său G duse respectiv la traectoriile proectilelor şi punctul G sunt concurente într'un punct M.

Să se găsească locul geometric al punctului M.

Mişcarea proectilelor se face în vid.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATA. In enunţul problemei 5075 nu se întrebuinţează cifra 6 în primele două rânduri.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bodnărescu M. Horia (5064, 78); *Bogdan Gr. Gh.* (5062, 78); *Boldescu P.* (5016, 31); *Canari A. Vlad* (5078); *Cârdeiu D. Gh.* (5067); *Cerchez Mihu* (5078, 83, 84, 88); *Cetăţeanu St.* (4968); *Chiţulescu I. Tr.* (5078); *Constantin V. P.* (5054, 65); *Cristea D. Eftimie* (5005); *Cristea I. C.* (5062, 78); *Diaconescu Marcel* (4911); *Diaconescu V. Const.* (5078); *Dimitriu Călin* (4968); *Drăghicescu P. Paul* (5078, 83); *Enescu D. D.* (5078, 83); *Gheorghe I. Mircea* (5078); *Herman Victor* (4953); *Ionescu D. St.* (5048, 78); *Jareghie V. Ion* (5054, 56, 66); *Jiletcovici Al.* (5066); *Leibovici S.* (5007); *Mihăilescu D. D.* (5078); *Mihu C.* (5086, 87); *Mironescu I. D-tru* (5078); *Moessner A.* (N); *Negrea A. Mircea* (4708, 968, 5011, 88); *Pantelimon C.* (5034, 41, 48, 64, 66, 78, 83); *Pântescu Const.* (5078); *Pascaru C.* (5064); *Petrescu V. Achile* (5006, 54, 69, 84, 87); *Petrescu V. Mihai* (5078); *Popa D. Mircea* (4699, 5062, 64, 65, 66, 83); *Popa N. Aurel* (5078, 83); *Pop G. Ilie* (5078); *Reischer L. H.* (4942, 47, 5044, 46, 55, 60, 64, 65, 77, 78, 83): *Ripianu D-tru* (5042, 78, 83, 87); *Rohr I. Alex.* (4573, 923, 5005, 34, 55, 64, 78, 83); *Roşculeţ Marcel* (5016); *Rosenrauch E. Fred.* (5087); *Şaichin O. Adolf* (5078); *Săndulache Const.* (5088); *Şerban A. T.* (5003); *Solomon I. Isac* (4947, 5065, 83); *Stamate Aurel* (5078); *Stamate I. I.* (4953, 89, 5031, 41, 55, 64, 65, N); *Teodor A. Şerban* (5005, 67); *Teodorescu Dorin* (4968); *Topalescu Gh.* (4989); *Trofin P.* (P); *Turcu R. S.* (5062); *Vasiliu C. D.* (5062).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*

Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

C. 54.385

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIV

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1939

SUMARUL

1. Algebra lui E. Bacaloglu . . . . *Florica Câmpan.*
2. I. H. Alsted la Alba-Iulia (urmare). *Victor Marian.*
3. O problemă de construcție . . . *G-l Gh. Buicliu.*
4. Premiul „Inginer Al. Roșu" . . . *Comisiunea pentru Premii.*
5. Note Matematice: 29 — 33.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1058, 2281, 2552, 2851, 3911, 4299, 4766, 4774, 5000, 5057, 5070.
11. Exerciții 16 — 17.
12. Probleme propuse: 5104 — 5118.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1939

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stoica**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1938 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5002, 09, 10, 14, 22, 23, 26, 28, 29, 37, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 58, 59, 68, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 80, 82, 85, 89, 91, 93, 94, 95, 96, 99, 101, 02, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLIV. Nr. 8 *SUPLIMENT* APRILIE 1939

RECREAŢIUNI

1. **Felicitări numerice.** Am primit dela D-l A. MOESSNER din Nürnberg o frumoasă carte poştală ilustrată cu următoarea felicitare de sărbători şi de anul nou:

« Ein frohes Weinachtsfest und gutes Jahr

$$\left(969\tfrac{1}{2}+\sqrt{937991\tfrac{1}{4}}\right)\frac{1939}{969\tfrac{1}{2}+\sqrt{937991\tfrac{1}{4}}}=\left(969\tfrac{1}{2}+\sqrt{937991\tfrac{1}{4}}\right)+\frac{1939}{969\tfrac{1}{2}+\sqrt{937991\tfrac{1}{4}}},$$

wünscht ».

ALFRED MOESSNER.

Mulţumesc pe această cale pentru urare, dar mărturisesc că nu înţeleg sensul numerelor şi mai cu seamă nu înţeleg egalitatea a două numere... neegale! Poate că se va întâmpla şi asta în 1939.

GH. B.

*

2. **Front de câte doi.** Intr'o şcoală oarecare disciplina cerea ca elevii să se plimbe în curte numai doi câte doi.

Profesorul de serviciu vede într'o zi un elev plimbându-se singur în urma unui şir de elevi perechi. Furios, profesorul aminteşte elevului ordinul de a se plimba câte doi.

— Ştiu, D-le Profesor, dar noi suntem 61 în clasă.

— Ei şi, ce vrei să zici cu asta? Adică crezi D-ta că dacă 60 de elevi pot merge câte doi n'ai putea merge şi D-ta?

Elevul rămâne împietrit... la ideia că trebue să meargă de unul singur... câte doi!

GH. B.

*

3. **Rapoarte.** In romanul *«Anna»* de DUILIU ZAMFIRESCU găsim la pag. 94:

— Pe Anna cu cât s'o punem?

— Ştiu eu!

— S'o punem în *raport invers* cu Berta.

— Adică?

— Cu cât punem pe Anna mai mult, cu atât s'o punem pe Berta mai puţin.

Dar e mai sigur s'o facem contrariu, potrivit socotelilor lui „Cumnatumeu".

I. N. VĂLCEANU.

Pe vremea când a învăţat DUILIU ZAMFIRESCU aritmetica, existau şi *rapoarte prin diferenţă*. Două asemenea rapoarte egale construiau o *echidiferenţă*,

analoagă cu proporţiile formate din rapoarte prin cât. Numai că acolo nu încăpeau *rapoarte inverse*, căci se dedea peste numerele negative!

I. I.

*

4. **Matematica în Literatură.** In cartea *«Pentru artă literară»* a lui PAUL ZARIFOPOL, pag. 58, citim următoarele:

«Figurile acestea se arată numai dintr'o parte, bidimensional. Opoziţia lor este geometrică, contrastul prea perfect, deci prea artificial; descrierea celor doi tineri la începutul cărţii aminteşte enunciurile teoremelor matematice».

ANA C. GEREANU.

*

5. **Eroare topologică.** Pentru o problemă din *Suplimentul cu exerciţii*, trebuia demonstrat că mediatoarele triunghiului ortic trec prin mijloacele laturilor triunghiului de referinţă. Un elev scrie:

„Patrulaterul format de vârfurile B, C şi picioarele înălţimilor B', C' este inscriptibil: fie centru undeva în I. Perpendicularele duse din el pe coardele B'C' şi BC' trec prin mijloacele lor, şi conform enunţului ar trebui să fie în prelungire, ceea ce se întâmplă numai când BC şi B'C' sunt paralele, deci triunghiul isoscel... Trebue să fie o eroare în enunţ". (Autentic).

Eroarea constă în faptul că nu s'a făcut o figură pentru a vedea că I este aşezat pe BC.

N. M.

*

6. **Un calcul original!** Unei eleve de clasa VI-a i se dă de calculat:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+b).$$

Răspunsul:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+b) = (\sqrt{a+b})(\sqrt{a-b})(a+b)$$

$$= (\sqrt{a^2-b^2})(a+b) = (a-b)(a+b) = a^2-b^2.$$

Rezultatul este exact!!. (Autentic).

ANA C. GEREANU.

*

7. **Personagiu identic este nul.** In Nr. 2 din *Gazeta Matematică*, sub Nr. 17, s'a arătat în *Supliment* că un JERONIM este nul. Demonstraţia s'a bazat pe faptul că EMINESCU trăia perpendicular pe scoarţa pământului. Când dormea însă nu mai era perpendicular! In acest caz avem:

$$\text{JERONIM} = \text{EMINESCU} \cos 0^0.$$

Dar $\cos 0^0 = 1$. Deci JERONIM = EMINESCU. Dar EMINESCU dormind e nul. Deci călugărul JERONIM este nul şi în acest caz. Putem zice dar că este identic nul.

IONEL I.

*

8. **Din o carte didactică de matematică.**

„Radiant este unghiul a cărui rază este egală cu arcul".

*

9. **O soluţie trigonometrică.!** Se cerea să se arate direct că limita lui

$$E = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x + 2 \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} 2x + 3$$

este 0 când x tinde către $\frac{1}{2}\pi$. Iată o soluţie din Arad

$$E = \operatorname{tg} 90^0 \cdot \operatorname{tg} 180^0 + 2 \operatorname{cotg} 90^0 \cdot \operatorname{cotg} 180^0 + 3 = \infty \times 0 - 2 \cdot 0 \times \infty + 3 = -1 - 2 + 3.$$

C. I. Ţ.

*

10. **Ghicitoare flamandă.**

— Pe ce drum nu a trecut nimeni?

— Pe *Drumul Robilor* sau *Calea Laptelui.*

I. I.

*

11. **Ianuarie în Aprilie!** Nu este nici o imposibilitate, căci la 21 Aprilie este pus în Calendarul ortodox sărbătoarea Sfântului Mucenic IANUARIE.

I. I.

*

12. **Păreri despre profesori şi matematici.**

Profesorii de matematici sunt pe nedrept consideraţi ca nişte oameni răi, ursuzi, neiubitori de artă, de natură, străini de lume, de viaţă şi de petreceri.

Toate aceste neadevăruri, numai pentru că disciplina lor, plină de adevăruri, nu este aşa uşor de înţeles de majoritate.

Am aflat că profesorii de matematici sunt şi . . . impermeabili.

Aceasta ne-o spune scriitorul de seamă GALA GALACTION, în *Adevărul Literar* dela 1 Ianuarie 1939. După ce singur mărturiseşte că în Liceu nu se ocupa decât cu studiile care-i erau simpatice, enumără studiile şi profesorii care nu-l interesau. ...„*Profesor de chimie mă tolera ca pe un copil desmetic. ...Cel de matematici era impermeabil la orice fel de efluvii şi radiaţii decât cele algebrice. Cu el o duceam prost de tot*".

Cam bănuim ce vrea să înţeleagă prin impermeabilitate scriitorul de seamă de azi şi elevul din 1894 al liceului Sf. Sava, când în mărturia sa nu uită să ne spună că a repetat clasa VI... Poate că tocmai profesorul de matematici să fi împiedicat... *permeabilitatea* dintr'o clasă într'alta, deoarece o ... *o ducea prost de tot cu el.*

Tineri elevi, oricât de strălucit viitor v'ar asigura ursitele sau talentul vostru, învăţaţi lecţie cu lecţie şi nu speraţi în... *permeabilitate* că acuma e mai greu dacă repeţi o clasă decât în 1894.

GH. B.

*

13. **Ei spun. — Ceea ce spun. — Să-i lăsăm să spună.** Renumitul matematician american, E. T. BELL a publicat o carte foarte interesantă asupra marilor matematiciani, după care a apărut de curând o ediţie franceză tradusă de GANDILLON. Inainte de a începe să se ocupe de matematiciani, sub Deviza

de mai sus, care este scrisă la Marischal College din Aberdeen, autorul a adunat 4 pagini de ceea ce se spune de matematică şi de matematicieni, de către aceştia sau de către alţii. Iată câteva relative la *Număr* şi *Aritmetică:*

„Numărul este stăpânul Universului (Pitagoricianii).

„Matematica este regina ştiinţelor şi Aritmetica este regina matematicilor". (C. F. GAUSS).

„Astfel deci, se poate spune că numărul domneşte lumea întreagă cu cantitatea, şi că cele patru reguli ale aritmeticii pot fi considerate ca sculele complecte ale matematicianului". (CLERK MAXWELL).

„Dumnezeu a creiat numerele întregi, tot restul este opera omului" (KRONECKER).

„Dumnezeu face totdeauna aritmetică". (C. G. J. JACOBI).

PLATON era de altă părere:

„Dumnezeu face totdeauna geometrie".

J. H. JEAN a căutat să împace lucrurile spunând:

„Marele Architect al Universului începe acum să apară ca un pur matematician". I. I.

*

14. **Patriotismul matematicianilor.** Din „*La Morale* et la *Science*" de H. POINCARE. (Dernieres Pensées. Paris 1913).

„Quand on nous demande de justifier par des raisonnements notre amour pour la patrie, nous pouvons être très embarassées; mais que nous nous représentions par la pensée nos armées vaincues, la France envahie, tout notre coeur se soulèvera, les larmes monterons aux yeux et nous n'écouterons plus rien. Et si certains gens accumulent aujourd'hui tant de sophismes, c'est sans doute qu'ils n'ont pas assez d'imagination; ils ne peuvent se représenter tous ces maux, et si le malheur ou quelque punition du ciel voulaient qu'ils les vissent de leur yeux, leur âme se revolterai comme la nôtre. I. I.

*

15. **Incompatibilitate!** TRAIAN LALESCU trimisese pentru *Supliment* pe când era în viaţă următoarea Recreaţie, care a fost rătăcită până acum:

Se poate ca doi oameni să aibă aceeaşi soră şi să nu fie rude:

— Da. Două persoane A şi B căsătorite au o fată C; divorţând şi căsătorindu-se fiecare a doua oară, A are un băiat E şi B deasemenea un alt băiat D. Băieţii E şi D au aceeaşi soră C, însă nu sunt rude.

*

16. **Napoleon şi profesorul de germană.** NAPOLEON era elev foarte bun la matematici; însă la limba germană, — predată de un neamţ, — era nul. Odată, pentru o abatere dela Regulament, NAPOLEON a fost trimis în Conferinţa Profesorilor şi era cât pe aci să fie pedepsit, dacă nu ar fi intervenit BÉZOUT.

— Da ce susţii pe leneşul acesta atâta, D-le BÉZOUT, zise profesorul de limba germană.

— E un băiat excelent la matematici.

— Bine a zis cine a zis că matematicile sunt făcute pentru tâmpiţi!

Cât de false sunt unele proverbe şi zicători! GH. B.

ALGEBRA LUI E. BACALOGLU

Din biografia scrisă de D-rul C. ISTRATI [1]) se ştie că EMANUEL BACALOGLU a fost numit profesor de matematică la Liceul Sf. Sava din Bucureşti, unde a predat algebra în decursul anilor 1861—1864.

Acestui fapt se datoreşte publicarea manualului de algebră, după cum o spune chiar BACALOGLU în prefaţa ediţiei întâia:

„Elementele prezente de algebră sunt fructul meditaţiilor de patru ani. In patru rânduri am profesat aceste Elemente făcând în fiecare an experienţe noi în privinţa predării lor".

Prima ediţie a acestei *Algebre* apare litografiată în 1866 (l. c. pg. 25), iar în 1870 apare a doua ediţie tipărită. Cartea are 162 de pagini şi din prefaţa ei rezultă că nu au fost aduse modificări prea mari primei ediţii. Titlul ei este:

„Elemente de Algebră de E. BACALOGLU, *Profesor la Universitatea din Bucureşti. Pentru uzul şcoalelor secundare. Ediţia a doua 1870"*.

Inainte de a analiza tratatul lui BACALOGLU, trebue să amintim că pe atunci studiul Algebrei se făcea într'un singur an [2]) şi anume în clasele complimentare: (adică după terminarea gimnazului care era de 4 clase până la BARBU D. ŞTIRBEI şi de 6 clase după), după următorul program:

„Calculul algebricesc. Adunarea, scăderea, reducerea, înmulţirea, împărţirea. Ecuaţii de gradul întâi, greutăţile soluţiilor, băgare de seamă la soluţiile problemei, eliminanţi, nepotriviri, probleme nehotărâte, regula de amestecare. Puteri şi rădăcini. Exponenţi negativi şi frângeroşi. Rădăcini patrate. Ecuaţie de gradul al doilea. Raporturi şi proporţii, progresii, logaritmi, regula de dobândă compusă, anuităţi, regula de poziţii greşite. Orânduiri şi combinaţii, definiţii, forma orânduelilor şi a combinaţiilor, probleme", (programa analitică din 1839 dela Colegiul Naţional Sf. Sava).

De aici observăm că materia care se preda atunci în decurs de un an, echivalează cu aceea cerută de programa analitică de azi pentru cl. IV, V, VI, şi ceva din cl. VII ştiinţifică. BACALOGLU

1) Dr. C. I. ISTRATI. Biografia şi lucrările lui E. BACALOGLU. Bucureşti 1896, pg. 17.

2) Istoria şcoalelor de V. A. URECHIA. Buc. 1892, Vol. I — IV.

a predat Algebra tot într'un singur an după cum am văzut chiar din prefaţa ediţiei întâia şi natural cu unele adăogiri noi, faţă de programa din 1839. Şi, ca să avem o imagine imediată a materiei tratate, dăm mai jos tabla de materii a cărţii:

Cap. I. Noţiuni preliminarii.

1) Introducere. 2) Adunarea şi scăderea. 3) Inmulţirea. 4) Impărţirea. 5) Câteva teoreme de împărţire. 6) Fracţii algebrice.

Cap. II. Egalităţi de gradul I.

1) Introducere. 2) Deslegarea unei egalităţi de gradul I cu o necunoscută. 3) Probleme. 4) Egalităţi de gradul I cu două necunoscute. 5) Egalităţi de gradul I cu mai multe necunoscute. 6) Probleme. 7) Egalităţi nedeterminate de gradul I.

Cap. III. Egalităţi de gradul al doilea.

1) Egalităţi cu o necunoscută. 2) Exemple şi probleme. 3) Două egalităţi de gradul II cu două necunoscute. 4) Probleme de gradul II. 5) Despre maxima şi minima de gradul II. 6) Cantităţi complexe şi imaginare. Apendice.

Cap. IV. Puteri şi Rădăcini ale expresiilor algebrice.

1) Operaţiuni cu monoame. 2) Rânduiri. Permutări. Combinări. 3) Formula binomului lui NEWTON. 4) Rădăcina patrată a unui polinom.

Cap. V. Serii şi progresiuni.

1) Progresiuni aritmetice. 2) Progresiuni geometrice. 3) Despre interese şi anuităţi. 4) Cele dintâi noţiuni despre serii în genere şi despre convergenţa lor. 5) Numere figurate. Triunghiul lui PASCAL. 6) Grămezi de corpuri sferice.

Cap. VI. Noţiuni despre fracţiunile continue.

Cap. VII. Logaritmii.

1) Proprietăţile logaritmilor. 2) Formarea tablelor de logaritmi. 3) Câtimi şi egalităţi exponenţiale.

Cap. VIII. Cele dintâi noţiuni din teoria derivatelor.

1) Noţiuni preliminare. Derivatele funcţiunilor algebrice.

2) Derivatele funcţiunilor exponenţiale şi logaritmice.

3) Transformarea funcţiunilor în serii convergente. Generalizarea binomului lui NEWTON. 4) Cazuri de nedeterminare ale funcţiunilor care se prezintă sub forma 0/0. 5) Maxima şi minima funcţiunilor de o variabilă independentă. 6) Formula lui TAYLOR. 7) Despre interpolaţiune.

In introducere BACALOGLU *defineşte* obiectul matematicii, deosebind *Geometria* de *Analiză* prin metodele de cercetare. Astfel, e determinat totodată şi obiectul Algebrei, care este „*numai o parte elementară, o introducere în analiza matematică*". Studiul Algebrei începe prin introducerea literelor în calcule şi prin definiţiile expresiilor algebrice, monom, polinom, coeficient, exponent, termeni asemenea, etc.

Dela început se poate remarca nivelul mai ridicat al manualului faţă de al acelora de clasa IV de acum, lucru explicabil, dat fiindcă este destinat elevilor cu o cultură liceală de cel puţin şase ani. Adunarea algebrică e prezentată deodată pentru monoame, fără a se mai discuta adunarea numerelor algebrice. In exemplul dat, după reducerea termenilor asemenea se face, fără nici o explicaţie prealabilă şi gruparea termenilor după factorii comuni.

Scăderea e definită direct, prin adunarea cu semn schimbat a polinomului scăzător cu descăzutul. Definiţia însă e complectată prin următoarea explicaţie:

„*Este lesne a ne da seamă de acest mod de a opera scăderea. In adevăr, se ştie că dacă scădem dintr'o sumă* A *o alta* B, *trebue să scriem* A — B, *adică trebue să scriem lângă* A *pe* B *cu semn schimbat, dară a schimba semnul lui* B *va să zică al considera într'un sens opus decât acela în care se află. Dacă acum* B *se compune din părţi pozitive şi altele negative se înţelege dela sine că o schimbare în sensul lui* B *nu se poate face altfel decât făcând negative părţile lui pozitive şi pozitive părţile lui negative*".

La înmulţire regula semnelor este dată fără a fi comentată. După exemple de înmulţire a monoamelor, se face înmulţirea unui polinom cu un monom pentru care: „*nu se cere alt raţionament, altă demonstraţie, decât aceea care se dă în aritmetică la înmulţirea unui număr compus din mai multe cifre cu altul de o cifră*". Acelaşi raţionament conduce şi la înmulţirea polinoamelor.

La împărţirea monoamelor, exemplele sunt aşa fel alese ca să se poată introduce noţiunea de exponent zero şi negativ. După o expunere foarte frumoasă a împărţirii polinoamelor, urmează teoreme asupra împărţirii cu $(x - a)$ şi asupra fracţiilor algebrice. In exerciţiile dela fracţiile algebrice, se găsesc exemple care conduc la nedeterminări, aşa că pe deoparte se introduc notaţiile $0/0$ şi ∞, iar pe de alta se procedează la aflarea adevăratei valori a unei fracţii algebrice nedeterminate.

In introducerea, la egalitățile de gradul I, după ce ajunge la intuiția de egalitate care este „*o potrivire între câtimi parte cunoscute, parte necunoscute*“ BACALOGLU spune: „*potrivire, egalitate și ecuație sunt sinonime*“, ceea ce îl determină să întrebuințeze deobicei cuvântul *potrivire* în loc de *egalitate* sau *ecuație*. Așa de exemplu: „*O egalitate sau potrivire este formată din doi membri despărțiți prin semnul potrivirei* =“. Autorul insistă încă și chiar într'un mod foarte independent, printr'o notă din subsol, asupra terminologiii întrebuințate de el: „*Distincțiunea între egalitate și ecuație poartă în sine ceva pedant, amândouă arată o potrivire care există independent de considerațiunile noastre particulare după care unele din câtimi ne-ar fi necunoscute sau cunoscute*“.

Rezolvarea ecuațiilor o face, enunțând regula de eliminare a numitorilor, izolarea termenilor care cuprind necunoscuta într'un membru, reducerea termenilor asemenea și apoi împărțirea prin coeficientul necunoscutei. Această regulă este exemplificată prin ecuații numerice și literare. După exemple de ecuații compatibile, arată cazuri de ecuații incompatibile și nedeterminate, insistând asupra deosebirii dintre aceste două feluri de ecuații. Tot aici întâlnim cuvântul mai reprezentativ și mai aproape de noi: „*dezlegare*“ în locul neologismului „*rezolvire*“.

Intr'o nouă notă adăogată jos, care e foarte interesantă și personală, motivează astfel simplificarea adusă metodei de rezolvare a ecuațiilor de gradul I:

„*Toată teoria unei egalități de gradul I cu o necunoscută se reduce la ceea ce s'a zis aici. Unii autori francezi mai consideră încă și proprietățile unei ecuații, adică că se pot înmulți sau împărți amândoi membrii cu aceeași câtime, sau se poate aduna sau scădea aceeași câtime fără a strica egalitatea. Acestea sunt însă niște principii elementare de aritmetică. Asemenea se găsește prin unele cărți și prin imitațiune, s'a introdus și la noi pre aici și colo, obiceiul de a face și o discuțiune a unei egalități de gradul I cu o necunoscută, ceea ce nu are însă nici o importanță. După regulele de mai sus, dezlegând-o vom ajunge la o egalitate de forma* $Ax = B$ *de unde* $x = B/A$. *Toată discuția se reduce atunci în a zice că se poate întâmpla* $A = 0$ *de unde* $q = B/0 = \infty$ *și egalitatea dată este imposibilă, și al doilea* $A = 0$, $B = 0$ *și atunci* $x = 0/0$ *adică valoarea lui x este nedeterminată.*

Se înțelege că asemenea studii nu sunt nici de cum serioase".

După problemele de gradul I cu o necunoscută, trece la sistemele de două ecuații cu două necunoscute. Sistemul este scris sub forma redusă după care urmează: „*ca să dezlegăm trebue să eliminăm succesiv câte una din necunoscutele x și y. Eliminarea se poate face în diferite moduri, care însă se reduc la două metode principale, metoda substituțiunii și aceea a reducerii la același coeficient*". Sunt exemple de sisteme rezolvate după ambele metode, discutând totodată și cazurile de nedeterminare și incompatibilitate ce se pot ivi. Găsim și aici o notă, care o redăm în întregime:

„*Aceste puține observațiuni în privința valorilor generale ale lui x și y, precum și regulele date mai sus pentru soluțiunea a două egalități de gradul I cu două necunoscute constitue toată teoria acestor egalități. Cei mai mulți autori francezi în cari această teorie se reproduce într'un mod aproape stereotip, mai adaogă încă și un studiu sub titlul: discuțiunea valorilor generale, unde se cuprind cele arătate de noi mai sus. Această metodă s'a introdus prin imitație și în învățământul nostru cu o admirabilă fidelitate. Cu ajutorul unui raționament sănătos se poate vedea că acest studiu care s'a întâmplat să ocupe pe un profesor în timp de una sau chiar două lecții, nu adaogă nimic la cunoștințele cuprinse în puținele observații din text, ci numai împovărează studiul științei*".

La rezolvirea sistemelor de gradul I cu mai multe necunoscute, pe lângă metoda substituției și a reducerii la același coeficient, expune și metoda prin factori arbitrari sau metoda lui BÉZOUT modificată de GERGONNE la care adaogă următorul amănunt de istorie matematică: „*care însă* (metoda) *în principiu a fost arătată de* EULER".

Asupra problemelor nu insistăm căci sunt acelea obișnuite cu densități, datorii, fântâna și robinetele sale, etc. Capitolul se termină prin probleme de analiză nedeterminată, unde se arată pe larg mijlocul de a găsi soluțiile întregi a unei ecuații sau ale unui sistem nedeterminat.

In studiul ecuațiilor de gradul II observăm aceeași tendință de simplificare de până acum. Ecuațiile necomplecte nu sunt tratate de loc. Ecuația generală scrisă sub forma $ax^2 + bx + c = 0$ este imediat împărțită prin a, ca mai departe să se opereze numai asupra ecuații $x^2 + px + q = 0$.

După ce stabileşte relaţiile între coeficienţi şi rădăcini şi face descompunerea trinomului în factori de gradul I, BACALOGLU introduce noţiunile de *variaţie* şi *permanenţă*. Cu ajutorul lor găseşte următoarea regulă variabilă pentru cazul rădăcinilor reale: „ *O ecuaţie de gradul II are atâtea rădăcini pozitive câte variaţiuni şi atâtea rădăcini negative câte permanenţe*". Tot aici se defineşte maximum şi minimum unei funcţiuni şi se tratează cazurile care nu cer calculul derivatelor pentru găsirea lor.

Teoria ecuaţiilor de gradul II se termină cu un „*Apendice*", în care regăsim preocuparea autorului pentru istorie matematică.

După ce face o scurtă dare de seamă asupra rezolvirei ecuaţiilor de gradul III şi IV spune: „*metodele prin care se dezleagă ecuaţiile de gradul III şi IV şi care conduc obişnuit la ecuaţii de gradul II cu mai multe necunoscute sunt imperfecte şi complicate*". Arată apoi că de ecuaţii de gradul III s'au ocupat „FERREI *şi* TARTALEA, *metoda numindu-se a lui* CARDANUS, *care a publicat-o cel dintâi*". „*Asemenea italianul* FERRARI *a dezlegat egalitatea de gradul IV şi metoda lui poartă numele de regula lui* BOMBELLI".

(Va urma).

FLORICA CÂMPAN
(Profesoară, Cernăuţi).

I. H. ALSTED LA ALBA-IULIA

(Cu prilejul tricentenarului morţii sale)

(Urmare dela pagina 345)

Lucrarea cea mai importantă a lui ALSTED în domeniul matematicelor, poartă titlul: *Methodus | Admirando | rum Mathema | ticorum | complectens | Novem libros Matheseos | universae: | In quorum. 1. Mathematica generalis. 2. Arithmetica. 3. Geometria. 4. Cosmographia. 5. Uranoscopia. 6. Geographia. 7. Optica. 8. Musica. 9. Architectonica. Studio Iohannis-Henrici Alstedi. Herbornae Nassoviorum 1613.* Formatul cărţii e 12^0 şi cuprinde 532 pagini urmate de un indice pe 11 pagini. Ea mai are un „*Appendix*" de 59 pagini de acelaş format, apărut tot în Herborn la 1613. Cartea nu are nici o figură, nici măcar în partea care tratează geometria.

Acest tratat a lui ALSTED a ajuns mai multe ediţii: a doua a apărut la 1623, a treia la 1641, iar a patra la 1657. Ea a fost retipărită şi în marea lucrare a lui ALSTED: „*Scientiarium omnium Encyclopaedia septem Tomis distincta*“. 4 volume în folio, apărută în Herborn la 1630, având o prefaţă dedicată principelui BETHLEN.

„*Methodus admirandorum mathematicorum*“ începe cu o introducere: *Isagoge,* în care ne dă tehnologia şi economia matematicii. După ALSTED matematica se împarte după următoarea schemă pe care o reproduc întocmai:

- Mathematica
  - Generalis
  - Specialis
    - Arithmetica
      - Pura
      - Media: ut
      - Musica
    - Geometria
      - Pura
      - Media: vide A

- A. Media de
  - Corpore
    - Mobili: Uranoscopia
    - Immobili: Geographia
  - Qualitate
    - Visibili: Optica
    - Figurabili: Architectonica.

Cartea întâi cuprinde matematica generală.

Aceasta este ştiinţa care tratează în general despre cantitate. Matematica generală are două părţi: archelogia şi pathologia. Archelogia tratează despre principiile cantităţii. Scopul ştiinţelor matematice este fie foarte îndepărtat şi primul, gloria lui D-zeu, fie îndepărtat şi mijlociu, cunoaşterea macrocosmului şi admiraţia microcosmului, fie apropiat, cunoaşterea temeinică a cantităţii.

„*Matematica pleacă dela următoarele 8 axiome:*

1. *Intregul e mai mare decât partea sa.*
2. *Dacă la mărimi egale adunăm mărimi egale, sumele sunt egale.*
3. *Dacă din mărimi egale scădem mărimi egale, celea ce rămân sunt egale.*
4. *Dacă la mărimi neegale adunăm mărimi egale, sau neegale, sumele sunt neegale.*
5. *Dacă din mărimi neegale scădem mărimi egale, celea cari rămân sunt neegale.*

6. *Mărimile egale cu una și aceeași, sunt egale și între ele; sau cum enunță alții, cele egale cu o a treia sunt egale între ele și invers.*

7. *Mărimile care sunt îndoitul aceleiași, sau multipli întregi sau în mod egal mai mari, sunt egale între ele și invers.*

8. *Mărimile care sunt jumătatea aceleiași sau în mod egal mai mici, sunt egale și între ele*".

Alte axiome matematica nu are.

Obiectul cărții a doua este aritmetica. ALSTED a dat, poate cea mai frumoasă definiție a aritmeticii: „*Aritmetica, cea dintâi dintre matematici, este știința de a număra bine*". El o împarte în patru părți: *aritmetica teoretică* sau *absolută*, *aritmetica practică* sau *logistica geometrică*, *logistica astronomică* și *logistica populară*.

„*Aritmetica teoretică se ocupă de număr considerat în mod absolut și în sine; de aceea se numește și absolută*". In această parte se tratează: împărțirea numerelor, notația lor, adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea acestora, numerele prime și compuse, fracțiile, numerele mixte, proporția aritmetică, regula de aur directă și cea inversă, regula societății, și progresia geometrică. „*Logistica astronomică tratează despre fracțiunile astronomice (cari popular se numesc fizice) referitoare la mișcările circulare (adică cerești)*". E vorba de cele patru operațiuni cu grade minute și secunde. „*Logistica populară tratează despre lucrurile numărabile, cari intervin în uzul zilnic*". Această parte cuprinde problema calculului monetelor, măsurilor și greutăților.

Cartea a treia conține geometria. „*Geometria este știința de a măsura bine*". ALSTED împarte geometria în teoretică și practică. „*Geometria teoretică este aceea care consideră cantitatea în mod abstract, adică cu ajutorul propozițiilor*". Această parte se ocupă cu atributele mărimii, linia, unghiul, proprietățile figurilor, trigonometria, geometria triangulațiilor, ciclometria, planimetria suprafețelor strâmbe și stereometria.

„*Urmează geometria practică și medie, sau referitoare la un anumit obiect măsurabil și se numește trigonometria relativă sau medie. Această trigonometrie este fie astronomică fie geodetică. Trigonometria astronomică este doctrina despre soluția sau rezolvirea triunghiurilor*". Aceasta din urmă formează obiectul părții a

doua a geometriei. Ea conţine următoarele: părţile triunghiului, felul triunghiurilor, asemănarea trigonometrică, rezolvirea specială a triunghiurilor prin regulele geometrice, rezolvirea triunghiurilor rectilinii cu ajutorul riglei şi al compasului şi soluţia triunghiurilor sferice cu ajutorul planisferei şi astrolabiului.

„*Urmează geometria geodetică; ea e fie metrică fie organică. Cea metrică ne învaţă să aflăm aria triunghiului: şi se numeşte popular agrimensorie*". Geometria geodetică metrică formează obiectul părţii a treia a geometriei. Se tratează în această parte măsurarea ariilor figurilor plane şi măsurile de lungime. Partea a patra o formează geometria geodetică organică. Ea se ocupă cu instrumentele de măsură, îndeosebi cu cadranul planisfera şi astrolabiul.

Cartea a patra tratează pe scurt *cosmografia*, care „*este ştiinţa sferei cereşti*".

Cartea a cincia are ca obiect uranografia sau uranoscopia. Ea „*este ştiinţa lucrurilor cereşti întrucât sunt măsurabile*". Uranoscopia se împarte în patru părţi. Prima tratează despre „*primum mobile*", orizon, meridian, ecuator, zodiac, cercurile mari, cercurile mici, sfera a noua, a opta, stelele fixe, construirea şi utilizarea globului ceresc. A doua parte a Uranoscopiei se ocupă cu teoria planetelor. Ea tratează despre numărul orbitelor, mişcarea şi teoria planetelor. A treia parte se ocupă cu computul, iar a patra cu astrologia.

Urmează, în patru părţi *geografia* care „*este ştiinţa măsurării sferei pământeşti*".

Cartea a şeaptea cuprinde, — împărţită în patru părţi, — Optica, pe care o defineşte astfel: „*Optica este ştiinţa de a vedea bine*".

Muzica, — în patru părţi, — formează obiectul cărţii a opta.

Cartea ultimă se ocupă cu *Architectonica*. Ea este „*ştiinţa construirii edificiilor*" şi este, după dânsul, „*o artă liberală*", iar nu o meserie. Cultivatorii ei se numesc architecţi. E interesantă definiţia architectului. „*Architectul este un om bun (vir bonus), învăţat în regulele de a construi un edificiu*". Architectul principal se numeşte „*Ingeniarius*". Architectura este însăşi construcţia unui edificiu; ea formează ocupaţia întreprinzătorilor. Mai amintesc din această parte a cărţii lui ALSTED calităţile pe cari le cere dela architect. Acesta trebue să fie inteligent şi isteţ şi trebue să cunoască bine geometria, optica, aritmetica, istoria, fizica, muzica, medicina şi astronomia.

Apendicele cuprinde o scurtă bibliografie matematică şi un compendiu matematic.

Merită să mai amintim, că ALSTED a fost primul enciclopedist german.

* * *

ALSTED nu a fost un geniu matematic şi nici nu s'a ocupat exclusiv cu matematicele. Insuşi „*Methodus*“ este o carte didactică pe care a scris-o folosindu-se de manualele mai vechi. Cartea conţine însă o mulţime de definiţii şi observaţii originale, carî indică o cultură matematică profundă şi un spirit matematic delicat. In Ardeal ALSTED a fost cel dintâi reprezentant remarcabil al matematicilor.

VICTOR MARIAN.

O PROBLEMĂ DE CONSTRUCŢIE

I. D-l Prof. O. ŢINO rezolvă, în articolul cu acest titlu dela pag. 174, o prea interesantă problemă de construcţie geometrică, reuşind să construiască cu rigla şi compasul pe o cale foarte elementară şi elegantă nişte puncte particulare de pe bisectoarele unghiurilor unui triunghiu.

Interesul pe care-l prezintă problema D-lui Prof. O. ŢINO, va da loc desigur încă la o serie de articole, note şi probleme, din partea acelora ce se vor ocupa de acea problemă. In acea serie intră articolul D-lui Prof. M. GHERMĂNESCU, la pag. 348 şi articolul de faţă, în care dau două soluţiuni diferite şi de soluţia D-lui Prof. O. ŢINO şi de aceea a D-lui Prof. M. GHERMĂNESCU.

Citind articolul D-lui Prof. O. ŢINO şi ocupându-mă de problema sa, mi-am amintit de problema 585, pe care am rezolvat-o şi eu pe când eram elev la liceul internat din Iaşi şi a cărei soluţie s'a publicat în 1901, la pag. 88, Vol. VII, *Gazeta Matematică*. Problema 585 a fost propusă de † AL. ROŞU. In ea se cerea *să se găsească locul intersecţiei dreptelor* BE, CD *ştiind că* D *şi* E *sunt două puncte pe laturile* AB *şi* AC *ale unui triunghiu* ABC *astfel încât*

$$BD = DE = EC$$

baza BC *a triunghiului fiind fixă, iar unghiul* A *constant.*

S'a găsit $\sphericalangle BMC = \sphericalangle DME = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$

şi deci locul lui M, intersecţia dreptelor BE şi CD este un segment de cerc.

Redactorul redijor al problemei 585, regretatul † V. CRISTESCU, a publicat o notă la finele soluţiei, la pag. 89, Vol. VII, prin care arăta că la nici una din soluţiile primite nu s'a dat discuţia problemei. Fără o discuţie amănunţită nu se poate şti dacă M există oricare ar fi valoarea unghiului A şi poziţia vârfului A. Nu se poate şti care parte din arcul BMC convine locului şi nici *dacă există mai multe drepte ca* DE. Nota lui † V. CRISTESCU se termină cu promisiunea unui articol care să dea întreaga discuţie a problemei. Se vede că † V. CRISTESCU nu s'a mai ocupat de această problemă, care a fost trecută la problemele nerezolvate, în aşteptarea discuţiei din partea corespondenţilor.

Articolele D-lor Prof. O. ŢINO şi M. GHERMĂNESCU şi articolul de faţă dau elemente suficiente şi preţioase pentru a ataca cu succes discuţia problemei 585.

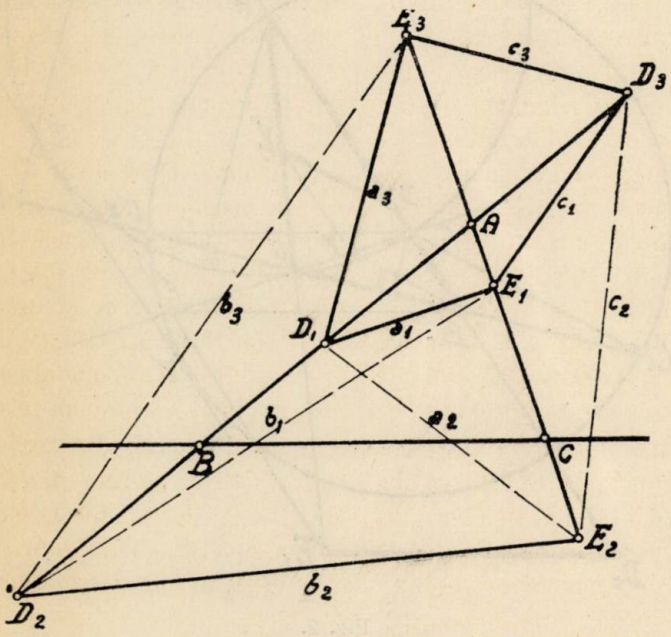


Fig. 1.

In cele ce urmează voiu da o soluţie geometrică şi o soluţie algebrică construcţiei punctelor D şi E de pe laturile AB şi AC ale unui triunghiu ABC, aşa încât

$$BD = DE = EC.$$

După poziția punctelor D, E pe laturile triunghiului sau pe prelungirile lui se pot avea 9 poziții ale segmentului DE notate cu a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 pe fig. 1.

II. *Soluție geometrică.* 1°. Presupun problema rezolvată și fie DE o soluție corespunzătoare notației a_1 dela pag. 308, din articolul D-lui M. GHERMĂNESCU. Complectez rombul BDEF (fig. 2) și

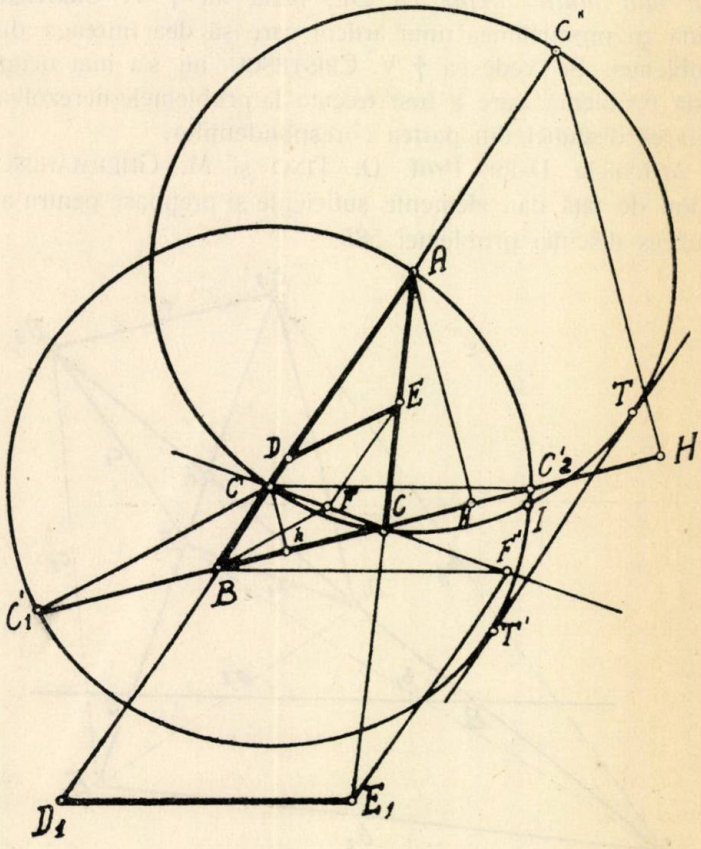


Fig. 2.

notez cu C′ intersecția lui CF cu AB. Triunghiul CEF este isoscel și fiindcă EF este paralelă cu AB urmează că

$$\sphericalangle ECF = \sphericalangle EFC = \sphericalangle FC'A$$

de unde rezultă că

$$AC' = AC.$$

Fie acum C_1' intersecția lui BC cu paralela dusă din C' la BF. Din triunghiurile $CC'C_1'$ și CC'A tăiate de transversalele BF și FE, paralele la baze, se scoate:

$$\frac{C'C_1'}{BF} = \frac{C'C}{FC} = \frac{C'A}{FE}$$

și fiindcă

$$BF = FE$$

se deduce

$$C'C_1' = C'A.$$

Invers, dacă se ia C' și C_1', respectiv pe AB și BC, așa încât

$$C'A = C'C_1' = AC$$

și se construește F la intersecția lui CC' cu paralela BF la $C'C_1$, atunci paralela FE la AB determină triunghiul FEC isoscel cu unghiul F și C egale, iar considerația triunghiurilor $CC'C_1'$, CC'A tăiate de BF, FE paralele la baze dau

$$BF = FE = EC.$$

Din cele de până aici rezultă următoarea construcție geometrică a segmentelor DE, cu rigla și compasul:

Din A *ca centru, cu* AC *ca rază, descriu un cerc care taie pe* AB *în* C' *și* C''.

Cercul descris din C' *ca centru cu* C'A = AC *ca rază taie pe* BC *în* C_1', C_2'.

Paralela din B *la* $C'C_1'$ *taie pe* CC' *în* F. *Paralela din* F *la* AB *taie pe* AC *în* E. *Paralela din* E *la* BF *taie pe* AB *în* D. *Segmentul* DE *este o soluție a problemei, căci*

$$BD = DE = EC.$$

Plecând dela C_2' *și făcând aceleași construcții se găsește o a doua soluție, notată pe fig. 2 cu* D_1E_1.

Dacă cercul cu centrul în C'' taie pe BC într'un punct C_1'' sau în două puncte C_1'', C_2'', atunci se mai găsesc una sau două soluțiuni.

Pentru cazul figurei 2, cercul C'' nu întâlnește pe BC, deci figura nu are decât două soluțiuni.

2°. *Discuție.* Ne întrebăm *care sunt condițiunile de posibilitate și numărul soluțiunilor?*

Consider numai triunghiuri ABC în care $AC < AB$, la care se reduc şi triunghiurile $AB < AC$ prin simpla schimbare a literelor B, C între ele.

Pe fig. 2 se notează cu h, H, H′ proecţiile punctelor C′, A, C″ pe BC.

Pentru a avea punctul C_1' trebue ca

$$C'h = C'B \sin B < C'C_1 = b$$

$$\therefore \quad (c - b) \sin B < b$$

$$\therefore \quad \sin C - \sin B < 1$$

ceea ce are loc totdeauna căci B şi C sunt mai mici decât π.

Deci punctele C_1', C_2' există totdeauna şi dau două soluţiuni.

Pentru ca cercul C″(CA) să taie pe BC, trebue ca

$$C''H' \leqslant AC = b.$$

Dar triunghiurile H′C″B, HAB dau

$$\frac{C''H'}{AH} = \frac{BC''}{AB} = \frac{b + c}{c}$$

$$\therefore \quad C''H' = \frac{b + c}{c} h_a$$

şi condiţia precedentă devine

$$(b + c) h_a \leqslant bc.$$

Dacă se înlocueşte h_a prin $c \sin B$ această condiţie se reduce la

$$(b + c) \sin B \leqslant b$$

sau încă, la:

$$\sin B + \sin C \leqslant 1.$$

In rezumat, dacă

$\sin B + \sin C < 1$, problema are 4 soluţiuni

$\sin B + \sin C = 1$, problema are 2 soluţiuni simple şi 1 soluţiune dublă

$\sin B + \sin C > 0$, problema are 2 soluţiuni.

3°. *Consideraţiuni topologice.* Construcţia dela 1° s'a făcut plecând dela cazul de figură când D şi E sunt respectiv între A, B şi între A, C. Făcând construcţii analoage cu cele dela 1° pentru

fiecare din cele 9 poziţii pe care le poate avea DE se găseşte că construcţia este generală pentru toate cazurile de figură.

Dau în cele ce urmează, un examen topologic al numărului de soluţiuni ce se pot avea în diferitele cazuri de figură.

Fie (fig. 3) un punct A pe o dreaptă Δ şi 3 cercuri de raze egale cu $AC = b$ şi cu centrele în C', A, C'' pe Δ. Cercurile (C') şi (A) şi (C'') şi (A) se întâlnesc în punctele M şi N de aceeaşi parte a lui Δ.

Consider că punctul C se mişcă pe cercul (A) pe arcul C'MNC'' şi obţin toate valorile posibile ale unghiului A pentru aceeaşi valoare b a laturei AC; deasemeni pentru fiecare poziţie a lui C, consider toate punctele B pe prelungirea lui AC' şi voiu obţine astfel toate triunghiurile ABC pentru valoarea b a laturei AC.

Nu examinez poziţiile lui B pe prelungirea lui AC'' pentru că ele dau triunghiuri simetrice cu acelea obţinute având B pe prelungirea lui AC'.

Dacă P este mijlocul arcului MN al cercului (A) am de examinat următoarele 4 cazuri de figură:

C între C' şi M; C între M şi P; C între P şi N; C între N şi C''.

Cazul C *între* C' *şi* M. Triunghiul, C'AM fiind echilateral avem evident, în acest caz, $A < \frac{\pi}{3}$.

Duc prin C dreapta $\Delta'\Delta''$ paralelă la Δ şi tangenta CT la cercul (C'') şi fie T', T'' intersecţiile lui CT cu cercul (C') şi K, K_1, K', K_1' intersecţiile lui $\Delta'\Delta''$ cu (C') şi (C''). Notez încă cu C_0 extremităţile diametrului CC' şi cu B_0 diametralul lui A în cercul (C').

Fie B un punct oarecare pe prelungirea lui CC'.

Intersecţiile lui CB cu cercurile (C') şi (C'') dau puncte ca C_1, C_2' dela fig. 2, iar paralelele din B la $C'C_1'$ sau $C''C_1''$ dau prin intersecţiile lor cu CC' sau CC'' puncte F de unde rezultă imediat punctele D şi E.

Când C este pe arcul C'M, deci în interiorul lui (C') orice coardă trecând prin C va tăia cercul (C') în 2 puncte C_1 şi obţinem *totdeauna două soluţiuni* DE.

Să examinăm însă figura mai deaproape, ținând seamă de diferitele unghiuri ce s'au format prin construcțiile din fig. 3, unde s'a notat cu T_0 intersecția lui Δ cu tangenta CT la (C″).

Când B este între C′ și T_0 coarda CB taie cercul (C′) în 2 puncte și nu întâlnește cercul (C″). Notând cu T_0 unghiul AT_0C se vede că maximul lui $c = AB$ în acest caz este AT_0. Dar triunghiul dreptunghic T_0TC'' dă

$$AT_0 + AC'' = \frac{C''T}{\sin T_0} = C''T \operatorname{cosec} T_0$$

$$\therefore \quad AT_0 = b\,[\operatorname{cosec} T_0 - 1]$$

AT_0 fiind maximum lui c. Se conchide:

Când $A < \frac{\pi}{3}$ *și* $c < b\,[\operatorname{cosec} T_0 - 1]$ *problema are totdeauna 2 soluțiuni.*

Dacă B este în T_0, secanta CB taie și cercul (C″) într'un punct T, deci dacă:

$A < \frac{\pi}{3}$ *și* $c = b\,[\operatorname{cosec} T_0 - 1]$ *problema are 3 soluțiuni.*

In fine *când* B *este în unghiul* $T_0C\Delta'$, *problema are 4 soluțiuni.*

Cazurile C *cuprins între* M *și* P, *sau între* P *și* N *sau între* N *și* C″ se studiază la fel.

Asupra genului soluțiunilor nu se poate spune nimic pe această cale dacă nu se face efectiv construcția.

Fig. 3 arată un caz care are o soluție a_3, două soluții a_2 și o soluție b_2, aceasta din urmă nefiind trasată pe figură deoarece ese din cadrul paginei revistei.

Trebue să adaog că dacă B este cuprins între C′ și B_0, deci dacă $c < 2b$, se găsesc alte soluții decât atunci când B este pe prelungirea lui AB_0, deci când $2b < c$.

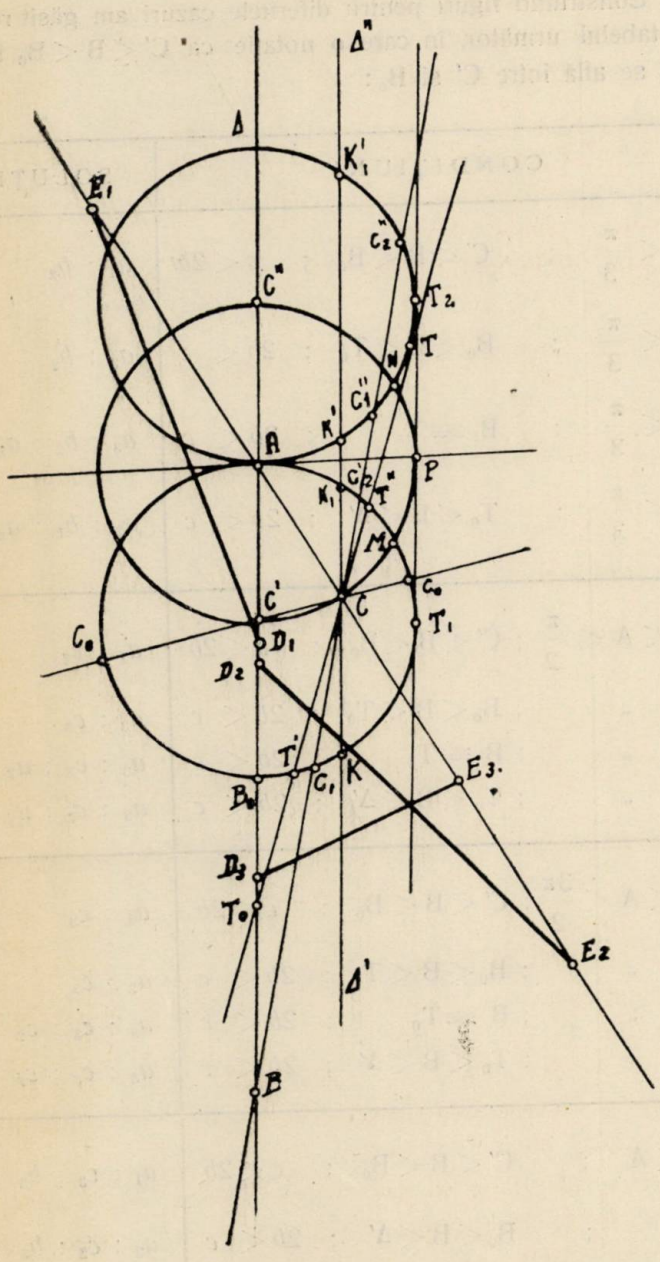

Δ''
Δ
K'1
E1
C''2
C''
T2
T
M
C''1
K'
A
P
C'2
K1
T''
M1
C'
C
C0
T1
C0
D1
D2
T'
C1
K
E3
B0
D3
T0
E2
Δ'
B

Fig. 3.

Construind figuri pentru diferitele cazuri am găsit rezultatele din tabelul următor, în care o notație ca $C' < B < B_0$ înseamnă că B se află între C' și B_0:

CONDIȚIUNI	SOLUȚIUNI
$A < \frac{\pi}{3}$; $C' < B < B_0$; $c < 2b$	a_1 ; b_2
$A < \frac{\pi}{3}$; $B_0 < B < T_0$; $2b < c$	a_3 ; b_2
$A < \frac{\pi}{3}$; $B \equiv T_0$; $2b < c$	a_3 ; b_2 ; a_2
$A < \frac{\pi}{3}$; $T_0 < B < \Delta'$; $2b < c$	a_3 ; b_2 ; a_2 ; a_2
$\frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}$; $C' < B < B_0$; $c < 2b$	a_1 ; c_3
„ ; $B_0 < B < T_0$; $2b < c$	a_3 ; c_3
„ ; $B \equiv T_0$; $2b < c$	a_3 ; c_3 ; a_2
„ ; $T_0 < B < \Delta'$; $2b < c$	a_3 ; c_3 ; a_2 ; a_2
$\frac{\pi}{2} < A < \frac{3\pi}{2}$; $C' < B < B_0$; $c < 2b$	a_1 ; c_3
„ ; $B_0 < B < T_0$; $2b < c$	a_3 ; c_3
„ ; $B \equiv T_0$; $2b < c$	a_3 ; c_3 ; c_2
„ ; $T_0 < B < \Delta'$; $2b < c$	a_3 ; c_3 ; c_2 ; c_2
$\frac{3\pi}{2} < A$; $C' < B < B_0$; $c < 2b$	a_1 ; c_3 ; b_3 ; c_2
„ ; $B_0 < B < \Delta'$; $2b < c$	a_3 ; c_3 ; b_3 ; c_2

Din acest tabel se poate construi uşor un altul care să dea condiţiile pentru a avea un anume gen de soluţie. Aşa de exemplu se vede că se pot avea soluţiuni de gen a_1 în următoarele condiţiuni:

$$A < \frac{\pi}{3} \quad ; \quad C' < B < B_0 \quad ; \quad c < 2b$$

$$\frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2} \quad ; \quad C' < B < B_0 \quad ; \quad c < 2b$$

$$\frac{\pi}{2} < A < \frac{3\pi}{2} \quad ; \quad C' < B < B_0 \quad ; \quad c < 2b$$

$$\frac{3\pi}{2} < A \quad ; \quad C' < B < B_0 \quad ; \quad c < 2b$$

adică *totdeauna* când $c < 2b$, care rămâne singura condiţiune pentru a avea soluţiuni a_1. Condiţiunea aceasta, după cum se vede din tabel, nu este caracteristică *numai* soluţiunilor a_1.

4°. *Cazuri particulare. a)* Oricare ar fi valoarea unghiului A, când $c = 2b$ unul din punctele D este chiar mijlocul lui AB, iar E corespunzător este chiar vârful A.

b) Când AB = AC, punctul C′ se confundă cu B aşa că în acest caz nu se mai poate construi F ca la 1°. Se observă însă pe fig. 2, pentru cazul general, că:

$$\frac{FC}{FB} = \frac{FC}{FE} = \frac{CC'}{C'A} = \frac{CC'}{CA}$$

care pentru cazul particular ce studiem devine:

$$\frac{FC}{FB} = \frac{CB}{CA}.$$

Se ia deci pe BA lungimea AB′ = BC. Paralela din A la B′C taie pe BC în F, după care se construeşte rombul BD_1E_1F. Diagonala într'un romb fiind bisectoară, E_1 este piciorul bisectoarei BE_1. La fel D_1 este piciorul bisectoarei CD_1.

In fine D_2, E_2 sunt picioarele bisectoarelor exterioare ale unghiurilor B şi C.

Dacă cercul de centru C″ şi de rază AC taie pe BC vom mai avea 1 sau 2 soluţiuni care se construesc ca în cazul general. Pentru aceasta, observând că unghiul BCC″ este drept, trebue ca

$$CC'' \leqslant CA$$

sau de oarece

$$CC'' = BC'' \sin B = 2b \sin B$$

trebue ca

$$2b \sin B \leqslant b$$

$$\therefore \quad \sin B \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad B \geqslant \frac{\pi}{6}.$$

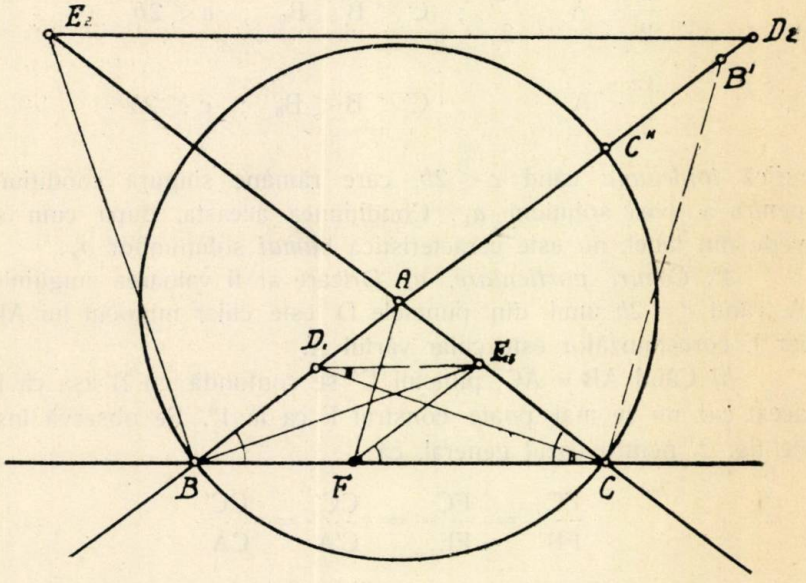


Fig. 4.

Deci: *In cazul triunghiurilor isoscele avem 2 soluţiuni* DE *paralele cu* BC *când* $B < 30^0$ *şi 3 sau 4 soluţiuni, din care 2 paralele cu* BC, *când* $B \geqslant \frac{\pi}{6}$.

Rezultă de aici că triunghiul echilateral are numai două soluţiuni paralele cu baza.

(Va urma) G-L GH. BUICLIU.

PREMIUL „INGINER AL. ROŞU“

Subsemnaţii membri în Comisiunea pentru decernarea premiului «ING. AL. ROŞU», cercetând Volumul XLIII al *Gazetei Matematice,* pentru alegerea celui mai harnic corespondent elev de liceu, am constatat în urma unor minuţioase cercetări, că activitatea desfăşurată de D-l NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU, elev cl. VIII-a la Liceul Militar „Mânăstirea Dealu“, îl aşează pe acesta în rândul întâiu al corespondenţilor *Gazetei Matematice.*

D-l N. D. ŞTEFĂNESCU s'a desprins din lotul mare de corespondenţi, elevi de liceu, ca un harnic rezolvitor de probleme.

D-l N. D. ŞTEFĂNESCU nu s'a mulţumit numai să rezolve un număr cât mai mare de probleme, ci a căutat ca soluţiunile trimise să fie cât mai elegante şi mai simple.

Deasemenea D-sa a întovărăşit aceste soluţiuni adesea şi cu observaţiuni interesante.

Hărnicia cu care D-l N. D. ŞTEFĂNESCU activează la *Gazeta Matematică* a fost dealtfel răsplătită şi în anul acesta, căci la Concursul *Gazetei Matematice,* D-sa şi-a păstrat locul întâiu cucerit anul trecut.

In consecinţă propunem ca premiul «ING. AL. ROŞU» să se acorde pentru anul XLIII D-lui NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU, elev cl. VIII-a la Liceul Militar „Mânăstirea Dealu“.

COMISIUNEA
PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „ING. AL. ROŞU“
GH. I. DUMITRESCU, CPT. C-DOR GRIGORE ZAPAN, AL. A. ROŞU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în şedinţa Adunării Generale din 23 Februarie 1939.

NOTE MATEMATICE

29. *Numere interesante de 10 cifre diferite*[1]). Pe lângă cele 274 soluțiuni ale ecuațiunei:

$$p \times Np = N$$

date de D-l G-L GH. BUICLIU în nota dela pag. 29, G. M. XLIII, pentru $p = 3$ am mai găsit următoarele 60 soluțiuni în care N_3 începe cu 1:

N_3	N	N_3	N
104 859 762	0 314 579 286	160 897 245	0 482 691 735
105 249 876	0 315 749 628	162 057 984	0 486 173 952
105 287 649	0 315 862 947	164 287 905	0 492 863 715
105 849 762	0 317 549 286	164 528 907	0 493 586 721
106 248 975	0 318 746 925	164 529 087	0 493 587 261
106 528 749	0 319 586 247	165 042 789	0 495 128 367
108 726 495	0 326 179 485	165 278 904	0 495 836 712
109 725 486	0 329 176 458	165 287 904	0 495 863 712
120 475 986	0 361 427 958	170 982 546	0 512 947 638
120 859 647	0 362 578 941	174 598 062	0 523 794 186
124 709 856	0 374 129 568	174 620 598	0 523 861 794
125 049 876	0 375 149 628	176 045 982	0 528 137 946
125 498 607	0 376 495 821	178 206 594	0 534 619 782
125 609 847	0 376 829 541	179 582 064	0 538 746 192
126 049 875	0 378 149 625	179 658 042	0 538 974 126
126 509 487	0 379 528 461	179 658 204	0 538 974 612
128 749 065	0 386 247 195	179 806 254	0 538 418 762
129 048 765	0 387 146 295	180 459 762	0 541 379 286
142 879 065	0 428 637 195	180 579 642	0 541 738 926
145 709 862	0 437 129 586	180 654 279	0 541 962 837
145 970 862	0 437 912 586	180 972 546	0 542 917 638
146 208 597	0 438 625 791	182 065 794	0 546 197 382
146 528 907	0 439 586 721	194 065 782	0 582 197 346
146 529 087	0 439 587 261	194 658 207	0 583 974 621
157 984 206	0 473 952 618	196 458 207	0 589 374 621
157 986 042	0 473 958 126	196 578 204	0 589 734 612
157 986 204	0 473 958 612	197 082 546	0 591 247 638
159 784 206	0 479 358 618	197 458 062	0 592 374 186
159 786 204	0 479 358 612	197 806 254	0 593 418 762
160 597 842	0 481 793 526	198 072 546	0 594 217 638

S'au găsit în total 334 soluțiuni din soluțiunile ecuației

$$p \times Np = N$$

în care N începe cu cifra zero, iar Np cu cifra unu.

(Va urma) STELIAN CETĂȚEANU.

1) Urmare la Nota dela pag. 300, Vol. XLIV, *« Gazeta Matematică »*.

30. *Asupra problemei 4230.*

D-l Inginer ALEX. STOENESCU trimite o interesantă soluție a problemei *4230.*

Astfel, neglijând frecarea și rezistența aerului, dă următoarele variante:

Soluția I-a. Aplicând teorema energiei cinetice:

$$1) \qquad E_c = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega_c^2 = m . g . z_c$$

unde pentru:

$$V_c = \omega_c . r \quad \text{și} \quad I_0 = m \frac{r^2}{2}$$

obține:

$$2) \qquad z_c = \frac{3 . \omega_c^2 . r^2}{4g} = \frac{\pi^2 n^2 . r^2}{1200 . g}$$

unde n este turația.

Soluția II-a. Mișcarea centrului de greutate este:

$$3) \qquad m \frac{d^2 z}{dt^2} = G. - T$$

G fiind greutatea și T tensiunea.

Mișcarea în jurul centrului de greutate este:

$$4) \qquad I_0 . \frac{d^2 \theta}{dt^2} = T . r.$$

Cum însă avem numai rostogolire, atunci: $z = r . \theta$, deci ținând seamă de această valoare și eliminând pe T din 3) și 4) se obține:

$$5) \qquad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{G . r}{m . r^2 + I_0} .$$

Cum $G = m . g$ integrând avem:

$$6) \qquad \omega = \frac{2g}{3r} . t.$$

Și cum pentru centrul de greutate:

$$V = \frac{2}{3} gt \quad \text{și} \quad z = \frac{1}{3} gt^2$$

atunci :

$$7) \qquad z_c = \frac{1}{3} g t_c^2 = \frac{\pi^2 n^2 r^2}{1200 g}$$

Adică aceeaşi ca 2).

Neţinând seamă de frecare se obţine :

$$z_c \lessapprox 1{,}96 \text{ m.}$$

D-l ALEX. STOENESCU face apoi observaţiunile asupra soluţiei problemei :

1) — Ecuaţia 1) nu este omogenă, $f \cdot z_c$ fiind o lungime.

2) — Momentul de inerţie este $\frac{1}{2} mr^2$ nu $\frac{1}{4} mr^2$.

3) — $\omega = 202{,}31$ reprezintă radiani pe secundă.

4) — In cazul frecărei, z_c trebue să fie mai mare, pentru ca prin rostogolire „Yo—Yo"-ul să atingă 1933 ture/minut.

5) — In cazul problemei ar trebui să se ţină seamă şi de percuţiunea când firul ajunge la limită.

Iată acum şi răspunsul autorului :

1) — Expresiunea $f \cdot z_c$ este socotită drept un lucru deoarece f este o forţă de frecare (rezistenţă) prin rostogolire.

Cifra $f = 0{,}1$ este o cifră practică, care — este just — trebuia exprimată în kg.

2) — Momentul trebue luat $\frac{1}{2} mr^2$, aceasta modificând rezultatul numeric la $z_c = 0{,}9778$ m.

3) — In notaţia lui ω trebuesc socotite *radiani* şi nu *ture.*

4) — Este just că ar trebui să se ţină seamă şi de *percuţiune* la finele firului.

In plus, problema este şi mai complicată, deoarece trebue să se mai ţină seamă şi de :

— Nerigiditatea mânei (suportului) ;

— Elasticitatea firului ;

— Faptul că r variază din cauză că firul se înfăşoară.

Soluţia dată problemei 4230 are dar un caracter practic, care duce la un rezultat suficient.

Socotesc că sub această formă poate fi abordată de corespondenţii noştri.

Soluția riguroasă este așa cum o indică D-l Inginer ALEX. STOENESCU cu toate observațiunile făcute. O astfel de soluțiune ar depăși cu mult cadrul unei rezolvări obișnuite și în acest caz ea ar constitui un interesant *articol* pe care Gazeta l'ar publica cu plăcere. I. L.

31. *Notă asupra teoremei* SIMSON. Fie o parabolă (p) de focar m, tangenta în vârf u, directoare v; pentru a obține un punct p pe parabolă, fie t un punct pe u; se construește tangenta (t) perpendiculară în t pe mt apoi punctul de contact, pe perpendicualara pe v în punctul q unde o taie mt. Se proiectează m pe tangenta (t), în μ sub unghiul φ. Vom arăta că tangenta (τ) în μ la curba (μ) e fixă, deci că (μ) este o dreaptă, apoi că e tangentă parabolei.

Pentru aceasta vom construi tangenta (τ) prin condiția să avem egalitatea de unghiuri $(\tau, \mu m) = (t, pm)$ căci unghiul $(\mu p, \mu m)$ fiind constant, normala în μ trece prin intersecția ν a normalelor la înfășurătoarele laturelor, adică perpendiculara în m pe μm și normala în p a parabolei; normala este $\mu\nu$ și tangenta (τ), perpendiculara în μ pe ea. Insă din cercul ($\mu pm\nu$) descris pe $\mu\nu$ ca diametru, avem $(\tau, \mu m) = (t, pm)$, relația care precizează tangenta (τ). Proprietatea rezultă acum imediat căci $(t, pm) = (pq, pt)$ adică $(\tau, \mu m) = (pq, t)$ și cum (t), μm fac unghiul constant φ, (τ) va fi deasemenea înclinată de unghiul constant φ pe pq, adică pe axa (a) a parabolei; tangenta în μ având o direcție fixă, locul lui (μ) e dreapta (τ).

Fie τ intersecția ei cu tangenta în vârf u, adică proiecția focarului m sub unghiul φ pe tangenta u, din proprietatea de loc geometric, de care se bucură (τ). Cum și unghiul $(m\mu, t)$ este egal cu φ, patrulaterul ($\mu mt\tau$) este inscriptibil în cercul de diametru μm, unghiul din t fiind drept; deci și unghiul cu vârful în τ pe u și a cărui una din latură trece prin m este drept adică (τ) e o tangentă a parabolei (p) de focar m și tangentă în vârf u.

Se regăsește propoziția: *proiecțiile focarului unei parabole, sub același unghiu, pe tangente, sunt colineare pe o tangentă a parabolei.*

Demonstrația de față, este o variantă a celor cunoscute [1]).

N. N. MIHĂILEANU.

1) De ex.: V. VÂLCOVICI: *Asupra podarei unei curbe plane.*

32. *Asupra unor serii.*

In G. M.—XL—340 şi 395, s'au însumat seriile de termen general

$$u_n = \frac{n^m}{a^{n-1}} \quad , \quad u_n = (\alpha + n)^m \, x^{n-1},$$

iar în G. M.—XLI—341, se arată că aceste rezultate sunt cunoscute, ele rezultând dintr'un rezultat mai general relativ la însumarea seriilor ai căror coeficienţi satisfac unele relaţiuni recurente.

Vreau să menţionez că prima serie a mai fost calculată în G. M.—XIX—213, unde suma ei a fost dată sub formă de determinant

$$S_p = \frac{1}{(1-x)^p} \begin{vmatrix} 1 & -x\,C'_p & -x\,C^1_p & \dots & -x\,C'_p \\ 1 & 1-x & -x\,C'_{p-1} & \dots & -x\,C'_{p-1} \\ 1 & 0 & 1-x & \dots & -x\,C'^{1}_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1-x \end{vmatrix}$$

în care trebue făcut

$$p = m \quad \text{şi} \quad x = \frac{1}{a}$$

şi care procedeu se poate aplica şi celei de a doua serii.

G. G. CONSTANTINESCU.

33. *Asupra problemei 3676.*

In această problemă se încerca să se demonstreze identitatea

$$\frac{1}{n+1} - \frac{C'_n}{2n+1} + \frac{C^2_n}{3n+1} - \dots (-1)^n \frac{C^n_n}{n(n+1)+1}$$

$$= \frac{n^n\,(n)!}{(n+1)(2n+1)\dots[n(n+1)+1]},$$

iar soluţia ei a fost dată prin două metode în G. M.—XXXVI—267.

Vreau să arăt că această identitate nu este decât un caz particular al identității

$$\frac{1}{a} - \frac{C'_p}{b} + \ldots + (-1)^p \frac{C^p_p}{l} = \frac{p!\, r^p}{a.b \ldots l}$$

în care $a, b \ldots l$ sunt $p + 1$ termeni în progresie aritmetică de rație r. Théorie de Nombres ED. LUCAS, pag. 276 — căci dacă luăm

$$r = p = n$$

obținem tocmai identitatea care face obiectul problemei 3676.

G. G. CONSTANTINESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL «GAZETEI MATEMATICE» DIN ANUL 1939

13 — 14 Aprilie 1939

CLASA IV-a

Geometria în spațiu. Se consideră o sferă de rază R, cu centrul O și un cerc mare (C) al sferei. Diametrul sferei perpendicular pe planul cercului (C) întâlnește sfera în A, A'.

In punctul B situat pe OA astfel încât:

$$\frac{\overline{BO}}{\overline{AB}} = \frac{m}{n}$$

se duce un plan perpendicular pe AA', care taie sfera după cercul (C').

a) Două plane care trec prin AA', cuprind între ele, pe (C), un arc MN de lungime dată *l*.

Să se găsească lungimea arcului M'N' cuprins între cele două plane pe cercul (C').

b) Tangentele în M, N .a cercul (C) se întâlnesc în P, iar tangentele în M', N' la cercul (C') se întâlnesc în P'.

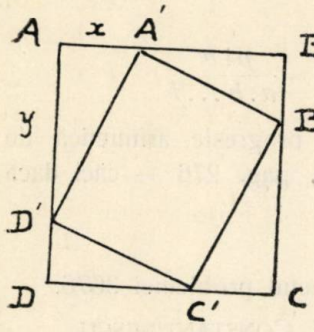
Să se arate că:

1°. Dreptele AA', PP' sunt într'un plan;

2°. Dreptele MN, M'N' sunt într'un plan;

3°. Dreptele MP, M'P' sunt într'un plan.

Algebra. I. In dreptunghiul ABCD de dimensiuni date



$$AB = CD = a \quad \text{şi} \quad BC = DA = b,$$

se consideră dreptunghiul A'B'C'D' înscris astfel ca raportul $\frac{A'B'}{A'D'}$ să aibă o valoare dată m.

Luându-se ca necunoscute

$$AA' = x \quad \text{şi} \quad AD' = y,$$

se cere:

1°. Să se stabilească şi să se rezolve sistemul de ecuaţii care dă valorile acestor necunoscute.

2°. Admiţându-se că

$$0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b \quad \text{şi} \quad a > b$$

să se arate că trebue să avem:

$$m > \frac{a}{b}.$$

3°. Să se studieze cazul particular $m = 1$.

II. Doi oameni vorbind despre vârsta lor, unul spune celuilalt:

Când te-ai născut tu, eu eram cu atât mai mare decât eşti, cu cât vei fi tu când vei avea 3/5 din vârsta mea, iar de când ai împlinit un an, a trecut un timp egal cu o pătrime din vârsta noastră de acum.

Se cere vârsta de azi a celor doi oameni.

(Ambele chestiuni obligatorii).

CLASA V-a

Geometria. I. Se consideră un triunghiu ABC înscris în cercul (O). Paralela din A la BC retaie cercul (O) în A'; fie β, γ simetricele lui A' faţă de diametrii BO, CO. Bβ taie pe AC în N şi Cγ taie pe AB în P. Să se arate că triunghiurile ABN, ACP sunt isoscele.

II. Se consideră un triunghiu ABC înscris în cercul (O). Din B şi C ca centre şi cu laturile opuse ca raze se descrie două cercuri ce intersectează în A', A'' — A' fiind pe cercul (O).

Fie M un punct arbitrar pe arcul AB al cercului (O); MB, MC taie cercurile (B), (C) în B', B'' şi C', C'' — B', C' notate de aceeaşi parte cu M, iar B'', C'' de cealaltă parte a laturii BC. Cercurile (B), (C) retaie cercul (O) în β şi γ.

Să se arate că:

1°. $\sphericalangle B''BA'' + \sphericalangle ABM = \sphericalangle BAC$, $C''CA'' - \sphericalangle ACM = \sphericalangle BAC$.

2°. $\sphericalangle B''B'A'' + \sphericalangle C''C'A'' = \sphericalangle BAC$.

3°. Dreptele B'C', B''C'' se întâlnesc în A''.

4°. Dreptele $B\gamma$, $C\beta$ se întâlnesc în A''.

5°. Să se cerceteze relațiile de sub 1°, când M este pe arcul AC, ori pe arcul BC al cercului (O).

* * *

(E inutil a se transcrie enunțul problemelor. Figurile se vor desemna în creion, cât mai exact).

Algebra. Se consideră fracțiile:

$$f_1 = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}\ ,\quad f_2 = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4}\ ,\quad F_1 = \frac{x^2 - (1 + a^2)\,x + a^2}{x^4 - (1 + a^4)\,x^2 + a^4}$$

unde a este un număr real.

Se cere:

1°. Să se afle fracția algebrică F_2, care să îndeplinească condiția:

$$\frac{f_1 - F_1}{f_2 - F_1} : \frac{f_1 - F_2}{f_2 - F_2} = -1.$$

2°. Se face notația: $E(a) = \dfrac{f_1 - F_1}{f_2 - F_1}$ și se consideră fracția algebrică:

$$F(x) = \frac{(x^2 + 3x - 1)\,E(0) + 2}{(x^2 + 3x - 1)\,E(0) - 2x^2 + 2x + 3}\ .$$

Dintre toate valorile pozitive ale fracției $F(x)$, să se afle valoarea cea mai mică.

[*Lămurire.* $E(a)$ este o fracție, care conține cantitatea a; $E(0)$ înseamnă fracția obținută când înlocuim pe a cu 0 în fracția $E(a)$].

3°. Dacă $0 < a < 1$, să se demonstreze că $\dfrac{f_1 - F_2}{f_2 - F_2} < 0$ când x nu este cuprins în intervalul $(-3, 2)$.

CLASA VI-a

Trigonometria. Fie ABC un triunghiu oarecare. Se construesc următoarele segmente: $AC_1 \perp AC$, $BA_1 \perp AB$ și $CB_1 \perp BC$, astfel că punctele C_1 și B sunt de aceeași parte a dreptei AC, A_1 și C sunt de aceeași parte a dreptei AB, iar B_1 și A de aceeași parte a dreptei BC.

Se notează: $\overline{AC_1} = l$, $\overline{BA_1} = m$ și $\overline{CB_1} = n$.

Se cere:

1°. Să se demonstreze că relația:

(1) $lmn = (a \sin B - n \cos B)\,(b \sin C - l \cos C)\,(c \sin A - m \cos A)$

reprezintă condiția necesară și suficientă ca dreptele AA_1, BB_1, CC_1 să fie concurente.

2°. Fie A'B'C' triunghiul ortic al triunghiului ABC. Să se demonstreze, cu ajutorul relației (1), că perpendicularele coborîte din vârfurile A, B, C, respectiv pe laturile B'C', C'A' și A'B', sunt concurente.

3°. Să se demonstreze că, în cazul când cevienele AA_1, BB_1, CC_1 se taie în punctul K al lui LEMOINE, există relațiile:

$$l = \frac{b\rho}{3a^2 + b^2 - c^2}, \quad m = \frac{c\rho}{3b^2 + c^2 - a^2}, \quad n = \frac{a\rho}{3c^2 + a^2 - b^2},$$

unde

$$\rho = \sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

Geometria în spațiu. Se dă un trapez isoscel cu înălțimea medie geometrică a bazelor. Prin rotirea sa în jurul axei de simetrie se obține un trunchiu de con.

a) Să se arate că acestui trunchiu de con i se poate înscrie o sferă S și i se poate circumscrie o sferă S'.

b) Să se afle raportul ariilor celor două sfere, presupunând cunoscute lungimile celor două baze ale trapezului.

c) Se consideră sfera σ înscrisă în conul ce are ca bază, baza mică a trunchiului de con și generatoarele în prelungirea generatoarelor trunchiului de con.

Să se arate că raportul volumelor sferelor S, σ este egal cu raportul cuburilor lungimilor bazelor trapezului.

CLASA VII-a

Algebra. Se consideră funcțiunea:

$$f(x\,;\,m,\,n) = \frac{x^m}{1 - x^n},$$

unde m și n sunt două numere întregi și pozitive, și se cere:

1°. Să se reprezinte grafic diferitele forme ce poate avea curba:

$$y = f(x\,;\,m,\,n),$$

după diferitele valori ale lui m și n.

2°. Să se deducă din reprezentările făcute, numărul de rădăcini reale ale ecuației:

$$x^m + a(x^n - 1) = 0,$$

a fiind un parametru variabil real.

3°. Să se studieze seria cu termenul general

$$u_n = f(x\,;\,n + p,\,n).$$

4°. Să se determine numărul n, în funcţie de p, aşa fel ca limita produsului

$$\lim_{x=\infty} f(x\ ;\ 2,\ n)\ f(x\ ;\ 6,\ n)\ \ldots\ f[x\ ;\ p\,(p+1),\ n]$$

să fie finită şi diferită de zero.

Geometria descriptivă. Se dau punctele :

A (65, 0, 80) ; B (145, 80, 0).

Se cere :

1°. Să se construiască urmele unui plan PαP′, perpendicular pe dreapta AB, în mijlocul M al ei.

2°. Să se afle adevărata mărime a unghiului pe care îl face, în spaţiu, dreptele αP şi αP′.

3°. Să se construiască un hexagon regulat, situat în planul PαP′, cu latura egală cu lungimea αM, şi care să fie aşezat spre dreapta direcţiei αM.

Planul PαP′ se consideră transparent ; iar pentru proiecţiuni, planele de proiecţie se socotesc opace ; iar în proiecţiune, pentru proiecţia orizontală vor fi văzute toate liniile din diedrele I şi II, iar pentru proiecţia verticală, cele din diedrele I şi IV.

Linia pământului paralelă cu marginile mici ale paginei şi la mijloc.

Cotele punctelor reprezintă : primul număr din paranteză distanţa dela marginea din stânga a paginei ; al doilea număr depărtarea şi al treilea cota. Datele în milimetri.

Epura se va executa pe a treia pagină a coalei de hârtie ; pe prima pagină scriindu-se enunţul, iar pe a doua pagină o legendă în care să se arate procedeele urmate pentru rezolvare şi construcţiile întrebuinţate.

CLASA VIII-a

Algebra. Se consideră ecuaţia :

$$6a^2x^5 + 15a\,(a+b)\,x^4 + 10\,(a^2+b^2+4ab)\,x^3 + 30b\,(a+b)\,x^2 + 30b^2x + b^2 = 0$$

unde a şi b sunt numere reale.

Se cere :

1°. Să se studieze natura rădăcinilor acestei ecuaţii, când a şi b variază, luând valori pozitive şi negative şi să se afle condiţia ca ecuaţia să admită trei rădăcini reale distincte.

2°. Fie punctul M $(a,\ b)$ în planul axelor de coordonate rectangulare xx', yy'.

Să se demonstreze că există o dreaptă (Δ), de coeficient unghiular real ξ, încât, când punctul M $(a,\ b)$ descrie dreapta (Δ), ecuaţia dată admite o rădăcină triplă.

3°. Se notează membrul întâi al ecuaţiei prin $f(a,\ b,\ x)$ şi apoi :

$$\varphi(a,\ b) = b\,[f(a,1,1) - f(1,1,1)] - 1.$$

Să se afle aria din cadranul I cuprinsă între curbele :

$$\varphi(x,\ y) = 0 \quad \text{şi} \quad x^2y = \frac{1}{31}.$$

Geometria analitică. In raport cu două axe perpendiculare Ox, Oy se consideră conica de ecuaţie :

$$x^2 - y^2 + 2ax = 0.$$

I. Se cere :

1°. Să se găsească natura conicei.

2°. Să se determine centrul conicei, adică să se determine un punct I în aşa fel ca M fiind pe conică şi simetricul lui faţă de I să fie tot pe conică.

3°. Să se facă o translaţie a axelor de coordonate, noile axe IX, IY având origina în I.

4°. Să se construiască conica.

II. Fie M un punct oarecare pe conică, P proiecţia lui pe Ox, N şi Q respectiv punctele unde tangenta în M taie pe Oy şi Ox, R punctul unde perpendiculara în Q pe Ox taie pe PN şi S punctul unde OR taie pe MQ. Se cere :

1°. Să se arate că punctele M, P, O, R sunt pe un acelaş cerc.

2°. Să se arate că dreapta PR este tangentă la un cerc fix când M descrie conica.

3°. Să se găsească locul lui S când M variază ca la No. precedent.

Indicaţie. Chestiunile din grupa II pot fi tratate considerându-se conica aportată la axele Ox, Oy sau la axele IX, IY.

ANUL PREPARATOR AL ŞCOALEI POLITECHNICE

Algebra superioară. 1. Să se calculeze sumele S şi S' :

$$S = \frac{1}{n + \frac{1^2}{n}} + \frac{1}{n + \frac{2^2}{n}} + \frac{1}{n + \frac{3^2}{n}} + \dots$$

$$S' = \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1^2}{n^4}} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{2^2}{n^4}} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{3^2}{n^4}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{n^2}{n^4}}$$

pentru $n = \infty$.

2. Să se calculeze determinantul lui VANDERMONDE format cu rădăcinile ecuaţiei :

$$x^5 + px + q = 0.$$

3. Să se taie o sferă cu un plan, aşa ca volumele rezultate să fie în raportul $\frac{1}{2}$. Se va lua ca necunoscută raportul între distanţa dela centrul sferei la plan şi raza sferei şi se va calcula cu trei zecimale exacte.

Geometria analitică. I. Prin un punct A din planul unui cerc O se duce secanta ABC. Se cere să se scrie ecuaţia patratică a tangentelor duse la cerc în punctele B şi C.

II. Se dau în plan două puncte A, B şi o dreaptă Δ şi se cere :

1°. Să se scrie ecuaţia generală a hiperbolelor care trec prin A, B şi admit pe Δ ca una din directoare.

2°. Să se examineze diferitele cazuri particulare ce se pot întâlni prin dispoziţiunea punctelor A, B şi a dreptei Δ în plan.

3°. Să se găsiască locul focarului corespunzător directoarei Δ.

4°. Să se construiască hiperbola dela 2° când i se dau şi direcţiile asimptotice.

III. Se dau în spaţiu dreptele paralele D, D' şi un punct fix O pe D. Prin O trece o dreaptă Δ care face un unghiu constant φ cu D. Se consideră încă o dreaptă Δ' conţinută într'un plan perpendicular pe D, sprijinită pe D' şi tangentă la suprafaţa născută de Δ.

Se cere :

1°. Ecuaţia conului născut de Δ.

2°. Ecuaţia suprafeţei născută de Δ'.

3°. Ecuaţia curbei de contact între suprafeţele dela 1° şi 2°.

4°. Aplicaţiune numerică pentru $\varphi = 30^0$ şi distanţa dintre D şi D' egală cu 1.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXXVI. Nr. 6. Decemvrie 1938. Buenos-Aires. Extensiunea teoremei ABEL-STOLZ şi asupra unor transformări ale funcţiunilor lineare (urmare) de JUAN C. VIGNAUX.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 44. Nr. 12. Decemvrie 1938. Menasha Wis, — New-York.

Idem. Vol. 45. Nr. 1. Ianuarie 1939.

Idem. Vol. 45. Nr. 2. Februarie 1939.

Journal de mathématiques élémentaires publicat de H. VUIBERT. Anul 63. Nr. 11. 1 Martie 1939. Paris.

Idem. Anul 63. Nr. 12. 15 Martie 1939. Paris.

Mathesis. Anul LIII. Nr. 1—2. Februarie 1939. Bruxelles. Asupra triunghiurilor omologice de R. DEAUX. Asupra legăturii variabilelor eventuale de C. LURQUIN. O teoremă generală asupra centrelor de curbură succesive ale

arcuidei unei curbe plane de R. GOORMAGHTIGH. Asupra grupelor de puncte aparţinând înălţimilor unui triunghiu de H. BRABANT. Asupra echilibrului relativ al fluidelor eterogene în rotaţie de M. J. PÉRAU. Asupra cercurilor lui TUCKER de V. THÉBAULT.

Pitagora. Revistă de matematici. Anul IV. Nr. 5—6. Martie 1939. Liceul Moise Nicoară Arad. † Profesorul GH. ŢIŢEICA (necrolog). O proprietate a centrului radical de C. COŞNIŢĂ. Clasificarea curbelor de gradul doi de G. G. CONSTANTINESCU. Drepte remarcabile într'un tetraedru de I. I. ŢIŢEICA. Teorema MIQUEL de N. N. MIHĂILEANU. O problemă de geometrie de M. BORNEAS. Asupra formei polare de N. N. MIHĂILEANU. Probleme rezolvate, propuse şi soluţiuni primite. Abonamentul 80 lei anual.

Revista matematică din Timişoara. Anul XIX. Nr. 1. 15 Martie 1939. Trigonometria patratică (urmare) de V. ALACI. Asupra unui sistem diofantian de A. GLODEN. Probleme rezolvate şi propuse. Şcoala Politechnică Timişoara. Abonamentul 100 lei anual.

Sphinx, revue mensuelle des questions récréatives, publicată de M. KRAITCHIK. Anul IX. Nr. 4. Aprilie 1939. Bruxelles. Terminaţiile patratelor în baza 12 şi alte baze de EMMA LEHMER. Teoremă asupra egalităţilor multigrade de R. GOORMAGHTIGH.

Suplimentul Gazetei Matematice. Anul V. Nr. 7. 1 Aprilie 1939. Bucureşti. Calea Griviţei, 158.

ION TH. ADREIAN. *Coordonări, ecuaţiunea* $x^3 + px + q = 0$. Iaşi. 1939.

GASTON JULIA: *Exercices d'Analyse*, rédigés par G. BOURION. Tome IV. Equations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Gauthier Villars, editeur 1935.

In 230 pagini sunt prezentate 55 probleme, asupra capitolelor teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale de primul ordin, care figurează în programul Certificatului de Calcul diferenţial şi integral, propuse la Sorbona sau în Cursul lui E. GOURSAT.

Volumul formează o unitate cu primele trei, deoarece le completează cuprinsul prin exerciţiile asupra Capitolelor din Analiză menţionate, apoi este lucrat în acelaşi spirit, care preferă numărului mare de probleme adâncirea lor pentru deprinderea metodelor şi cristalizarea cunoştinţelor. De aceea soluţiile sunt larg expuse şi foarte des rezultatele se obţin prin două metode sau, cum se arată despre ecuaţia $\theta(x, y, z) = C$, $\theta(x, y, z)$ fiind o integrală a ecuaţiei:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 = 1,$$

că reprezintă, în coordonate rectangulare, o familie S de suprafeţe paralele, prin trei metode: prima soluţie folosind traectoriile ortogonale ale suprafeţelor, a doua soluţie — teoria integralei complete pentru o ecuaţie cu derivate parţiale de primul ordin cu mai mult de două variabile independente —, a treia soluţie utilizând o sferă de rază C tangentă la S. Nu sunt excluse nici soluţiile geometrice.

Pentru materialul pe care îl conţin cele patru volume de Exerciţii de Analiză ale D-lui GASTON JULIA, pentru claritatea expunerii, pentru situaţia centrală pe care o are Analiza Matematică în cunoaşterea matematică, cercetarea adâncă a problemelor acestor volume este necesară studenţilor secţiei de Matematici.

C. IONESCU-BUJOR.

R. ESTÈVE & H. MITAULT. *Arithmétique décimale,* conforme au programme de la classe de mathématiques. Gauthier Villars, Imprimeur-editeur. Paris 1939.

Autorii acestei broşuri format 19,5×14,5, de 124 pagini, au alcătuit-o în conformitate cu programele Clasei VI şi i-au zis *Aritmetica zecimală* pentru că au ţinut să lege aritmetica logică de cea a numerelor concrete. La tratarea chestiunilor au ţinut seama că elevii care le studiază sunt la finele cursului secundar şi astfel a pus la contribuţie toate cunoştinţele algebrice şi geometrice anterioare şi nu au ezitat chiar să folosească noţiunile de teoria vectorilor şi de analiză pe care le posedă elevii şi cu ajutorul cărora se pot trata mai uşor şi mai riguros unele chestiuni. În special, asupra numerelor rezultând din măsurarea mărimilor s'a dat toată atenţiunea, servindu-se de observaţiunile făcute de H. LEBESGUE în această privinţă.

Cap. I se ocupă cu *numeraţiunea zecimală* şi *operaţiunile* asupra numerelor întregi, oprindu-se la împărţire.

Cap. II, intitulat *Măsuri de lungime* şi *Numere generalizate*, introduce numerele ce se întâlnesc la măsurări şi numerele zecimale, rapoartele şi trece apoi la operaţiunea împărţirii şi la numerele generalizate periodice.

Cap. III se ocupă de operaţiunile cu numerele generalizate. şi cu rapoartele lor.

Cap. IV este intitulat *Numere raţionale,* sub care se grupează numerele întregi şi fracţiile. Aci se tratează despre codivizori, comultipli, numerele prime, numere periodice şi caracterele de divizibilitate.

Cap. V se ocupă de numerele iraţionale provenite dela extragerea de rădăcini patrate, apoi radicale şi logaritmi.

Cap. VI introduce calcule apropiate prin metoda erorilor absolute şi a erorilor relative.

Cap. VII tratează despre Măsura mărimilor, unde se foloseşte mult consideraţiuni geometrice.

Cartea se încheie cu 212 *Exerciţii* repartizate pe capitole. Ele sunt mai toate de natură teoretică, dintre care unele prezintă dificultăţi serioase; ele nu au indicaţiuni pentru rezolvare, nici rezultatele decât rare ori. Aci s'a mers chiar mai departe punându-se chestiuni de Teoria numerelor, ca de exemplu Teorema lui WILSON. Indicatorul, etc.

In cartea D-lor R. ESTÈVE şi H. MITAULT ordinea de expunere şi modul de tratare al chestiunilor diferă de cel obişnuit în cărţile clasice. Pentru noi materia tratată ese din programele Liceelor civile aproape cu totul; a rămas însă în parte în programele Şcolilor militare. Citirea unei asemenea cărţi este însă utilă elevilor care vor să iasă din Liceu cu cunoştinţe solide de matematici,

iar nu numai să fie pregătit ca să treacă din o clasă în alta. Acelora le-o recomandăm; acestora le dăm sfatul să nu o cumpere, căci nu o vor pricepe!

I. I.

V. ALACI. *Une classe nouvelle des fonctions discontinues à deux variables et les équations correspondantes qui peuvent représenter différentes configurations géométriques.* Timişoara 1937.

V. ALACI. *Solution analytique du problème des oscillations amortisées.* Timişoara 1938.

V. ALACI. *Intégration des fonctions quadratiques.* Timişoara 1939.

CERERI

Răspuns la Cererea No. 283.

In *Algebra financiară* de clasa VI-a liceală, Ediţia I de N. ABRAMESCU se vorbeşte de Riglele de Calcul.

In *Editura Technică Modernă* a apărut *Rigla de Calcul, Descriere şi Utilizare* de Ing. C. B. ENESCU şi Ing. G. VASILIU-BELMONT. Institutul de Arte grafice, Bucovina. I. E. Torouţiu, Str. Gr. Alexandrescu No. 1. Bucureşti. Costul 50 de lei.

N. ABRAMESCU.

In o Algebră elementară şi superioară de D-nii Căpitani NEGRESCU ŞTEFAN şi NESTORESCU VALERIAN se vorbeşte pe scurt de *Rigle de calcul.* Acolo găsim:

„*Modul de organizare şi folosire al Riglei de calcul este expus în* **Monografie artileristică** *de Căpitan* NESTORESCU VALERIAN".

ARENDT EMIL
(Clasa V. Lic. Militar „N. Filipescu").

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

FELIX AUERBACH. Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Lipsca 1909.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

P. LEYSSENNE. La troisième Année d'Arithmétique, Géométrie plane, Arpentage et Nivellement, Géométrie dans l'espace, Géométrie descriptive, Mécanique, Eléments d'Architecture. 550 Problèmes. Paris.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1058. *Fie tangenta* T_1T_2 *tangenta în punctul* M *al curbei* $y = f(x)$. *Se iau pe curbă punctele* M_1 *şi* M_2 *vecine de* M, *aşa ca* $\sphericalangle M_1MT_1 = \sphericalangle M_2MT_2$. *Curba descrisă de mijlocul segmentului* M_1M_2 *trece prin* M ; *să i se găsească tangenta în acel punct.*

G. ŢIŢEICA.

Soluţia acestei probleme este dată la finele articolului „*Asupra curbelor plane*", publicat de D-l TIB. POPOVICIU în *Gazeta Matematică*, Vol. XLI, pag. 613.

De problema 1058 s'a ocupat şi D-l Prof. N. ABRAMESCU, în articolul D-sale „*Sur l'étude de la forme d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points*" publicat în *Comptes Rendus de l'Academie de Science*, Paris, Tome 202, N. 17. (27 Aprilie 1936). A se vedea, în această privinţă şi nota D-lui TIB. POPOVICIU din *Gazeta Matematică*, Vol. XLII, pag. 248.

Sunt trecuţi ca rezolvitori ai problemei 1058, pe coperta Vol. XI/1905—6 : R. VLĂDESCU ; pe coperta Vol. XII/1906—7 : G. NICHIFOR şi pe coperta Vol. XIII/1907—8 : GH. BUICLIU şi GH. I. POPESCU.

PROBLEMA 2281. *Se dă un cerc fix construit pe* AB *ca diametru şi o tangentă mobilă la acest cerc care taie dreapta* AB *în punctul* M. *Să se afle locul geometric al simetricului lui* M *în raport cu punctul de tangenţă.*

ST. D. GHIOLU.

Soluţie dată de D-nii : MIRCEA A. NEGREA-LEONTE, G. G. CONSTANTINESCU şi I. I. ŢIŢEICA. In cercul fix dat, de rază R, luăm diametrul AB ca axă Ox şi diametrul perpendicular pe el ca axă Oy. Fie N punctul de contact al tangentei mobile şi θ unghiul pe care îl face ON cu direcţia pozitivă a axei Ox.

Atunci : $N(R\cos\theta, R\sin\theta)$, iar ecuaţia tangentei în N la cerc va fi

$$x\cos\theta + y\sin\theta = R,$$

care intersectată cu Ox ne dă : $M\left(\frac{R}{\cos\theta'}, 0\right)$.

Fie x, y coordonatele punctului al cărui loc îl căutăm. Va trebui să avem

$$R\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(x + \frac{R}{\cos\theta}\right), \quad R\sin\theta = \tfrac{1}{2}y,$$

de unde scoatem

$$x = \frac{R\cos 2\theta}{\cos\theta}, \quad y = 2R\sin\theta,$$

cari sunt ecuaţiile parametrice ale locului căutat.

Pentru a-i găsi ecuaţia punctuală, eliminăm între aceste ecuaţii pe θ. Eliminarea se face imediat şi rezultatul este

$$x^2(4R^2 - y^2) = (2R^2 - y^2)^2,$$

care se mai poate scrie încă sub forma

$$(x^2 + y^2 - 2R^2)^2 - x^2(x^2 + y^2) = 0.$$

De aci se citeşte că locul este o cuartică ce trece prin punctele absolute ale planului. Ea este simetrică faţă de axele de coordonate, admite deci centrul cercului ca centru de simetrie şi trece prin intersecţiile cercului lui MONGE al cercului iniţial cu axa Oy.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 2552. *Să se sumeze seria:*

$$\frac{1}{m+pr} + \frac{pr}{(m+pr)[m+(p+1)r]} + \frac{p(p+1)r^2}{(m+pr)[m+(p+1)r][m+(p+2)r]} + \ldots,$$

unde m, p, r *sunt pozitivi.*

D. PERIEŢEANU.

Soluţia. In ipotezele problemei, seria are termenii pozitivi. Notând cu u_n al n-lea termen din serie, se constată imediat că avem relaţia:

$$(1) \qquad u_{n+1} = \frac{(p+n-1)r}{m+(p+n)r}\,u_n,$$

de unde:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(p+n-1)\,r}{m+(p+n)\,r}.$$

Criteriul raportului nu dă nimic. Criteriul lui RAABE dă:

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n=\infty} \frac{(m+r)\,n}{(p+n-1)\,r} = 1 + \frac{m}{r} > 1,$$

adică seria este convergentă oricare ar fi m şi r pozitivi.

Pentru sumă scriem relaţia (1) sub forma:

$$mu_{n+1} + r(p-1)\,u_{n+1} + r(n+1)\,u_{n+1} = r(p-1)\,u_n + rnu_n.$$

Inlocuind în această relaţie pe n prin $1, 2, \ldots, n$ găsim n relaţii care adunate parte cu parte ne dau:

$$mS_n - mu_1 + mu_{n+1} + r(p-1)\,u_{n+1} + r(n+1)\,u_{n+1} = r(p-1)\,u_1 + ru_1,$$

unde am notat cu S_n suma primilor n termeni ai seriei. Trecând în această relaţie la limită, şi ţinând seamă că seria fiind convergentă, avem:

$$\lim_{n=\infty} S_n = S \quad , \quad \lim_{n=\infty} u_n = \lim_{n=\infty} nu_n = 0,$$

găsim:

$$mS = (m+pr)\,u_1,$$

şi înlocuind valoarea lui u_1 dată de serie, se găseşte în definitiv

$$S = \frac{1}{m}.$$

S'a primit o soluţie dela D-l G. G. CONSTANTINESCU în care se foloseşte de o notă a D-sale publicată în R. M. T., Vol. XIV, pag. 119.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 2851. *Fie* D *piciorul bisectoarei unghiului* A *din triunghiul* ABC. *Paralelele duse prin* D *respectiv la laturile* AC *şi* AB *taie pe* AC *în* β *şi pe* AB *în* γ. *Fie* β', γ' *conjugatele armonice ale punctelor* β, γ *respectiv în raport cu* A *şi* C; A *şi* B.

Să se arate: 1) *Că dreptele* $\beta\gamma$ *şi* $\beta'\gamma'$ *se taie într'un punct* P *situat pe dreapta* BC. 2) *Cercurile circumscrise triunghiurilor* $P\beta\beta'$, $P\gamma\gamma'$ *se taie în punctul* Q *piciorul polarei punctului* P *în raport cu cercul* ABC.

A. ANGELESCU.

Soluție dată de D-l N. N. MIHĂILEANU (pe când era student la Universitatea din București).

1. Prima parte a problemei este adevărată, oricare ar fi punctele β, γ pe AB, AC. In adevăr, dacă P este intersecția $(\beta\gamma, BC)$, fascicolele armonice $P(\beta', A, \beta, C)$ și $P(\gamma', A, \gamma, B)$ având trei raze comune rezultă că $P\beta'$, $P\gamma'$ sunt în prelungire, adică $\beta'\gamma'$ trece prin P.

2. Vom studia problema într'un caz mai general, când se înlocuiește D printr'un punct arbitrar α de pe BC. Se observă că corespondența (β, γ) este omografică de gen parabolic căci β fiind dat, se construiește γ ducând paralela $\beta\alpha$ la AB și apoi paralela $\alpha\gamma$ la AC, și reciproc. Când β este în A, γ este în B și când γ este în A, β este în C. Pe de altă parte, relația

$$\beta A : \beta C = \alpha B : \alpha C = \gamma B : \gamma A,$$

caracterizează tangenta variabilă $\beta\gamma$ la parabola T, cu două tangente AB, AC și punctele de contact B, C. Triunghiul $A\beta\gamma$ este deci circumscris parabolei T; focarul parabolei se află pe cercul circumscris $A\beta\gamma$ și dreapta ce unește pe A cu focarul este simediana triunghiului ABC format de tangentele AB, AC și punctele de contact B, C (Exercices de Géométrie, par F. G. — M., pr. 2394). Deci toate cercurile $A\beta\gamma$ trec printr'un punct fix Q (focarul parabolei) pe simediana vârfului A. Cercurile $A\beta'\gamma'$ se bucură evident de aceeași proprietate, punctele β', γ' obținându-se prin aceeași construcție ca și β, γ, din conjugatul lui α în raport cu B, C. Fie B', C' mijloacele laturilor AC, AB. Când $\beta\gamma$ se confundă cu B'C', cercul AB'C' trece prin Q; însă acest cerc este descris pe raza AO ca diametru, O fiind centrul cercului circumscris. Deci Q este proiecția lui O pe simediana vârfului A. Teorema lui MIQUEL aplicată patrulaterului (AB, AC, $\beta\gamma$. $\beta'\gamma'$), spune că cercurile $P\beta\beta'$, $P\gamma\gamma'$ se taie în același punct Q cu cercurile $A\beta\gamma$, $A\beta'\gamma'$.

Când α se confundă cu D piciorul bisectoarei interioare pe BC, avem din condiția de colinearitate

$$PB : PC = (\beta A : \beta C)(\gamma B : \gamma A) = (\alpha B : \alpha C)^2 = c^2 : b^2,$$

și P este în acest caz, piciorul simedianei exterioare pe BC, adică polul simedianei interioare sau OP este perpendiculară pe simediana AQ și Q este piciorul polarei lui P.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 3911 [1]). *Pentru ce valori întregi ale lui* n *expresiunea :*

$$E = 8n^2 - 7n - 1$$

este un cub perfect.

GH. NICULESCU.

Expresiunea dată se mai poate scrie

$$E = (n - 1)\, 8n + 1).$$

Fie d cel mai mare divizor comun al factorilor lui E, aşa că

$$(1) \qquad n - 1 = d \times u \quad \text{şi} \quad 8n + 1 = d \times v$$

u şi v fiind numere întregi prime între ele şi prime cu d. Prin urmare pentru ca

$$E = (n - 1)\,(8n + 1) = d^2 \times u \times v$$

să fie cub perfect este necesar şi suficient ca fiecare din numerele d^2, u, v să fie cuburi perfecte.

Eliminând pe n între relaţiunile (1) se obţine

$$(2) \qquad 8 \times d \times u + 9 = d \times v$$

de unde rezultă că d este un divizor al lui 9. Cum dintre aceşti divizori numai 1 are patratul cub perfect, rezultă

$$d = 1$$

pe care ducându-l în (2) unde se înlocueşte u şi v prin x^3 şi y^3 se obţine

$$8x^3 + 9 = y^3$$

$$\therefore \qquad (y - 2x)\,(y^2 + 2xy + 4x^2) = 9.$$

Această ecuaţiune în numere întregi conduce la următoarele 3 sisteme:

$$y - 2x = 1 \qquad \text{cu} \qquad y^2 + 2xy + 4x^2 = 9$$

$$y - 2x = 9 \qquad \text{cu} \qquad y^2 + 2xy + 4x^2 = 1$$

$$y - 2x = 3 \qquad \text{cu} \qquad y^2 + 2xy + 4x^2 = 3.$$

1) A se vedea şi începutul de soluţie dela pag. 468, Vol. XXXVI.

Singur ultimul din aceste sisteme admite soluţiuni întregi

$$x = -1 \quad \text{şi} \quad y = 1$$

care dau unica soluţie

$$\boxed{n = 0} \qquad \therefore \quad E = -1 = (-1)^3.$$

Examinând terminaţiunea cuburilor perfecte, s'a dat la pag. 468, Vol. XXXVI, un început de soluţie, care are unele vicii de demonstraţie şi a condus la soluţii nedivizor al lui $a + b + 1$. Se vor alege dintre aceşti divizori numai aceia ale căror patrate sunt în acelaşi timp şi o putere m.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 4299. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\frac{(x+a+b)^2}{x+2c} + \frac{(x+b+c)^2}{x+2a} + \frac{(x+c+a)^2}{x+2b} + 3x + 2(a+b+c) = 0,$$

ştiind că rădăcinile sunt expresii raţionale în a, b, c.

CEZAR COŞNIŢĂ.

Soluţie dată de D-nii: VILHELM CSEKE, MIRCEA-LEONTE A. NEGREA, TRAIAN PREDOIESCU-ŢÂNŢĂRENI şi GEORGE SILAŞ. Gonind numitorii căpătăm ecuaţia:

$$(x+a+b)^2(x+2a)(x+2b) + (x+b+c)^2(x+2b)(x+2c)$$
$$+ (x+c+a)^2(x+2c)(x+2a) + 3x(x+2a)(x+2b)(x+2c)$$
$$+ 2(a+b+c)(x+2a)(x+2b)(x+2c) = 0.$$

Notăm cu $P(x)$ polinomul de gr. IV din prima parte. Termenul liber al ecuaţiei este

$$P(0) = 4[ab(a+b)^2 + bc(b+c)^2 + ac(c+a)^2 + 4abc(a+b+c)],$$

pe care va trebui să-l scriem sub formă de produs. Este uşor de constatat că partea dreaptă se divide cu $a+b$, deoarece înlocuind pe a cu $-b$ căpătăm zero. Rezultă imediat că se divide şi cu $b+c$, $c+a$. Făcând împărţirea se găseşte că

$$(1) \quad P(0) = 4(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c).$$

Din forma termenului liber putem bănui că o rădăcină a ecuației este $x = -(a+b)$. Și într'adevăr

$$P(-a-b) = (c-a)^2(b-a)(2c-a-b) + (c-b)^2(2c-a-b)$$
$$(a-b) + 3(a+b)(a-b)^2(2c-a-b) - 2(a+b+c)(a-b)^2$$
$$(2c-a-b) = (a-b)(2c-a-b)$$
$$[-(c-a)^2 + (c-b)^2 - 3(b^2-a^2) - 2(a+b+c)(a-b)] = 0.$$

Cum ecuația este simetrică în raport cu a, b, c ea va admite și rădăcinile $x = -(b+c)$, $x = -(c+a)$. Afară de aceste rădăcini ecuația trebue să mai admită o soluție deoarece $P(x)$ este de gr. IV. Scriem

$$(2) \quad P(x) = (x+a+b)(x+b+c)(x+c+a)(Ax+B).$$

Pentru a determina pe A și B ținem seamă că această egalitate este o identitate. Făcând pe $x = 0$, în baza lui (1), va trebui să avem

$$4(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c) = B(a+b)(b+c)(c+a),$$

de unde rezultă că: $B = 4(a+b+c)$. In fine pentru a-l găsi pe A vom identifica coeficienții lui x^4 din ambele părți ale relației (2). Găsim: $A = 6$.

Soluțiile ecuației sunt deci

$$x_1 = -(a+b) \quad , \quad x_2 = -(b+c),$$
$$x_3 = -(c+a) \quad , \quad x = -\frac{2}{3}(a+b+c).$$

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4766. *Să se rezolve ecuația:*

$$\frac{2\cos x - 1}{\cos x - 2} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluția. Scăpând de numitori și făcând substituția: $\cos x = y$, se găsește că y este dat de ecuația:

$$(1) \qquad y^3 - 2y + \frac{1}{2} = 0.$$

Cum discriminantul acestei ecuații este negativ:

$$4p^3 + 27q^2 = -32 + \frac{27}{4} < 0,$$

rezultă că are toate rădăcinile reale. Să găsim intervalele în care sunt cuprinse rădăcinile. Pentru aceasta, notând cu $f(y)$ polinomul din prima parte a lui (1), observăm că:

$$f(-\infty) < 0, \quad f(-1) > 0, \quad f(0) > 0, \quad f(1) < 0, \quad f(+\infty) > 0,$$

inegalități care ne spun că ecuația are o singură rădăcină admisibilă pentru ecuația dată, cuprinsă în intervalul (0, 1). Pentru găsirea rădăcinilor folosim formulele cunoscute relative la ecuația:

$$y^3 + py + q = 0,$$

care atunci când discriminantul ecuației este negativ sunt:

$$x_1 = -2\varepsilon \sqrt{-\frac{1}{3}p} \cos \frac{1}{3}\varphi \quad , \quad x_2 = -2\varepsilon \sqrt{-\frac{1}{3}p} \cos \frac{1}{3}(\varphi + 2\pi),$$

$$x_3 = -2\varepsilon \sqrt{-\frac{1}{3}p} \cos \frac{1}{3}(\varphi + 4\pi),$$

unde φ este dat de formula:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\frac{1}{2}q\right|}{\sqrt{-\frac{1}{27}p^3}},$$

iar $\varepsilon = \pm 1$ și are semnul lui q (vezi de ex. *Culegere de probleme de trigonometrie*, biblioteca G. M., No. XII, pag. 39).

In cazul nostru φ este dat de ecuația:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{27}{128}}.$$

Avem:

$$\log\cos\varphi = \frac{1}{2}(1{,}4313638 - 2{,}1072100) = \frac{1}{2}\cdot\bar{1}{,}3241538 = \bar{1}{,}5620769;$$

$$\varphi = 62^0\,39'\,33'',\,8.$$

Introducând în formulele de mai sus, găsim:

$$y_1 = -2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\cos 20^0\,53'\,11'',\,3$$

$$y_2 = -2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\cos 140^0\,53'\,11'',\,3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\cos 39^0\,6'\,48'',\,7$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\cos 260^0\,53'\,11'',\,3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\cos 80^0\,53'\,11'',\,3$$

şi cum ştim că este o singură soluţie admisibilă, şi anume cea pozitivă şi cea mai mică, x va fi dat de ecuaţia:

$$\cos x = \sqrt{\frac{8}{3}}\cdot\cos 80^0\,53'\,11'',\,3.$$

Calculând găsim:

$$\log\cos x = \frac{1}{2}(0{,}9030900 - 0{,}4771213) + \bar{1}{,}2997310 = \bar{1}{,}4127153;$$

$$x = 75^0\,35'',\,8$$

şi în general

$$x = 360\cdot k \pm 75^0\,35'',\,8$$

k fiind un număr întreg.

Soluţii foarte bune dela D-ra SONIA M. TUDORAN şi dela D-nii: I. I. BUZINCU, I. LEUCA, A. N. POPESCU-ZORICA şi A. O. ŞAICHIN. S'au primit şi alte soluţii conţinând greşeli de calcul.

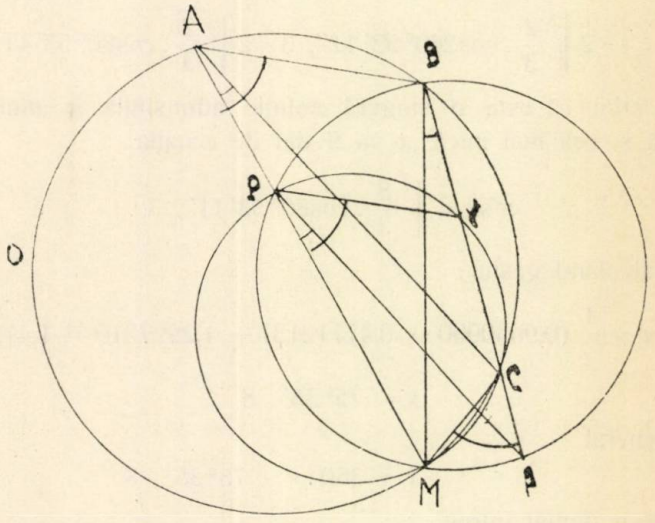
GH. TH. GH.

PROBLEMA 4774. *Fie* A, B, C, M *patru puncte pe o dreaptă sau conciclice;* O *un punct oarecare şi* P *arbitrar pe cercul* AMO, *cercurile* MPB *şi* MPC *taie cercul* OBC *în* β *şi* γ; *perechile de cercuri* OPβ, OAC *şi* OPγ, OAB *sunt respectiv tangente.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție dată de D-nii: VIRGIL ECKSTEIN (elev inginer), NICOLAE D. ȘTEFĂNESCU (lic. mil. M-rea Dealu), ILIE IOAN ȚIȚEICA (lic. mil. M-rea Dealu).

Să transformăm figura *prin inversiune,* luând ca pol pe O. Se transformă: dreapta sau cercul ABCM în cercul A'B'C'M'; cercul AMO în dreapta A'M'; punctul P într'un punct P' arbitrar pe A'M'; cercurile MPB, MPC respectiv în cercurile M'P'B', M'P'C'; cercul OBC în dreapta B'C'; punctele β, γ intersecțiile cercului OBC cu cercurile MPB, MPC în punctele β', γ' intersecțiile dreptei B'C' cu cercurile M'P'B', M'P'C'; cercurile OPβ, OAC și OPγ, OAB respectiv în dreptele P'β', A'C' și P'γ', A'B'.



Dacă cercurile OPβ, OAC și OPγ, OAB sunt respectiv tangente, dreptele P'β', A'C' și P'γ', A'B' *sunt respectiv paralele.* Dar aceasta este ușor de demonstrat.

In patrulaterul inscriptibil A'B'C'M' avem:

$$\sphericalangle M'A'C' = \sphericalangle M'B'C'$$

și în patrulaterul inscriptibil P'B'β'M'

$$\sphericalangle M'P'\beta = \sphericalangle M'B'C'$$

deci unghiurile M'A'C', M'P'β', corespondente față cu secanta A'P', sunt egale de unde rezultă paralelismul dreptelor P'β', A'C'.

Analog pentru perechea P'γ', A'B'.

Observare. 1°. D-l RADU V. APOSTOL (lic. mil. M-rea Dealu), transformă figura prin inversiune, luând M ca pol. Când punctele A, B, C, M sunt colineare, figura transformată devine: *fie* A', B', C' *trei puncte colineare şi* P' *arbitrar în plan; fie încă un cerc arbitrar dus prin* B', C'; P'B', P'C' *retaie cercul în* β', γ' *şi fie* O' *una din intersecţiile dreptei* A'P' *cu acest cerc; cercurile* O'P'β', O'A'C'; O'P'γ', O'A'B' *sunt respectiv tangente.* Dacă punctele iniţiale sunt conciclice, se face în prealabil o transformare în raport cu un punct arbitrar pe cercul circumscris.

2°. Problema a fost propusă pentru a fi rezolvată prin inversiune. Se poate încerca însă şi o soluţie directă, de ex. transformând prin inversiune, cuvânt cu cuvânt demonstraţia făcută pentru figura transformată.

PROBLEMA 5000. *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, ştiind că suma numerelor de câte două cifre dela stânga şi dela dreapta este un multiplu al rădăcinei.*

V. THÉBAULT.

Fie N, a, b numere de câte 2 cifre aşa încât să avem

$$N^2 = 100 + b$$

$$m \,.\, N = a + b$$

conform enunţului. Din aceste relaţiuni se deduce:

(1) $$99a = N(N - m).$$

Deoarece N^2 este de 4 cifre, iar a şi b sunt de câte 2 cifre avem neegalităţile

(2) $$32 \leqslant N \leqslant 99$$

(3) $$a + b = m \,.\, N \leqslant 198.$$

Din (3) se scoate

$$m \leqslant \frac{198}{N}$$

sau înlocuind pe N prin valoarea sa cea mai mică

$$m \leqslant \frac{198}{32} = 6, \ldots$$

Deci pentru m putem avea numai valorile

(4) $$m = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ sau } 6.$$

Din (1) se vede că N sau N — m trebue să se dividă neapărat prin 11. Avem de examinat deci 2 cazuri.

1°. N *se divide prin 11.* In limite date de (2) numai

33, 44, 55, 66, 77, 88 şi 99

sunt multipli de 11.

Se duce pe rând fiecare din aceste numere în (1) şi se reţin numai acelea care fac pe N (N — m) divizibil prin 9 pentru diferitele valori ale lui m dat de (4). Se găseşte că singurele valori ale lui N care ar putea da soluţiuni sunt

33 şi 66 pentru $m = 3, 6$
55 pentru $m = 1$
99 pentru m oricare.

2°. N — m se divide prin 11. Pentru diferitele valori ale lui m putem avea următoarele valori pentru N:

$m = 1$; N = 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89
$m = 2$; N = 13, 24, 35, 46, 57, 68, 79, 90
$m = 3$; N = 14, 25, 36, 47, 58, 69, 80, 91
$m = 4$; N = 15, 26, 37, 48, 59, 70, 81, 92
$m = 5$; N = 16, 27, 38, 49, 60, 71, 82, 93
$m = 6$; N = 17, 28, 39, 50, 61, 72, 83, 94.

Din acest tabel se reţin pentru N numai următoarele valori care fac pe N (N — m) divizibil prin 9:

36; 39, 45, 69, 72, 81, şi 90.

Ridicând la patrat numerele N reţinute la 1° şi la 2° se găseşte că problema are următoarele 5 soluţiuni:

$33^2 = 1089$ cu $10 + 89 = 3 \times 33$; $36^2 = 1296$ cu $12 + 96 = 3 \times 36$
$45^2 = 2025$ cu $20 + 25 = 1 \times 45$; $55^2 = 3025$ cu $30 + 25 = 1 \times 55$
$99^2 = 9801$ cu $98 + 01 = 1 \times 99$.

Notă. 1°. Dacă se consideră şi numerele formal de 4 cifre, se găsesc şi următoarele soluţiuni formale:

$1^2 = 0001$ cu $00 + 01 = 1 \times 1$; $2^2 = 0004$ cu $00 + 04 = 2 \times 2$
$3^2 = 0009$ cu $00 + 09 = 3 \times 3$; $4^2 = 0016$ cu $00 + 16 = 4 \times 4$
$5^2 = 0025$ cu $00 + 25 = 5 \times 5$; $6^2 = 0036$ cu $00 + 36 = 6 \times 6$
$7^2 = 0049$ cu $00 + 49 = 7 \times 7$; $8^2 = 0064$ cu $00 + 64 = 8 \times 8$
$9^2 = 0081$ cu $00 + 81 = 9 \times 9$; $11^2 = 0121$ cu $01 + 21 = 2 \times 11$
$22^2 = 0484$ cu $04 + 84 = 4 \times 22$.

2°. D-l G. ST. ROŞCA a rezolvat foarte bine problema găsind toate soluţiile şi fiind singurul care a determinat limite exacte pentru *m*.

3°. Soluţii foarte bune şi complecte dela: D-ra SONIA M. TUDORAN (clasa VIII-a Şc. Centrală, Bucureşti) şi dela D-nii: AD. O. ŞAICHIN (Şc. Politechnică, Bucureşti); D. D. BOIANGIU (Lic. „Traian" T.-Severin).

4°. Soluţii parţiale dela D-nii: M. C. CLEOVEANU (Liceul „Traian" T.-Severin) şi M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. „Gh. Lazăr", Bucureşti).

5°. D-l GAVRIL WEISSBERGER (Lic. „Moise Nicoară", Arad) a enumărat cele 5 soluţiuni, fără a demonstra cum le-a găsit.

6°. Urmând aceeaşi cale se demonstrează că *nu se găsesc patrate de 4 cifre* **abcd** *astfel ca diferenţa* **ab**−**cd** *sau* **cd**−**ab** *să fie un multiplu al rădăcinei în afară de soluţiile de forma 100, 400 şi 900.*

7°. Problema se poate extinde şi la o bază de numeraţie B, oarecare.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 5057. *Să se stabilească neegalităţile:*

$$C_{m+n-1}^{n} \leqq m^n \ , \ C_n^{m+p} C_{m+p-1}^{p-1} \leqq C_n^p C_{n-p}^m$$

şi să se indice cazurile în care devin egalităţi. Numerile m, n, p *sunt întregi şi pozitive, simbolul* C *este acela al combinărilor ordinare.*

TH. ANGHELUŢĂ.

Soluţie dată de D-nul IULIAN PETRESCU (Liceul Gh. Lazăr, Bucureşti).

Avem:

$$C_{m+n-1}^{n} = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots m}{n'}$$

însă:

$$\frac{m+n-1}{n} \leqq m \qquad \text{pentru } n = 1, 2 \ldots n$$

căci:

$$(m-1)(n-1) \geqq 0$$

şi prima neegalitate este dovedită; ea devine egalitate dacă $n = 1$.

Pentru neegalitatea a doua se observă că avem:

$$C_n^{m+p} C_{m+p-1}^{p-1} = \frac{p}{m+p} C_n^p C_{n-p}^m$$

şi fiindcă:

$$p \leqq m+p$$

rezultă că ea este dovedită. Avem egalitate pentru $m = 0$.

PROBLEMA 5070. 1°. *Să se arate că ecuația :*

$$(1) \qquad 1 + \alpha x^m = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^h}$$

are o singură rădăcină superioară lui 1 ; α, m, h sunt constante pozitive.

2°. *In ecuația (1) se ia :*

$$\alpha = \frac{a_{p+m}}{C_{n-p}^{m} M}, \quad h = n - p + 1.$$

Să se arate atunci, că rădăcina găsită la punctul 1° este o limită superioară a rădăcinii pozitive a ecuației :

$$(2) \quad a_{p+m} x^{p+m} - C_{n-p+1}^{m+1} a_{p-1} x^{p-1} - C_{n-p+2}^{m+2} C_{m+1}^{1} a_{p-2} x^{p-2} - \ldots - C_{n}^{m+p} C_{m+p-1}^{p-1} a_0 = 0.$$

Coeficienții a_0, a_1, . . . , a_{p-1}, a_{p+m} sunt pozitivi, primii p fiind cel mult egali cu M. C *este simbolul combinărilor ordinare, iar m, n, p sunt evident întregi pozitivi supuși condiției :*

$$m + p \leqq n.$$

TH. ANGHELUȚĂ.

1°. Punând :

$$x = \frac{1}{u}$$

ecuația (1) devine :

$$1 + \frac{\alpha}{u^m} = \frac{1}{(1-u)^h} .$$

Când u crește dela 0 la 1, primul membru al ecuației din urmă descrește dela $+\infty$ la $1 + \alpha$, iar membrul al doilea crește dela 1 la $+\infty$. Prin urmare curbele

$$y = 1 + \frac{\alpha}{u^m}, \quad y = \frac{1}{(1-u)^h} .$$

Se taie într'un singur punct corespunzător unei valori a lui u cuprinsă între 0 și 1. Rezultă că ecuația (1) are o singură rădăcină mai mare ca 1.

2°. Punând în loc de a_0, a_1, a_p pe numărul mai mare M, ecuația (2) devine:

$$a_{p+m}\, x^{p+m} \leqq M\,(C_{n-p+1}^{m+1} x^{p-1} + C_{n-p+2}^{m+2}\, C_{m+1}^{1}\, x^{p-2} + \ldots + C_{n}^{m+p}\, C_{m+p-1}^{p-1});$$

am însemnat prin x rădăcina pozitivă a lui (2).

Pe de altă parte avem neegalitatea, ușor de verificat

$$C_n^{m+p}\, C_{m+p-1}^{p-1} \leqq C_n^p\, C_{n-p}^m$$

și din ea deducem:

$$C_{n-p+1}^{m+1} \leqq C_{n-p+1}^{1}\, C_{np}^{m}$$

$$C_{n-p+2}^{m+2}\, C_{m+1}^{1} \leqq C_{n-p+2}^{2}\, C_{n-p}^{m}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_{n-1}^{m+p-1}\, C_{m+p-2}^{p-2} \leqq C_{n-1}^{p-1}\, C_{n-p}^{m}.$$

Ținând seamă de aceste neegalități obținem:

$$a_{p+m}\, x^{p+m} \leqq M\, C_{n-p}^{m}\,(C_{n-p+1}^{1} x^{p-1} + C_{n-p+2}^{2}\, x^{p-2} + \ldots + C_n^p).$$

Căutăm să satisfacem neegalitatea prin valori de x mai mari ca 1. Apoi împărțind prin x^p ambii membri și adăogând și scăzând pe 1, avem:

$$(3) \qquad 1 + \frac{a_{p+m}\, x^p}{M\, C_{n-p}^m} \leqq 1 + C_{n-p+1}^{1}\,\frac{1}{x} + C_{n-p+2}^{2}\,\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{C_n^p}{x^p}.$$

Membrul al doilea este format din primii $p+1$ termeni ai desvoltării,

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-(n-p+1)} = 1 + C_{n-p+1}^{1}\,\frac{1}{x} + C_{n-p+2}^{2}\,\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{C_n^p}{x^p} + \ldots$$

termenii ei fiind toți pozitivi.

Valorile lui $x > 1$ care satisfac pe (3) satisfac și neegalitatea

$$1 + \frac{a_{p+m}\, x^m}{M C_{n-p}^m} \leqq \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{n-p+1}}.$$

Prin urmare rădăcina pozitivă a lui (2) are ca limită superioară rădăcina superioară lui 1 a ecuației (1) în care în loc de α și h am pus valorile date.

EXERCIŢII

16. Să se găsească un patrat perfect de forma *abbc* al cărui compliment aritmetic să fie de forma *deed*, ştiind că *d* întrece cu 2 pe *e*. Numerele *abbc* şi *deed* sunt de câte 4 cifre.

D. D. BOIANGIU.

R. *c* fiind terminaţie de patrat, iar *d* fiind complimentul lui *c* la 10 nu se poate avea decât

$$c = 0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6 \text{ sau } 9$$

$$d = 0,\ 9,\ 6,\ 5,\ 4 \ ,\ 1.$$

Cum $d = e + 2$ rezultă că se elimină $d < 2$ şi rămân pentru *deed* numai

$$9779\ ,\ 6446\ ,\ 5335\ ,\ 4224$$

de unde se deduce pentru *abbc*

$$1221\ ,\ 3554\ ,\ 4665\ ,\ 5776$$

din care numai ultimul este patrat perfect Soluţia este deci

$$76^2 = 5776 \quad \text{cu} \quad deed = 4224.$$

17. Se consideră două semi-elipse variabile, tangente, având axele mari AA' şi $A'A_1$ în prelungire, situate de aceeaşi parte a segmentului A_1A şi de aceeaşi excentricitate, constantă. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului B'B care uneşte extremităţile semi-axelor mici.

VIRGIL GHIŢESCU.

R. Depărtarea mijlocului M la A_1A este

$$d = \frac{1}{2}\left(b + b'\right).$$

Din egalitatea excentricităţilor deducem:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{c'^2}{a'^2} = e^2$$

$$1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{b'^2}{a'^2} = e^2$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{b'}{2a'} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - e^2}.$$

Rezultă:

$$\frac{b + b'}{A_1A} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - e^2} \quad ; \quad d = \frac{1}{4}\,A_1A\,\sqrt{1 - e^2} = \text{C-tă}.$$

Locul este deci paralela la A_1A la distanţa *d*.

PROBLEME PROPUSE

5104. In „CEASOSLOV“ de Mitropolitul NIFON, tipărit în București la 1854 găsim la pagina 297:

„**Fevruarie 2.** *Intâmpinarea Domnului nostru* **Iisus Hristos.** *Praznic și deslegare de pește, de nu este postul cel mare*“.

Se putea ivi această excepțiune în Calendarul Iulian?

I. IONESCU.

5105. Să se găsească patratele perfecte de forma: *aabaacd, aabaabc.*

S.-LT. POPESCU ADRIAN.

5106. Să se găsească un cub perfect de nouă cifre, de forma:

$$N^3 = 10^6 x + 10^3 y + z$$

știind că numerele x, y, z de câte trei cifre, sunt legate între ele prin relațiunea:

$$y = x + z + 1.$$

V. THÉBAULT.

5107. Dându-se trei numere prime absolut p_1, p_2, p_3 astfel încât să avem:

$$p_1 < p_2 < p_3,$$

să se arate că:

1. Numărul numerelor prime cu p_2 din intervalul de numere dela p_1 la p_3 este egal cu:

$$p_3 - p_1 - n;$$

2. Suma acelor numere este egală cu:

$$\frac{1}{2}[p_3(p_3+1) - p_1(p_1+1)] - p_2\frac{n(n+1)}{2};$$

3. Produsul acelor numere este:

$$\frac{p_3!}{n!\, p_1!\, p_2^n}$$

unde n este numărul întregilor din $\left(\frac{p_3}{p_2}\right)$.

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

5108. Intr'un triunghiu oarecare ABC, fie A", B", C" mijloacele laturilor triunghiului său median. Dreptele AB" şi AC" taie dreapta BC în A_b şi A_c. Analog se găsesc punctele B_a, B_c, C_a, C_b. Să se arate că triunghiul format de dreptele $B_a C_a$, $A_b C_b$, $A_c B_c$ are laturile paralele cu laturile triunghiului ABC şi este egal cu el.

ERNEST GH. BEIU-PALADI.

5109. Se dă triunghiul ABC şi A', B', C' trei puncte pe laturile BC, CA, AB, Δ axul radical al cercurilor ABC, A'B'C' — A_1, B_1, C_1 punctele în care Δ întâlneşte dreptele

B'C', C'A', A'B' — $\alpha(BB_1, CC_1)$, $\beta(CC_1, AA_1)$, $\gamma(AA_1, BB_1)$.

Să se arate că dreptele $\alpha A'$, $\beta B'$, $\gamma C'$ sunt concurente.

C. IONESCU-BUJOR.

5110. Se consideră cercul (O) şi tangenta Δ într'un punct fix, la acest cerc. Fie N punctul de contact al celei de a doua tangente la cercul O dusă dintr'un punct M, după Δ.

Se construieşte cercul (γ) tangent în M la Δ şi trecând prin punctul N. Punctul M variind pe tangenta Δ, se cere:

1. Să se stabilească între distanţa centrelor cercurilor (O) şi (γ) şi razele acestor cercuri o relaţiune. Consecinţă.

2. Locul geometric al centrului cercului (γ).

ŞERBAN A. GHEORGHIU.

5111. Se dau: un cerc (O) de centrul O, un punct A al lui şi un punct B în plan. O secantă variabilă trecând prin B, taie cercul (O) în m_1 şi m_2; perpendicularele din O pe Am_1 şi Am_2 taie aceeaşi secantă în M_1 şi M_2. Se cere locul geometric al punctelor M_1 şi M_2.

AD. GHEORGHIU.

5112. Fie A', B', C' mijloacele laturilor unui triunghiu oarecare ABC. Pe mediatoarele laturilor sale se poartă segmentele A'M, B'N, C'P îndreptate către exteriorul (interiorul) triunghiului, respectiv proporționale cu laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$.

1°. Să se arate că dreptele AM, BN, CP sunt concurente într'un punct K.

2°. Să se afle locul lui K atunci când factorul de proporționalitate variază.

ION STĂNCULESCU.

5113. Fie M, N, D două puncte și o dreaptă arbitrară în planul axelor coordonate xoy; P, un punct variabil pe D; MP, NP taie pe Ox, respectiv Oy în M', N'. Locul mijlocului segmentului $\overline{M'N'}$ este o hiperbolă de asimptote Ox, Oy.

Paralelele din M la Ox și din N la Oy intersectează în Q. Dacă dreapta D trece prin Q, locul geometric este o dreaptă.

N. N. MIHĂILEANU.

5114. Dându-se ecuațiunea :

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a+b)(a+c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b+c)(b+a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c+a)(c+b)}=m,$$

să se determine m astfel încât rădăcinile ei să fie raționale și să se rezolve în acest caz.

GH. D. SIMIONESCU.

5115. Să se studieze natura și semnul rădăcinilor ecuației:

$$(m+1)y^2-2m(m+1)y+m^3+m^2-m+1=0.$$

Să se figureze variațiunea rădăcinilor reale și să se calculeze, cu două zecimale exacte, valorile lui m pentru care rădăcinile sunt maxime sau minime.

TH. ANGHELUȚĂ.

5116. Prin vârful A al unui triunghiu ABC se duce o dreaptă variabilă care întâlnește latura BC în punctul α.

Se consideră cercurile circumscrise triunghiurilor ABα, ACα și se cere:

1. Înfășurătoarea liniei centrelor celor două cercuri;
2. Locul intersecției tangentelor în B și C la cele două cercuri;
3. Înfășurătoarea tangentelor în α la aceleași cercuri.

CEZAR COȘNIȚĂ.

5117. Un motor cu explozie este desaxat (adică dreapta descrisă de piciorul bielei nu trece prin centrul O al cercului manivelei. Distanța dela O la dreapta de mai sus se numește desaxaj). Să se afle desaxajul acestui motor desaxat, când cursa pistonului, $C = 100{,}8425$ cm., lungimea bielei $b = 200$ cm., și lungimea manivelei $r = 50$ cm.

ING. OCTAV ORĂNESCU.

5118. Se dă cuartica

$$(C)\quad (x^2+y^2)^2-(2a^2-1)x^2-(2a^2+1)y^2=0$$

și se consideră un punct M pe iperbola echilateră $x^2-y^2=a^4$. Prin M se duce o secantă care taie cuartica (C) în punctele M_1, M_2, M_3, M_4. Să se demonstreze că produsul:

$$\overline{MM_1}\times\overline{MM_2}\times\overline{MM_3}\times\overline{MM_4}$$

este egal cu puterea a patra a tangentei dusă din punctul M la cercul:

$$x^2+y^2=a^2.$$

M. GHERMĂNESCU.

ERATA. 1°. In enunțul problemei 4838 dela pag. 375 se va citi:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{1}^{n}\frac{u_i}{x^i}=1.$$

2°. Pag. 386 rândul 11 de sus se citește BD în loc de AB.

3°. Pag. 388 rândul 7 de sus se citește *drept* în loc de *dat*.

4°. Pag. 389 rândul 13 de sus ultimul membru al egalităților este $a\times b$ în loc de $a-c$.

5°. La problema 5073 expresia lui X este

$$x(1-x)(1-k^2x).$$

6°. La pag. 223, XLIV, în loc de: cu ipotenuza BC se va citi: cu ipotenuza BC și cateta AC.

7°. La problemele propuse 5050, 5080, se va înlocui fraza: primul cerc taie dreapta (cercul) ABC în M și N și al doilea taie cercul OBC în M', N', astfel: *dreapta (cercul)* ABC *taie cercurile în* M, N *și cercul* OBC *le taie în* M', N' (M, M' și N, N' pe respectiv același cerc).

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bădulescu D. (5078); *Barbu-Friedman C.* (5078, 87); *Bedreag C. M.* (5078); *Bodnărescu M. Horia* (5052); *Boeru Al. Const.* (5078); *Boeru Ionescu N. Gh.* (5103); *Bogdan Gh.* (4934, 5083); *Boiangiu D. D.* (4880, 5090); *Cerchez Mihu* (5063, 79); *Constantin V. P.* (5098); *Enescu D. D.* (5025, 63, 87, 88); *Gviazdomorschi E. R.* (5055); *Jareghie V. Ioan* (5078, 98, 103); *Leibovici S.* (5070, 78); *Maior Gh.* (5087); *Mătieş V. I.* (1679, 735); *Mihăilescu D. D.* (5032); *Nicolaescu I. Mihai* (5078); *Pântescu Const.* (5087); *Pascaru I. C.* (5078, 87); *Petrescu Iulian* (5061, 79); *Popa D. Mircea* (4453, 5034, 50, 52, 54, 63, 67, 78, 79, 92, 98, 100, 03); *Popişca V. M.* (5078); *Reischer L. H.* (5011); *Rohr I. Al.* (4904); *Rollea C. V.* (5090); *Roşculeţ N. Marcel* (5061, A); *Şaichin O. Ad.* (5070); *Sărulesteanu I. E.* (5048); *Stamate I. Ionel* (4880, 923, 28, 30, 54, 82, 5056, 67, 87, 90, 97); *Ştefănescu D. N.* (4904, 5055); *Topalescu Gh.* (5032, 83); *Tudoran M. Lidia* (5078); *Turcu Sandu* (5063); *Vasilescu-Stabu A. M.* (5030, 41, 78, 81, 83, 90); *Zaharia V. Gh.* (5083).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

C. 54.816

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIV

NUMĂRUL 9. — MAI 1939

SUMARUL

1. Comemorarea Profesorului G. Țițeica de către Cercul Matematic al Societății de științe din Cluj.
2. Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice" din anul 1939 . . . . *Gh. Th. Gheorghiu.*
3. O problemă de construcție (urmare și sfârșit) . . . . . *G-l Gh. Buicliu.*
4. Algebra lui E. Bacaloglu (urmare și sfârșit) . . . . . *Florica Câmpan.*
5. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului de Algebră al Societății „Gazeta Matematică". *Comisiunea pentru Premii.*
6. Note Matematice: 34 — 39.
7. Bibliografie.
8. Cereri 284.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1384, 1948, 1976, 2337, 2456, 4847, 4851, 4990.
11. Exerciții 18 — 24.
12. Probleme propuse: 5119 — 5132.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1939

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*“, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stoica,** Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1938 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5010, 22, 23, 26, 28, 37, 43, 45, 47, 49, 53, 58, 59, 68, 71, 72, 73, 74, 76, 82, 85, 89, 91, 93, 94, 95, 96, 99, 101, 02, 04, 05, 06, 07, 09, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

IN BIBLIOTECA ISTORICĂ A „GAZETEI MATEMATICE“

A APĂRUT:

ELEMENTELE LUI EUCLID

(Cărţile I — VI de Geometrie plană)

TRADUSĂ DIN LIMBA GREACĂ

DE

V. MARIAN

Preţul 160 lei

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLIV. Nr. 9 *SUPLIMENT* MAI 1939

DARE DE SEAMĂ

Asupra Mesei Comune care a încheiat Concursul Societăţei „Gazeta Matematică", în seara zilei de 15 Aprilie 1939

Sorţii precumpănitori şi decisivi ai *«Gazetei»* mi-au hărăzit anul acesta sarcina dării de seamă.

Sarcină delicată şi tristă acum la al 30-lea concurs al *«Gazetei»*.

Căci soarta a vrut în loc de aniversare să oficiem o mută reculegere.

Să interiorizăm tradiţia, care nu putea în plinul ei să aibă anul acesta glorioasa-i continuitate, căci realizatorul cuvântării morale şi bunul nostru îndrumător nu mai este printre noi.

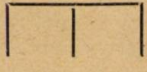
Domnul PROFESOR ŢIŢEICA ne părăsise modest şi discret, — aşa cum ne obişnuise zi de zi să lucrăm, — tocmai în ajunul concursului, lăsându-ne deschisă cripta sufletului nostru melancolică şi tristă.

Iar reculegerea noastră căta a cuprinde în seara aceea prezenţa lui atât de necesară, vorba lui atât de clară, sufletul lui atât de cald. Şi cu toţi câţi ne-am adunat în seara de 15 Aprilie a. c. în sala restaurantului „Luzana" unde altădată ne vorbise Domnul PROFESOR ŢIŢEICA a simţit cutremurul prezenţei lui nevăzute, durerea lipsei lui.

Astfel atmosfera specifică meselor comune ale *Gazetei Matematice* a avut de data aceasta un punct de discontinuitate.

Să ne rugăm ca alte puncte similare să apară cât mai târziu, pentru reluarea unei continuităţi atât de sfinte *Gazetei Matematice*.

Pentru păstrarea unei legături de neînvins între trecutul glorios şi viitorul veşnic proaspăt al „Gazetarilor", ne-am găsit adunaţi către orele 21,30 în jurul aceleeaşi mese de formă



D-nii: GENERAL ION S. DEMETRESCU, COLONEL SERBULESCU, LT.-COLONEL ALEXIU, LT.-COLONEL PANĂ, LT.-COLONEL V. NICOLAU, CPT. D. MUMUIANU, LT. C. STELIAN, LT. IULIAN IONESCU, LT. I. MAROTINEANU, LT. GH. GEORGESCU, N. OBRESCU şi V. GRIGORCEA, invitaţi ai Societăţii *Gazeta Matematică*.

Domnul ION IONESCU, stâlp fondator al *Gazetei Matematice*.

D-l G-RAL GH. BUICLIU, stâlp cooptat.

D-nii: E. ABASON, BOTEA G. E. P., I. CHIŢULESCU, G. G. CONSTANTINESCU, GH. DUMITRESCU, MAIOR A. D. GHIMUŞ, GH. T. GHEORCHIU, N. N. GEORGESCU, M. GHERMĂNESCU, LT. C. IONESCU-ŢIU, GH. ILIESCU, G-RAL LITEANU, LT.-COLONEL I. LINTEŞ, N. N. MIHĂILEANU, AL. PANTAZI, TRAIAN POPP, AL. A. ROŞU, GH. D. SIMIONESCU, D. STAN, T. TĂNĂSESCU, M. VASILIU, GH. VASILIU, I. VARDALA, GR. ZAMFIRESCU-SET, şi LT.-COMANDOR GR. ZAPAN, membri ai *Gazetei Matematice*.

D-ra EL. PAPADOPOL şi D-nii: ALDEA MINEA, ALDEA VIRGIL, BĂDESCU C-TIN, BÂRLEA VICTOR, BÂRZU VASILE, BODNĂRESCU HORIA, CETĂŢEANU STELIAN, CIOBANU IGOR, COSTESCU IOAN, CRISTEA C-TIN, DRĂGHICESCU PAUL, EFTIMIE CRISTEA, FLORESCU VICTOR, FLOREŞTEANU AL., GLIGOR IOAN, HRISTESCU IOAN, IOAN A. ILIE, IONESCU STELIAN, MĂRGĂRIT NIC., MIROSLAV TUDOREL, PACIOGLU C-TIN, PANTELIMON C-TIN, PASCARU ION, PLEŞU LUCIAN, POPP ILIE M., POPA MIRCEA, POPA TEODOR, RĂDULESCU OCTAVIAN, ROHR AL., SBÂRNEA GH., STĂNCULESCU MIRCEA, STOENESCU MIREL, STOIANOVICI ŞERBAN, ŞERBAN C-TIN, VASILIU D-TRU, VIJELIE EUGEN şi ZAHARIA SIMION, candidaţi admişi la oralul concursului din anul acesta.

Lipsa D-lui A. G. IOACHIMESCU, celălalt stâlp al *Gazetei* face ca rezultanta forţelor potenţiale ale participanţilor să se îndrepte către D-l ION IONESCU rămas pentru prima dată stâlp singur la mijlocul mesii comune. Urăm D-lui A. G. IOACHIMESCU însănătoşire deplină pentru a împărţi iar cu D-l ION IONESCU această rezultantă, dorită cât mai mare. Iar cu noi, dragostea de a fi împreună.

Liniştea unei colective îngândurări se rupe.

Ne ridicăm în picioare.

Din creştinească datină, elevul RĂDULESCU OCTAVIAN rosteşte: „Hristos a înviat din morţi, cu moartea pre moarte călcând şi celor din mormânturi viaţă dăruindu-le".

Cu toţii murmurăm în gând: „Şi celor din mormânturi viaţă dăruindu-le", gândindu-ne fiecare la cineva drag.

Iar tare: „Adevărat a înviat".

Nu se mai aude decât sgomot surd de tacâmuri şi pe alocuri soprane voci de elevi. Elevii primelor concursuri.

Şi par'că din când în când şi ei par a înţelege ceva.

Dar viaţa nu-şi opreşte mersul. Nu trebue să şi-l oprească, pentru mulţumirea celor ce au contribuit la crearea unor anumite tradiţii.

E o bucurie a lor nevăzută, o satisfacţie transcendentă.

Şi D-l ION IONESCU păstrătorul unui cult care nu-şi va stinge niciodată flacăra aprinsă acum 44 de ani, le dă această satisfacţie.

Este ora 11, ora obicinuitelor începeri.

D-sa nu pregetă:

Domnilor,

„Ocup şi astăseară locul acesta, pe care tradiţia noastră îl lăsase celui „mai bătrân redactor al *Gazetei Matematice*; el ar fi revenit colegului nostru „A. G. IOACHIMESCU, dar boala nemiloasă care l-a răpit dintre noi, nu-i

„permite nici anul acesta să iasă din casă ca să participe la această masă „comună.

„Concursul din anul acesta, trebue să o recunoaştem, s'a ţinut într'o „atmosferă greoaie, care i-a influenţat rezultatele. Starea de azi din Europa, „când State mari ciuntesc şi înghit pe cele mici, grija de apărare a hotarelor „ţării noastre, despărţirea de părinţi, fraţi şi alte rude şi cunoscuţi chemaţi la „frontiere în contra unor eventuale încălcări, nu ne-a lăsat mintea liberă ca „timpul disponibil să fie preocupat numai de pregătirea pentru concursul de „anul acesta".

„Ingrijorările de azi nu trebue să vă reducă activitatea şcolară şi „ştiinţifică. Românul ştie să-şi dea viaţa pentru apărarea ţării; armata română „este gata să-şi facă datoria la prima acţiune de forţe exterioare, iar M. S. „REGELE veghează pentru perpetuarea României în actualele ei graniţe.

„Astfel fiind, vă rog ca primul gând să-l îndreptăm către M. S. REGELE „şi să ridicăm primul nostru pahar pentru sănătatea şi gloria Lui.

„Să trăiască M. S. REGELE, să trăiască DINASTIA".

Şi un ura puternic acoperă ultimele cuvinte ale D-lui ION IONESCU.

Am răgaz să obţin dela D-l Profesor IONESCU manuscrisul celor rostite, manuscris pe care D-sa prudent l-a pregătit reporterului mesei comune, ca o frână de imaginaţie, lucru ce D-sa regretă că nu a făcut şi anul trecut.

Scuza vizitei de vorbire nu a avut darul să convingă pe D-l ION IONESCU, căci deşi mi-a replicat prompt:

„Ei bine anul acesta am mai îmbătrânit cu un an", totuşi a pregătit manuscrisul.

Fiind convins că viteza de vorbire nu este invers proporţională cu vârsta.

Ajuns la locul ce ocupam reiau îndatoririle.

D-l N. N. GEORGESCU se ridică şi spune:

„S'a pomenit de lipsa aceluia pe care ne-am obişnuit a-l vedea, pe D-l IOACHIMESCU.

„Să închinăm un pahar pentru însănătoşirea grabnică a D-sale, pentru a-l vedea iar printre noi mulţi ani la concursurile *Gazetei Matematice*; de aceea îi urăm multă sănătate şi viaţă îndelungată. Să trăiască".

Cu toţii îi urăm tare sănătate D-lui A. G. IOACHIMESCU.

Intre timp un fotograf la modă azi, imortalizează pentru prosperitate, aşezări vremelnice.

Regretul lipsei celorlalţi sporeşte.

Iar obicinuiţii participanţi ai acestor mese comune D-nii: AL. BUNESCU, O. N. ŢINO, C. ORĂŞANU, P. SERGESCU, A. IOANOVICI, D. STOICA, I. BUŞILĂ, I. STAMATESCU, N. CIORĂNESCU, C. IONESCU-BUJOR şi mulţi alţii cărora nu le mai măresc părerea de rău, înregistrează o absenţă vizibilă.

Consolez pe D-l IONESCU-BUJOR proaspăt concentrat la o graniţă de fier, cu ameninţarea unei dări de seamă ce i s'ar fi rezervat.

Mai convins ca totdeauna de greaua misiune ce îndeplinesc.

D-l D. STAN îmi măreşte pentru un moment neliniştea.

Cu ochii inspiraţi şi voce modulată D-sa începe:

„Domnilor, orice creştin înainte de a porni la drum se închină la icoane. „Înainte de a ne bucura de ceasul de a fi împreună să ne închinăm la icoanele „*Gazetei Matematice:* VASILE CRISTESCU, TRAIAN LALESCU, ŞTEFAN MIREA, „GH. FILIPESCU, N. BOTEA şi alţii.

„Dar spre marea noastră durere unul din cei mai falnici stâlpi s'a prăbuşit lăsându-ne încă o icoană: „aceea a lui GHEORGHE ŢIŢEICA".

„Pentru amintirea marelui savant, marelui român, marelui om de inimă, „omului cumpănit şi întreg ce a fost GHEORGHE ŢIŢEICA la *Gazeta Matematică* se va păstra vecinic cea mai mare veneraţie, iar icoana lui va străluci „în altarul *Gazetei Matematice.*

„Ca să ne închinăm acestei icoane, vă rugăm a păstra un minut de „reculegere".

Toţi ne ridicăm în picioare.

In sală domneşte o linişte de mormânt.

E ora când altădată D-l PROF. ŢIŢEICA rostea cuvântarea morală.

Gândurile mele sboară cu ani înapoi.

Eram la primul concurs al Gazetei.

Ca depe altă lume aud vocea lui de atunci.

„*Vouă muguri matematici vă urez ani mulţi ca să realizaţi aşteptările îndrumătorilor noştri dela Gazetă*".

Trăesc un moment de înălţare şi totodată de jenă.

D-l D. A. STAN — redactorul dării de seamă de atunci — rupe tăcerea coborându-ne la imediata realitate.

Domnilor,

In cei 2 ani din urmă, în care am făcut parte din delegaţia *Gazetei,* mi-am împlinit mai mult sau mai puţin complect misiunea, după cum a-ţi putut constata cu toţii. Simt totuşi că am datoria să mă scuz pentru cel puţin o îndatorire la care n'am putut să răspund: n'am luat parte la nici una din mesele comune dela încheerea celor 2 concursuri, lipsind din ţară în ambele vacanţe de Paşti din anii precedenţi. Bine înţeles, nu mă refer la simpla îndatorire de participare, ci la partea de sarcină ce-mi revenea *«de a face onorurile casei»*, alături de colegii cu care formal reprezentam Societatea. Departe de-a admite că totuşi „onorurile casei" n'au fost făcute integral în acele două ocazii, şi fără să am pretenţia să vin în ajutorul actualilor reprezentanţi oficiali ai *Gazetei,* — în dorinţa doar de a mă plăti de arieratele mele personale, voi încerca să servesc de călăuză concurenţilor cărora le este dedicată această masă, ca să le fixez o clipă atenţia asupra câtorva din bogăţiile spirituale care formează tezaurul *Gazetei Matematice.*

Vă propun deci Domnilor concurenţi, contemplarea tezaurului nepieritor al *Gazetei,* în care s'a topit atât de mult din fiinţa celor pe care i-am pomenit adineaori şi în care cu atâta râvnă au adunat comori, în primul rând cei doi stâlpi rămaşi în viaţă, precum şi toţi cei căror în decursul anilor au iubit şi sprijinit această *Gazetă:* e vorba de imensa şi trainica operă înfăptuită în cei 44 ani de existenţă; Şcoala de matematici, şcoala de muncă, şcoala de exactitate, de perseverenţă, de demnitate, de modestie.

Domnilor concurenţi, n'aţi vizitat zilele acestea o redacţie de gazetă comercială, o întreprindere, fie şi culturală, cum sunt atâtea altele. Aţi luat contact cu o fiinţă vie, cu un suflet colectiv de o calitate excepţională; v'aţi găsit într'o ambianţă specială, fermecătoare; aţi respirat o *atmosferă* incomparabilă, mai pură decât cea de pe crestele munţilor înalţi, care-ţi dilată plămânii şi-ţi înviorează toată fiinţa. Iată piesa cea mai de preţ a tezaurului spiritual în care aţi pătruns: *atmosfera* de înaltă moralitate, de muncă disciplinată şi dezinteresată, de idealism, de jertfă curată şi tăcută, pe altarul culturii româneşti. Nu veţi fi realizat adevăratul folos al vizitei D-vs. la *Gazetă*, dacă nu veţi pleca pătrunşi de această înălţătoare atmosferă.

Dar, dintre comorile *Gazetei*, ţin să vă fac să apreciaţi una la justa ei valoare.

Datorită neîncetatului sbucium şi totalei nesiguranţe în care s'a desvoltat viaţa naţiei noastre, vă daţi desigur seama că din punct de vedere al culturii şi civilizaţiei, suntem încă în primă adolescenţă. Deaceea fatalmente, nu numai că n'avem prea multe şi prea vechi tradiţii culturale, dar în general n'avem nici înclinaţie, nici prea mult respect pentru ceeace se numeşte tradiţie. In ţări mai bătrâne în ale culturii ca a noastră, nu există instituţie de seamă şi mai ales instituţie culturală, care să nu-şi aibă tradiţii mai respectate decât toate legile scrise şi cari formează cheagul legăturii dintre oameni şi acele instituţii. Ca simplu exemplu, aţi auzit desigur de diferitele forme pe care le iau, prin tradiţie, ceremoniile de admitere, de „iniţiere", a noilor veniţi în toate şcolile mari din Apus şi din America. Cinematograful v'a putut da şi aspecte inedite, în genere amuzante, ale acestor obiceiuri care, — departe de a fi simple distracţii tinereşti, au o semnificaţie mult mai adâncă. In Anglia, cele mai multe tradiţii implică şi arborarea unor costume, pălării sau alte ornamentaţii vestimentare, a căror linii adesea caricaturale, departe de-a trezi sentimentul ridicolului, — prin legătura cu epoci istorice foarte îndepărtate şi prin amintirile ce răscolesc, — materializează elementul de continuitate şi permanenţă a instituţiilor respective, fac legătura între generaţii şi trezesc cele mai curate emoţii, impunând cel mai desăvârşit respect, măcar că în acelaş timp dau tot câmpul liber exuberanţelor tinereşti.

Gazeta Matematică n'are, sau n'are *încă*, asemenea tradiţii răsunătoare dar tocmai, vreau să vă atrag atenţia că *Gazeta* îşi are tradiţiile ei, şi încă multe, — şi că în general ea cultivă tradiţia.

Avem o serie întreagă de reguli tradiţionale în aranjarea materiei şi publicarea revistei, — în redacţie, — în chibzuirea administrării fondurilor, — în admiterile şi votările de membri noui în Societate, în premieri şi concursuri, — pe cari cei mai apropiaţi de *Gazetă* le cunosc şi le acceptă cu sentimentul că n'ar putea să fie altfel. E aproape inutil să mai adaog că majoritatea acestor reglementări tradiţionale, care formează constituţia nescrisă a *Gazetei*, purced dela D-l Profesor ION IONESCU. Şi în această direcţie, tot D-sale îi revine partea cea mai mare de creaţie la *Gazetă*.

Insăşi masa comună, ca încheere a concursurilor anuale, este şi ea una din tradiţiile noastre şi numai puterea tradiţiei a putut să învingă negurile doliului în care ne-a cufundat dispariţia recentă a lui GHEORGHE ŢIŢEICA, şi a făcut posibilă întâlnirea noastră de astă seară.

De data aceasta însă, trebue să marcăm dispariţia uneia din cele mai scumpe tradiţii, aceea *a cuvântării morale* a lui ŢIŢEICA. Marea lui autoritate morală şi fermecătorul lui talent, făceau din aceste cuvântări morale, punctul culminant al meselor noastre de până acum. *Morală* aţi auzit şi veţi mai auzi astăseară poate. Ceeace nu se poate înlocui însă este *cuvântarea* lui ŢIŢEICA şi meşteşugul lui deosebit de a găsi drumul cel mai direct la inimă.

Voiu încheia, relevând încă o tradiţie neclintită a *Gazetei:* aceea de a nu-şi face niciodată *«reclamă»*.

Fără reportagii prin ziare, fără informaţii zilnice asupra mersului concursului, fără fotografii, fără pancarte purtate pe străzi, concursul la care aţi luat parte s'a desfăşurat ca în toţi anii precedenţi, în tăcere, în calm şi modestie. Sunt sigur că nici unul din dvs., nu regretă această lipsă de publicitate în jurul unui examen pentru care aţi muncit şi v'aţi sacrificat din vacanţă şi nici că pleacă de aici fără cocarde şi fanfare.

Noi însă dorim ceva mai mult: Să plecaţi de-aici cu un îndreptăţit sentiment de mândrie, de a vă fi iniţiat pe calea aceasta a muncii temeinice şi tăcute, sub egida unei Instituţii pe care sperăm s'o iubiţi şi s'o sprijiniţi când vă va veni rândul, cu aceeaşi ardoare cu care o fac cei ce v'au primit astăzi ca pe întruchipări ale speranţelor lor pentru viitorul glorios al *Gazetei*. Să închinăm paharul pentru acest viitor glorios!

Trăiască *Gazeta Matematică!*»

Neliniştea mea a dispărut odată cu începerea celei de a doua părţi a cuvântărei D-lui STAN.

Aceeaşi prudenţă comună a D-lui ION IONESCU face să-mi parvină manuscrisul celor rostite.

Dar spontaneităţilor cari urmează nu pot să le ţin piept. Totuşi trebue să le găsesc o formă oricât de aproximativă.

D-l IONESCU răspunzând D-lui STAN spune:

„Mulţumesc D-lui STAN pentru elogiile aduse. In cei 44 ani nu mi-am „făcut decât datoria. Sper să se găsească şi de acum înainte alţii cari să-şi „facă în viitor la fel datoria.

„Concursul din anul acesta a avut deasemenea un caracter militar. Ob„servăm astăzi că şi civilii au început să-şi facă uniforme. Dar cu toate uni„formele civililor, ei tot civili vor rămâne. Timpul pe care îl pierd civilii în „şcoli cu exerciţiile fizice şi militare a început să se resimtă. Se simte lipsa „elevilor dela liceele civile; astfel cum au fost înscrişi elevii anul acesta nu „revin decât un elev la cinci licee, iar majoritatea elevilor o formează cei dela „liceele militare.

„Dacă va fi totdeauna D-l GENERAL DEMETRESCU (aplauze) la conducerea liceelor militare, *Gazeta Matematică* va ajunge o instituţie militară.

„*Gazeta Matematică* a rămas cu doi stâlpi. O masă pe două picioare „nu poate sta. Trebuesc stâlpi noui.

„Am ales pe D-l GENERAL BUICLIU (aplauze), vine rândul D-lor: GE„NERAL LITEANU (aplauze), LT.-COL. LINTEŞ (aplauze), CPT. COMANDOR ZAPAN „(aplauze) şi al altora.

„Astăzi nu se poate fi ofiţer de Geniu, Artilerie, Marină, sau alte arme „fără matematică. La Politechnică s'a şi înfiinţat o secţie specială. Dealtfel, s'a „constatat şi anul acesta că militarii sunt foarte bine pregătiţi şi din premiile „care s'au decernat, două au fost luate de militari. Toate acestea consider că se „datoresc D-lui GENERAL DEMETRESCU.

Şi D-sa termină închinând pentru D-l GENERAL DEMETRESCU, care ne-a acordat totdeauna sprijinul său neprecupeţit.

Cuvântarea D-lui IONESCU a umplut sufletele armatei din sală.

Este un moment psihologic.

De acum înainte iau cuvântul numai militarii.

Denunţ abolirea gradelor.

Un General, un Locotenent-Colonel, Un General, un Plutonier-Major, şi apoi iar un General, iată o succesiune justificată de capriciile unei serii alternative la care mă îndeamnă să cuget.

Concret a fost aşa:

D-l GENERAL DEMETRESCU, prietenul nostru care ne iubeşte şi ne ajută atâta, a început:

„Domnule Profesor, Domnilor, este în deobşte cunoscut rolul *Gazetei* „*Matematice* în ţară de peste 40 ani. Se înţelege cât de hotărîtor a fost în „formarea caracterului acest spirit matematic de seriozitate, de sobrietate şi „de modestie.

„Acest rol este întreit de însemnat. Azi când războiul devine ştiinţific „nu numai ofiţerii trebue să fie matematicieni şi toţi cari iau parte. De aceea, „Dvs. *conducătorii Gazetei Matematice*, aveţi un mare rol".

D-l GENERAL DEMETRESCU aduce omagiul său sfetnicilor *Gazetei Matematice* şi tuturor redactorilor pentru ridicarea tineretului şi a ţării. D-sa continuă:

„Dar nu este suficient ca să apreciem şi să manifestăm toate simţămintele „frumoase ce purtăm *Gazetei Matematice*. Trebue să o ajutăm în toate „felurile. Pentru aceasta îngăduiţi-mi şi anul acesta să-mi reiau angajamentul „de a se acorda *Gazetei Matematice* o suvenţie anuală de lei 30.000 ce se va „încasa în Septemvrie. Şi ca să închei îngăduiţi-mi să urez să trăiască, să „crească şi să înflorească *Gazeta Matematică*.

Aplauze entuziaste acoperă ultimele cuvinte ale D-lui GENERAL DEMETRESCU.

Lipsa D-lui A. BUNESCU casierul Societăţii, se face observată. De câte ori se primeşte în public vre'o sumă de bani, ochii strălucitori ai membrilor îi caută urgent chitanţierul. De data aceasta chitanţierul este inutil, întrucât solvabilitatea D-lui GENERAL DEMETRESCU este confirmată.

Ce era dorit, era prezenţa D-lui BUNESCU, care de când este Secretar General ne-a fost răpit.

Intre timp fotograful a epuizat clişeele şi cu ele şi adresele de identificare.

Rămân în circulaţie diplomele, mult râvnite, acum chiar că se numesc Menu-uri.

Este o cunoscută lege monetară verificată şi la *Gazeta Matematică* mai ales acum decând cu moda tezelor bi-eliminatorii dela oraluri şi banchete.

D-lui GENERAL DEMETRESCU trebue să-i urmeze tot un militar, dar acesta reprezentant oficial al *Gazetei Matematice.*

De aceea D-l CPT. C-DOR ZAPAN, se ridică şi cu un calm englez, împarte tuturor ce li se cuvine :

„Domnilor membri ai Societăţii, Domnilor invitaţi şi iubiţi corespondenţi „şi viitori membri ai *Gazetei.*

„Ca reprezentant oficial al *Gazetei Matematice* cu ocazia concursului „ţinut anul acesta, transmit din partea Societăţii *Gazeta Matematică* mulţumiri „celor care au activat pentru ţinerea concursului în special D-lor membri care „au renunţat la odihnă şi au supravegheat lucrările".

Găsesc însă de a noastră datorie de a vă aduce la cunoştinţă numele aceluia care face ca să apară atât de regulat şi de îngrijit *Gazeta Matematică!* Este o activitate neobicinuită care te obligă să munceşti zi de zi pentru asigurarea apariţiei sub forma care se prezintă a *Gazetei Matematice.* Acesta este D-l INGINER ILIESCU asupra căruia se revarsă toată mulţumirea noastră.

In această seară când are loc tradiţionala masă a *Gazetei Matematice,* Societatea constată că printre invitaţi apare din ce în ce mai pronunţată prezenţa constantă a câtorva în frunte cu D-l GENERAL DEMETRESCU.

D-l GENERAL DEMETRESCU este o altă albină care tot în tăcere şi pe ascuns lucrează pentru binele *Gazetei Matematice.* Astfel D-l GENERAL DEMETRESCU a înţeles să sprijine Societatea prin donaţii. Pentru aceasta îi aducem sincerile noastre mulţumiri, pentru strădania şi interesul ce ne poartă. (Aplauze).

Ca în toţi anii candidaţii care vin la Concursul *Gazetei,* neavând rude au nevoe de a fi găzduiţi. Şi aici se păstrează o tradiţie. Este tradiţionala ospitalitate a D-lui THIERIN căruia îi aducem mulţumiri pentru această găzduire. Concursul a avut loc anul acesta ca şi anul trecut tot la Şcoala Politechnică. Societatea aduce vii mulţumiri D-lui Rector al Şcolii Politechnice pentru amabilitatea de a ne fi pus la dispoziţie sălile necesare.

Se observă prezenţa în sală a unei domnişoare.

Este singura care a dorit şi izbutit să fie cu noi. *Gazeta Matematică* mulţumeşte pe această cale pentru plăcerea ce ne-a făcut şi doreşte ca pe viitor să participe cât mai multe domnişoare la concursul *Gazetei Matematice.* In încheere urăm candidaţiilor deslegaţi de angajamente să-i vedem cât mai repede în mijlocul nostru ca Ingineri, Profesori şi Ofiţeri, membri al *Gazetei Matematice.* (Aplauze).

Aud în preajmă frumoase aprecieri pentru organizarea mesei comune. D-l V. GRIGORCEA explică: „este meritul D-lui INGINER ILIESCU".

Explicaţia D-lui GRIGORCEA este superflue.

Cu toţi cunoaştem munca fără de preget pe care D-l ILIESCU o depune pentru o reuşită a tuturor acţiunilor *Gazetei Matematice,* oricâtă discreţie ar pune d-sa în aceasta.

Şi mai ales cunoaştem calităţile D-sale de gazdă, dovedite cu prisosinţă în situaţiile când invitaţii noştri i-au contact cu noi la tradiţionalele noastre mese comune.

Este o ocazie anuală să divulgăm pe D-l ILIESCU în ciuda modestiei şi discreţiei lui. Şi o facem pentru un pilduitor exemplu.

Şirul termenelor superiori militari nu s'au isprăvit.

Al treilea: D-l GENERAL LITEANU, cel mai tânăr General din redacţia *Gazetei Matematice* (să mă erte D-l GENERAL BUICLIU !).

Drept, în faţa elevilor militari pe buzele cărora au amuţit cuvinte începute, D-l GENERAL LITEANU ne spune :

D-l PROFESOR IONESCU ne-a spus că noi militarii am inundat *Gazeta Matematică*. Insă în vremurile prin care trecem toată naţiunea trebue să fie armată. Cu toţii fac parte din această naţiune armată, aşa dar şi *Gazeta Matematică*. Noi militarii dacă am ajuns aici, am ajuns pentrucă au pătruns adânc în toată conştiinţa noastră noţiunile ce am căpătat. Vreau să spun de partea ştiinţifică, care apare atât de proeminent datorită *Gazetei Matematice*. In orice parte vom activa, peste tot, avem nevoe de cunoştinţe matematice, căci peste tot ne întâlnim de matematică. Dumneavoastră D-lor elevi dacă veţi deveni ofiţeri, veţi fi technicieni sau tacticieni, să ştiţi că fără această matematică nu veţi putea uni partea tactică cu partea technică, ştiind în fiecare moment ce să cereţi. Fără cunoştinţe matematice nu veţi fi nici buni tacticieni, nici buni technicieni. O să vă înşele întotdeauna alţii. De aceea să aveţi încredere în matematică.

M'a întrebat D-l IONESCU de ce am venit în ţinuta aceasta. Ii răspund că am venit în ţinuta aceasta, ca să fac cinste *Gazetei Matematice*.

D-l GENERAL LITEANU termină închinând pentru sănătatea stâlpilor atot puternici.

Aci D-l ION IONESCU infirmă pentru o secundă legea succesiunei militare.

D-sa notifică D-lui LITEANU: „nu mie frică de indundaţii".

Notificare inutilă, întrucât D-l GENERAL LITEANU cunoaşte comportarea D-lui IONESCU la Neajlov, cu ocazia unor inundaţii, când a făcut faţă situaţiei ca un bun inginer.

Intreruperea făcută pornind tot dela generatorul volubilităţii militare, nu-mi zdruncină observaţia.

D-l elev Plutonier Major I. PĂSCARU, reia seria cu termeni militari: „Personal simt o emoţie puternică pentru ceea ce văd că D-vs. dela *Gazeta „Matematică* faceţi pentru noi. Şi sunt convins că toţi camarazii mei au „aceeaşi emoţie, şi nu se poate ca noi să nu devenim ceea ce vreţi D-vs. „Numai pentru aceasta că D-vs. ne călăuziţi pe acest drum şi de aceea suntem „mândri că suntem români. Trăiască *Gazeta Matematică*".

Calităţile oratorice ale elevului PĂSCARU pun pe gânduri pe colegul GH. GHEORGHIU care de o bucată bună de vreme nu a mai avut curajul unei cuvântări ocazionale.

Asta nu l-a împiedicat însă ca împreună cu D-l G. DUMITRESCU şi AL. PANTAZI să vorbească toată seara în ciuda semnatarului, care trebuia să ia notiţele ce au văzut lumina zilei.

Insă toate au un sfârşit şi D-l GENERAL BUICLIU se simte dator să-l anunţe: „Una din tradiţiile mesei noastre comune este să ia sfârşit la ora 12", am întârziat cu 5 minute, şi pentrucă în sală este şi D-l GH. ILIESCU care ne-a obicinuit tot timpul cu exactitatea, mi-e frică de sancţiuni. Pentru aceasta propun ridicarea şedinţei şi plecând să ne revedem la anul cu sănătate.

D-l GENERAL LITEANU observă discret că D-l GENERAL BUICLIU devenit stâlp şi-a luat rolul în serios.

Răsfoesc volume vechi şi văd cu totul alte finaluri. Cu toţi însă înţelegem şi ne retragem tăcuţi la casele noastre cu speranţa în suflet că la anul viitor tradiţia nu o să mai trebuiască să fie minţită.

ALEXANDRU AL. ROŞU.

COMEMORAREA PROFESORULUI G. ȚIȚEICA

DE CĂTRE

CERCUL MATEMATIC AL SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE DIN CLUJ

Cercul Matematic al Societății de Științe din Cluj, a consacrat ședința sa din ziua de 26 Aprilie 1939, pentru comemorarea ilustrului profesor G. ȚIȚEICA.

Membrii cercului nostru, împreună cu toți profesorii Facultății de Științe au ținut în felul acesta să aducă omagiul lor profund recunoscător memoriei marelui învățat care pentru noi toți a fost un neîntrecut profesor și scump prieten.

D-l Profesor TH. ANGHELUȚĂ, care prezidează ședința, amintește că la 22 Februarie 1939, cercul nostru, prin cuvântul D-lui Profesor G. BRATU, și-a exprimat durerea ce resimte prin pierderea ilustrului matematician G. ȚIȚEICA.

D-l Profesor BRATU a spus:

In cea dintâi ședință, care are loc după moartea marelui profesor și învățat G. ȚIȚEICA, membrii Cercului Matematic al Societății de Științe din Cluj, profund îndurerați de pierderea acestui ilustru matematician român, — preaslăvind memoria lui — socotesc ca o sacră datorie să-și exprime sentimentele lor de cea mai adâncă recunoștință.

Profesorul ȚIȚEICA a onorat societatea noastră prin valoroasele comunicări, pe care le-a făcut la noi. Cu dragostea și entuziasmul lui pentru știință, cât și cu vastele sale cunoștințe, ne-a încurajat adesea și ne-a susținut, contribuind astfel la progresul studiilor matematice la Facultatea de Științe din capitala Ardealului.

De altfel — cu neîntrecutul lui talent — a ținut și cursuri la Facultatea noastră, dând ocazie studenților ardeleni să admire de aproape mintea luminată a acestui mare învățat și să se încălzească la focul sacru al sufletului lui.

El a dat țării serii întregi de oameni destoinici, care ostenesc pe ogorul științei și mulți dintre noi — cu o adevărată evlavie și cu profundă recunoștință — constatăm, la cursurile și cercetările noastre, cât îi datorăm ca foști elevi ai lui.

Moartea Profesorului ȚIȚEICA este o pierdere imensă atât pentru cultura țării noastre, cât și pentru știința lumii întregi. Pilda și amintirea lui vor fi vecinic vii în sufletele noastre.

D-l Profesor ANGHELUȚĂ dă apoi cuvântul D-lui Conferențiar G. CĂLUGĂREANU pentru a expune câteva rezultate ale regretatului ȚIȚEICA cu privire la Suprafețele S descoperite de eminentul geometru în 1907.

D-l CĂLUGĂREANU a spus :

Se înțelege prin *deformare* a unei suprafețe date S, trecerea dela S la o altă suprafață S_1 aplicabilă pe S. Suprafața S_1 este deci dedusă din S printr'o „*îndoire*“ care nu dilată și nu contractă în nici o regiune suprafața S. Orice arc de curbă trasă pe S își păstrează lungimea în cursul deformării, și orice arie se conservă. Una din problemele centrale ale teoriei deformării este determinarea tuturor suprafețelor aplicabile pe o suprafață dată S. Se știe că determinarea acestora revine la integrarea unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul II, de tipul MONGE-AMPÈRE, datorită lui DARBOUX, însă această integrare nu e posibilă în general, în starea actuală a Analisei matematice. Se mai știe însă că liniile caracteristice ale acestei ecuații sunt liniile asimptotice ale suprafeței date, și deaceea liniile asimptotice joacă un rol special în deformare. Astfel, se arată că, dată fiind o curbă în spațiu Γ, putem în general să deformăm suprafața S așa încât o curbă oarecare C trasă pe S să se aștearnă pe Γ; aceasta cu condiția ca C să nu fie o linie asimptotică pe S.

Deasemeni, dacă pe S alegem o curbă C, nu este posibil să deformăm suprafața S așa încât C să rămână rigidă, decât dacă C e o linie asimptotică. Spunem că C rămâne rigidă dacă ea își păstrează curbura și torsiunea neschimbate în fiecare punct. Aceste rezultate sunt de mult clasice.

Se mai știa că dacă o linie asimptotică rămâne rigidă, deformarea e posibilă într'o infinitate de moduri, și că e posibilă chiar deformarea în care toate liniile asimptotice din una din cele două familii rămân rigide, însă nu se cunoașteau exemple, afară de cele banale, care să ilustreze acest caz. Exemplul a fost dat de G. ȚIȚEICA în 1916, în Analele Academiei Române. El este oferit de suprafața tetraedrală care se scrie sub formă simplificată,

$$\alpha x^{\frac{2}{3}} + \beta y^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Eminentul geometru a fost condus la acest exemplu de cercetările sale asupra reţelelor. Acestea i-au atras atenţia încă din 1907, asupra unei clase de suprafeţe pentru care curbura totală într'un punct M oarecare, e proporţională cu puterea a patra a distanţei dela origină la planul tangent în M. Această clasă de suprafeţe e foarte vastă şi se transformă în ea însăşi prin orice transformare centro-afină, adică de forma

$$X = ax + by + cz,$$

$$Y = a'x + b'y + c'z,$$

$$Z = a''x + b''y + c''z.$$

Această observaţie a condus pe ŢIŢEICA să caute o definiţie pur afină a clasei de suprafeţe care-i poartă azi numele, şi a reuşit să o dea sub o formă de o eleganţă şi o simplicitate clasică.

Să reamintim că pe fiecare generatoare a unei suprafeţe riglate există două *puncte flecnodale.* Acestea sunt limitele către care tind cele două puncte de intersecţie ale generatoarei cu cuadrica riglată ce trece prin alte trei generatoare ale suprafeţei, când le facem pe aceste trei să se apropie indefinit de prima. Unind punctele flecnodale de pe diferitele generatoare avem două curbe flecnodale trase pe suprafaţa riglată. G. ŢIŢEICA a arătat întâi că suprafeţele riglate din clasa sa sunt caracterizate prin proprietatea că au liniile flecnodale aruncate la infinit, unde se află confundate. Căutând apoi să extindă definiţia la suprafeţele oarecare din clasa sa, a definit mai întâi suprafeţele riglate asimptotice ale unei suprafeţe date. Dându-se o linie asimptotică A pe S, tangentele duse la S în punctele liniei A aşa încât să coincidă în fiecare punct cu direcţia asimptotică netangentă liniei A, formează suprafaţa riglată asimptotică relativă la linia asimptotică A Ele au fost definite de G. ŢIŢEICA. Ori, pentru ca o suprafaţă oarecare să aparţină clasei ŢIŢEICA, e necesar şi suficient ca orice suprafaţă riglată asimptotică a ei să aibă liniile flecnodale confundate la infinit, ceea ce constitue desigur definiţia afină căutată.

(Va urma).

REZULTATUL
CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“ DIN ANUL 1939

1. Concursul din anul acesta este al 30-lea concurs ţinut de *Gazeta Matematică* în timpul celor 44 ani de existenţă.

La început, în anii 1902 şi 1904 s'au acordat premii în bani sau în cărţi celor mai buni corespondenţi, clasificaţi după activitatea lor în revistă. In anul următor, la 3 Aprilie 1905 se ţine primul concurs mai sistematic, candidaţii fiind obligaţi a trece probe scrise şi orale. Acest concurs, precum şi cele din următorii 3 ani s'au ţinut în diferite oraşe ale ţării. Incepând cu anul 1909 concursurile se ţin în Bucureşti luând forma lor actuală. Continuă în felul acesta, obţinând rezultate din ce în ce mai bune până în 1917 când concursul n'a mai putut fi ţinut din cauza războiului mondial. După o întrerupere de 4 ani seria de concursuri reîncepe în 1921 şi continuă până în 1930 când din cauza reformei învăţământului secundar de atunci, *Gazeta Matematică* prin conducătorii ei s'a simţit nevoită, nu fără un adânc regret, de a suprima concursul până în anul 1933. Iată ce scrie GEORGE ŢIŢEICA în numărul din Februarie 1930 sfârşind anunţul dureros al suprimărei temporare a concursului:

„Firește, nu renunţăm definitiv la ideia concursului anual, care a fost nu numai o desfătare intelectuală pentru toţi cei care urmăreau, ci mai presus de toate o întrezărire de talente dătătoare de speranţe. A fost şi nu putem pierde credinţa că va mai fi mijlocul cel mai bun de afirmare pentru o specialitate preparată totdeauna de elita liceelor noastre. Aşa să fie în viitor“.

Şi aşa a fost. Căci în 1933 în a cincea zi de Paşti elevii şi profesorii lor s'au întrunit din nou în Bucureşti spre a îndeplini lucrările concursului. Incepând din acest an, *Gazeta Matematică* a ţinut din nou concursul anual continuând până astăzi, şi încheind anul acesta o etapă frumoasă: al 30-lea concurs!

Acest bilanţ de muncă cinstită şi desinteresată se încheie cu o pagină dureroasă. Acela care a făcut rapoartele de închidere a concursului, afară de două când datoria nu-i dăduse răgaz să fie în Bucureşti, GEORGE ŢIŢEICA, nu mai este. Eram obişnuiţi să-l vedem printre noi supraveghind şi întrebând pe candidaţi, totdeauna

dându-ne un sfat sau o îndrumare care era o încurajare pentru cei ce erau pe calea cea dreaptă şi o încercare de îndreptare pentru cei care erau pe calea greşită. Iată dece concursul de anul acesta a avut o atmosferă melancolică, iar masa comună tradiţională care încheie lucrările concursului, a fost tristă, lipsită de muzică, de dansuri naţionale şi mai ales lipsită de *„cuvântarea morală"*.

2. Anul acesta, după cum a fost anunţat în numărul din Februarie, au fost admişi la concurs 109 candidaţi, dintre care 3 candidate. S'au prezentat 99 şi au fost admişi să treacă proba orală 42. Dintre cei care nu au venit la concurs numai 7 au anunţat. Ba mai mult, chiar dintre cei prezenţi la teze au fost 4 candidaţi care au întârziat la proba de după amiază, deşi ora de începere a lucrărei a fost anunţată în *Gazetă*. Această neseriozitate a candidaţilor respectivi a fost pedepsită prin excluderea lor dela lucrări.

Ca nivel ştiinţific elevii s'au prezentat mai slab ca în anii precedenţi. Pe lângă faptul că unii dintre candidaţi nu au fost suficient pregătiţi, comisia a constatat că unora dintre ei, le lipseau cunoştinţa unor capitole întregi din materia clasei respective. Este evident că aceşti candidaţi nu au putut fi luaţi în considerare. Profităm de această ocazie spre a reaminti elevilor care au de gând să se prezinte la concursurile viitoare că *Gazeta Matematică* a format o programă analitică, ce se publică în fiecare an, şi în care sunt trecute capitolele din care sunt examinaţi.

3. Comisia examinatoare a fost alcătuită în felul următor: G-L GH. BUICLIU pentru Geometria Analitică la Anul Preparator al Şcoalei Politechnice; I. I. CHIŢULESCU pentru Geometria Descriptivă; G. G. CONSTANTINESCU pentru Algebră cl. IV; G. I. DUMITRESCU pentru Trigonometrie şi Algebra cl. V şi VIII; GH. TH. GHEORGHIU pentru Algebră cl. VII şi Geometrie Analitică cl. VIII; C. IONESCU-BUJOR pentru Geometrie în spaţiu la cl. IV şi VI; N. N. MIHĂILEANU pentru Geometrie cl. V şi Complementele de Geometrie dela cl. VII; D. STOICA pentru Algebră la Anul Preparator. Deoarece D-l C. IONESCU-BUJOR nu a putut examina la oral fiind concentrat, elevii au fost examinaţi de D-l AD. GHEORGHIU.

Pe lângă membrii comisiunei examinatoare au mai luat parte la lucrări dintre membri: D-ra PREDUŢA BUNGEŢEANU şi D-nii

E. ABASON, E. BOTEA, M. GHERMĂNESCU, LT.-COL. A. GHIMUŞ, GH. ILIESCU, LT. C. IONESCU-ŢIU, CĂP. C-DOR I. LINTEŞ, G-L GH. I. LITEANU, AL. NICULESCU, C. ORĂŞEANU, AL. PANTAZI, TR. POPP, AL. AL. ROŞU, GH. D. SIMIONESCU, GH. STAMATESCU, C. C. TEODORESCU, O. N. ŢINO, GH. VASILIU, M. VASILIU, CPT. C-DOR GR. ZAPAN dovedind astfel prin prezenţa lor interesul şi dragostea ce poartă concursului.

Deasemeni s'a remarcat în timpul lucrărilor orale prezenţa D-lor LT.-COL. C. PANĂ, GH. CĂLUGĂREANU, R. ŢIŢEICA, a domnilor Profesori precum şi a ofiţerilor însoţitori ai elevilor iceelor militare.

Ţinem să mulţumim cu această ocazie, Domnului Rector al Şcoalei Politechnice pentru îngăduirea ţinerei lucrărilor concursului în localul Şcoalei Politechnice, Direcţiei Şcoalelor Militare pentru aducerea şi întreţinerea elevilor în timpul concursului, D-lui G. THIERRIN care continuând tradiţia a găzduit şi anul acesta pe elevii liceelor civile veniţi din provincie. Pentru acelaşi motiv îi mulţumim şi D-lui D. STOICA.

4. Dintre candidaţii prezenţi anul acesta la concurs, comisiunea a găsit că au fost demni de premiere următorii:

I. Locul de frunte îl ocupă anul acesta harnicul nostru corespondent, D-l FLORESCU L. VICTOR, elev în clasa VIII al liceului militar „Nicolae Filipescu" din Târgovişte, având aproape toate probele foarte bune, din care s'a desprins o temeinică stăpânire a materiei. In special D-sa s'a dovedit a avea cunoştinţe întinse în Geometria Analitică. I se dau ca premii: M. H. ANDOYER. *Cours de mécanique céleste.* Vol. I şi II; EUCLIDE, *Elemente,* Vol. I, traducere de V. MARIAN; I. IONESCU, *Istoricul învăţământului ingineriei în România;* G. ŢIŢEICA, *Culegere de probleme de geometrie analitică;* E. VESSIOT et P. MONTEL, *Cours de mathématiques générales.* Vol. I şi II.

II. In locul al doilea s'a clasificat D-l RĂDULESCU GH. OCTAVIAN elev în clasa VIII tot la liceul militar „Nicolae Filipescu" din Târgovişte, pentru probele foarte bune de Geometrie Analitică şi pentru cel mai bun oral la Algebră. I se dau ca premii: P. APPEL, *Cours de mécanique*; FR. ENRIQUES et O. CHISINI, *Courbes et fonctions algébriques d'une variable*; EUCLIDE. *Elemente,* Vol. I, raducere de V. MARIAN; A. GRIGNON, *Traité de cosmographie;*

I. IONESCU, *Lucrările publice la Romani sub Impăratul* TRAIAN; G. ŢIŢEICA, *Culegere de probleme de geometrie analitică*;

III. In locul al treilea vine D-l POPA TEODOR, elev în clasa IV al liceului „Moise Nicoară" din Arad pentru probele foarte bune de Algebră şi foarte bune răspunsuri orale la Geometrie. Candidatul promite mult pentru viitor. I se dau ca premii: *Gazeta Matematică,* Volum Jubilar; F. G. M. *Manuel de trigonometrie*; I. IONESCU, *Isac Newton*; G. PAPELIER, *Formulaire*; G. PAPELIER, *Exercices de géométrie moderne.*

IV. In locul al patrulea vine D-l COSTESCU GH. IOAN, elev în clasa VII dela liceul „Mihail Eminescu" din Bucureşti pentru probele foarte bune de Geometrie Descriptivă şi bune de Algebră. I se dau ca premii: TH. CARONNET, *Exercices de géométrie*; *Gazeta Matematică,* Volum Jubilar. I. IONESCU, *Viaţa lui* EULER; F. PERRIN, *Mécanique statistique quantique.*

V. In locul al cincilea vine D-l IONESCU D. STELIAN, elev în clasa VII la liceul „Ştefan cel Mare" din Cernăuţi pentru probe foarte bune de Geometrie Descriptivă şi destul de bune de Algebră. I se dau ca premii: F. G. M. *Manuel de mécanique*; I. IONESCU, *Reforma calendarului*; E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE, *Traité de géométrie (Géométrie dans l'espace)*; G. ŢIŢEICA, *Culegere de probleme de geometrie analitică.*

VI. In locul al şaselea vine D-l DRĂGHICESCU P. PAUL, elev în clasa V dela liceul militar „General Makarovici" din Iaşi, pentru probele orale şi scrise bune atât la Algebră cât şi la Geometrie. I se dau ca premii: A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*; *Exercices d'arithmétique, par une réunion de professeurs*; I. IONESCU, *Nomografia*; E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE, *Traité de géométrie (Géométrie plane).*

VII. In locul al şaptelea vine D-l GLIGOR N. IOAN, dela liceul „Moise Nicoară" din Arad, pentru răspunsurile orale foarte bune la Geometrie şi bune la Trigonometrie. I se dau ca premii; P. AUBERT et G. PAPELIER, *Exercices et épures de géométrie descriptive*; *Cours d'algèbre élémentaires, par une réunion de professeurs*; I. IONESCU, *Geometrografia.*

5. Din restul candidaţilor s'au distins câţiva, numai la câte o materie sau numai la unele din probe. Dintre aceştia comisiunea a hotărît să acorde menţiuni următorilor candidaţi:

Clasa IV. CONSTANTINESCU EMIL, dela liceul „Gheorghe Şincai", din Bucureşti, pentru lucrarea scrisă de Algebră. I s'au acordat volumele: *Gazeta Matematică,* Volum Jubilar; G. PAPELIER, *Formulaire.*

STOIANOVICI I. ŞERBAN, dela liceul „Nicolae Filipescu" din Târgovişte, pentru probele orale. I s'au acordat volumele: A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial; Gazeta Matematică,* Volum Jubilar.

Clasa V. ARENDT R. EMIL, dela liceul „Nicolae Filipescu" din Târgovişte, pentru probele orale. I s'au acordat volumele: *Gazeta Matematică,* Volum Jubilar; I. IONESCU, *Beton Armat.*

FLOREŞTEANU ALEXANDRU, dela acelaşi liceu, pentru oralul de Geometrie. I s'au acordat volumele: A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial;* I. IONESCU, *Beton Armat.*

Clasa VI. MĂRGĂRIT NICOLAE, dela liceul „Schewitz-Thierrin" din Bucureşti, pentru oralul de Trigonometrie. I s'au acordat volumele: *Cours de trigonométrie,* par une réunion de professeurs; I. IONESCU, *Beton Armat.*

Clasa VII. POPA D. MIRCEA, dela liceul militar „General Makarovici" din Iaşi pentru cunoştinţe întinse la Complemente de Geometrie. I s'au acordat volumele: A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial; Gazeta Matematică,* Volum Jubilar.

Clasa VIII. BODNĂRESCU HORIA, dela liceul „Titu Maiorescu" din Bucureşti, pentru oralul de Geometrie Analitică. I s'au acordat volumele: EUCLIDE, *Elemente,* Vol. I, traducere de V. MARIAN; I. IONESCU, *Beton Armat.*

6. Privind lista celor care s'au remarcat anul acesta trebue să facem două constatări. Spre deosebire de anii trecuţi în rândul celor de mai sus observăm că fiecare clasă îşi are câte un reprezentant, deci împărţirea pe clase este mai omogenă. Dar ceea ce este mai interesant este repartiţia premianţilor pe licee şi pe regiuni. Intr'adevăr, spre deosebire de anii trecuţi când liceele militare aveau preponderenţă prin numărul premianţilor şi prin calitatea lor, anul acesta liceele civile deţin şi ele un loc de cinste. Este astfel o împlinire a unei vechi dorinţe a lui GEORGE ŢIŢEICA. Incheind cronica al celui de-al 30-lea concurs, urăm *Gazetei Matematice* viaţă lungă şi prosperitate dorindu-i ca în fiecare an să ţină acest concurs, iar generaţiilor de elevi ce se vor prezenta la el să fie din ce în ce mai bine pregătiţi.

GH. TH. GHEORGHIU.

O PROBLEMĂ DE CONSTRUCȚIE

(Urmare dela pag. 412)

III. *Soluție algebrică.* Fie

$$x = BD = DE = EC$$

lungimea laturilor egale ale patrulaterului BDEC.

După poziția topologică a punctelor D și E pe laturile AB, AC avem 9 posibilități de soluțiuni D_iE_j, în care i și j iau toate valorile posibile dela 1 la 3 inclusiv.

Notăm pe fig. 1 cu a_i, b_i, c_i[1]) genul diferitelor soluțiuni. Din triunghiul D_3AE_3 se scoate

$$\overline{D_3E_3}^2 = \overline{AD_3}^2 + \overline{AE_3}^2 - 2 \cdot \overline{AD_3} \cdot \overline{AE_3} \cos A.$$

Se vede pe figură că în cazul unei soluțiuni c_3, avem

$$\overline{D_3E_3} = x \quad ; \quad \overline{AD_3} = x - c \quad ; \quad \overline{AE_3} = x - b$$

așa că relația precedentă devine

$$x^2 = (x-c)^2 + (x-b)^2 - 2(x-c)(x-b)\cos A.$$

La fel se scoate din triunghiurile D_3AE_1, D_1AE_3, D_1AE_1, D_2AE_2, respectiv

$$x^2 = (x-c)^2 + (b-x)^2 - 2(x-c)(b-x)\cos(\pi - A)$$

$$x^2 = (c-x)^2 + (x-b)^2 - 2(c-x)(x-b)\cos(\pi - A)$$

$$x^2 = (c-x)^2 + (b-x)^2 - 2(c-x)(b-x)\cos A$$

$$x^2 = (c-x)^2 + (b-x)^2 - 2(c-x)(b-x)\cos A.$$

Pentru ultima ecuație, în triunghiul D_2AE_2, s'a luat $\overline{BD_3} = \overline{CE_3}$ cu semnul negativ.

Inlocuind pe $\cos(\pi - A)$ prin $(-\cos A)$, pe

$$c^2 + b^2 - 2bc\cos A$$

prin a^2 și făcând calculele și reducerile, se găsește că ultimele 5 ecuațiuni se reduc toate la ecuațiunea

$$(1) \quad (1 - 2\cos A)x^2 - 2(c+b)(1-\cos A)x + a^2 = 0.$$

---

1) Ca în notațiile din articolul D-lui M. GHERMĂNESCU dela pag. 348.

Această ecuație caracterizează soluțiuni de genul a_1, a_3, b_2, c_1, c_3.

Urmând aceeași cale se găsește ecuațiunea

$$(2) \quad (1+2\cos A)x^2 - 2(c-b)(1+\cos A)x + a^2 = 0$$

caracteristică soluțiunilor de gen a_2, b_1, b_3, c_2.

Realizantul ecuațiunei (1) este

$$R_1 = (c+b)^2(1-\cos A)^2 - a^2(1-2\cos A)$$

$$\therefore \quad R_1 = 2bc(1-\cos A) + (c-b)^2\cos^2 A$$

cantitate eminamente pozitivă, căci

$$1-\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}.$$

Prin urmare *problema* **are totdeauna** *două soluțiuni și* **numai două** *în grupele de genul* a_1, a_3, b_2, c_1, c_3.

Realizantul ecuațiunei (2) este

$$R_2 = -2bc(1+\cos A) + (b+c)^2\cos^2 A$$

care este *numai condiționat* pozitiv. Deci *problema* **poate** *avea și maximum două soluțiuni în grupele de gen* a_2, b_1, b_3, c_2.

Cum nu sunt excluse nici rădăcinile duble la ecuația (2), problema poate avea în general două, trei sau patru soluțiuni, genul și numărul soluțiunilor depinzând de anume relațiuni între b, c și A.

IV. *Cazurile ecuației* (1). 1°. Să examinăm cazul unui gen de soluțiuni, de exemplu al soluțiunei de genul c_3.

Pe fig. 1 se vede că pentru astfel de soluțiuni trebue ca

$$\overline{BD_3} = \overline{CE_3} > c > b$$

presupunând $c > b$ ca la punctul 1° soluția geometrică.

Cum ecuațiunea (1) are *totdeauna* două rădăcini reale, înseamnă că o soluțiune c_3 nu va fi izolată ci asociată cu o soluțiune a_1, a_3, b_2, c_1 sau poate chiar cu c_3.

Să examinăm întâi dacă se pot avea două soluțiuni c_3.

Pentru aceasta este necesar și suficient ca

$$R_1 = 2bc(1-\cos A) + (c-b)^2\cos^2 A = 0.$$

Cum toate părţile lui R_1 sunt pozitive, R_1 nu ar putea fi nul decât dacă am avea simultan

$$1 - \cos A = 0 \quad \text{şi} \quad \cos^2 A = 0$$

ceea ce este imposibil. Prin urmare *nu există triunghiuri care să admită două soluţiuni de gen* c_3.

Prin acelaşi raţionament se ajunge la concluzia mai generală că *nu există triunghiuri care să admită soluţiuni duble de unul din genurile* a_1, a_3, b_2, c_1, c_3.

2°. *Soluţiuni* c_3 *şi* a_1. Asociem pe c_3 cu a_1. Fie

$$x_1 = \frac{(b+c)(1-\cos A) - \sqrt{R_1}}{1 - 2\cos A}$$

$$x_2 = \frac{(b+c)(1-\cos A) + \sqrt{R_1}}{1 - 2\cos A}$$

rădăcinele ecuaţiunei (1). Din fig. 1 se vede că pentru a avea soluţiunile D_3E_3 şi D_1E_1 simultan, trebue să avem:

(3) $0 < x_1 < b < c < x_2$ sau (4) $0 < x_2 < b < c < x_1$.

De oarece numărătorul lui x_2 este pozitiv trebue ca atât pentru (3) cât şi pentru (4) să avem

$$1 - 2\cos A > 0 \qquad \therefore \quad \frac{\pi}{3} < A.$$

Pentru ca şi x_1 să fie pozitiv trebue ca

$$(b+c)(1-\cos A) - \sqrt{R_1} > 0$$

$$\therefore \qquad -a^2(1 - 2\cos A) < 0$$

care are loc numai dacă $\frac{\pi}{3} < A$.

Deci, când $\frac{\pi}{3} < A$ se poate avea o soluţie c_3 şi una a_1.

Consider neegalităţiile (3), care se reduc la

$$x_1 < b \quad \text{şi} \quad c < x_2.$$

Prima duce uşor la

$$c - 2b < 0 \quad \therefore \quad c < 2b.$$

Deci: *dacă* $\frac{\pi}{3} < A$ *şi* $c < 2b$ *avem o soluţie* a_1.

A doua neegalitate, $c < x_2$, duce la

(5) $$-b-(c-b)\cos A < \sqrt{R_1}.$$

Cum $\cos A < \frac{1}{2}$ poate fi şi negativ vom face în (5) următoarele 3 supoziţiuni:

$$\frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2} \quad ; \quad A = \frac{\pi}{2} \text{ şi } \frac{\pi}{2} < A.$$

Prima supoziţiune, $\cos A > 0$ deci (5) este adevărata, având membrul I pozitiv şi pe al doilea negativ.

A doua ipoteză conduce din (5) la

$$-b < \sqrt{R_1}$$

care este evidentă.

In fine în a treia ipoteză, fac $\cos A = -\alpha < 0$, deci $\alpha > 0$ şi am din (5):

$$-b+(c-b)\alpha < \sqrt{2bc(1+\alpha)+(c-b)^2\alpha^2}$$

$$\therefore \quad (c-b)\alpha < b+\sqrt{2bc(1+\alpha)+(c-b)^2\alpha^2}$$

şi cum $c > b$ se ridică la patrat se fac reducerile şi se obţine

$$0 < b^2+2b\sqrt{R_1}+2bc(1+\alpha)$$

care este totdeauna adevărată când α este un *cosinus.*

Concluzia: Când $\frac{\pi}{3} < A$ *şi* $c < 2b$ *avem o soluţiune* c_3 *şi o soluţiune* a_1, ceea ce corespunde cu rezultatul din tabelul dela punctul 3°, pagina 410 dela soluţiunea geometrică.

3°. *Soluţiuni* c_3, a_3 revine la a examina cazul:

(6) $b < x_1 < c < x_2$ sau (7) $b < x_2 < c < x_1$

x_1, x_2 fiind pozitivi pentru ambele neegalităţi (6) şi (7), suntem din acest punct de vedere tot în cadrul condiţiunei dela numărul precedent şi adică

$$1-2\cos A > 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\pi}{3} < A.$$

In aceste condiţiuni este evident că $x_1 < x_2$ căci x_1 şi x_2 sunt pozitivi. Deci (7) nu poate avea loc.

Rămâne (6) din care condiţiunea $c < x_2$ a fost examinată la cazul precedent. Să vedem acum când

$$b < x_1 < c.$$

Avem succesiv

$$b < x_1$$

$$\sqrt{R_1} < (b+c)(1-\cos A) - b(1-2\cos A)$$

$$\sqrt{R_1} < c(1-\cos A) + b\cos A. \quad (8)$$

Să presupun $\cos A > 0$ deci $\frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}$, deci (8) se poate ridica la patrat fără a-şi schimba sensul, şi se ajunge la

$$2b < c.$$

Condiţiunea

$$x_1 < c$$

conduce în cazul $\frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}$ la

$$(b-2c)(1-2\cos A) < 0$$

$$\therefore \quad b < 2c$$

care este satisfăcută când $b < c$. Deci *dacă* $\frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}$ *şi* $2b < c$ *avem totdeauna o soluţiune* c_3 *şi o soluţiune* a_3, ceea ce s'a găsit şi la soluţia geometrică.

Se urmează pe această cale atât pentru $\frac{\pi}{2} < A$ dela acest caz cât şi pentru toate celelalte cazuri, asociind în toate felurile două soluţiuni de genul c_3, c_1, a_1, a_3, b_2 între ele şi două soluţiuni de celelalte genuri între ele.

Totul revine la a compara în diferitele feluri posibile rădăcinile ecuaţiunei (1) cu numerele $0 < c < b$ pentru prima grupă şi rădăcinile ecuaţiunei (2) pentru a doua grupă. Această comparaţiune este o problemă elementară de algebră, din care am tratat două cazuri până aici, restul cazurilor îl las pe seama corespondenţilor, atrăgându-le atenţiunea că în multele neegalităţi ce vor avea de rezolvat trebue să ţină foarte atent seama de semne înainte de a face ridicări la patrat.

G-L GH. BUICLIU.

ALGEBRA LUI E. BACALOGLU

(Urmare dela pagina 398)

Capitolul al patrulea este întitulat „*Puteri şi rădăcini ale expresiilor algebrice*“ cu toate că aici vom găsi şi probleme de analiză combinatorie. Incepând cu ridicarea la o putere a monoamelor şi continuând cu extragerea rădăcinii de un ordin oarecare, se introduce notaţia exponentului fracţionar, stabilindu-se şi proprietăţile radicalilor. In paragraful următor se definesc *Aranjările, Permutările* şi *Combinările.* BACALOGLU întrebuinţează pentru *Aranjări* cuvântul *Rânduiri* (R_m^n), cuvânt care azi, poate din motivele amintite de BACALOGLU în notele anterioare, a dispărut. In continuare stabileşte formula binomului lui NEWTON [1]) şi în ultimul paragraf se ocupă de extragerea rădăcinii patrate dintr'un polinom.

In capitolul următor se studiază progresiile aritmetice şi geometrice care sunt prezentate ca nişte cazuri particulare de serii adică: „*o succesiune de termeni în mod nelimitat*“.

In locul cuvântului „*raţie*“ întrebuinţează de obicei „*diferenţă*“ resp. „*cât*“. Ca o aplicaţie imediată a progresiunilor, BACALOGLU tratează despre *Dobânda compusă* şi *Anuităţi.*

In loc de „*Dobândă*“ întâlnim „*Interes*“ de ex.: *un capital dat la interes cu* r%, *dă într'un an interesul...* „Este foarte interesantă observaţia care o face după ce defineşte dobânda compusă“: *In teorie ne putem închipui că interesul se împreună în tot momentul cu capitalul, ca să mărească interesul în momentul următor. Calculul interesului compus după această supoziţie cere cunoştinţe de calcul infinitezimal şi apoi în transacţia comercială interesul compus se socoteşte numai pentru intervale anuale, lunare,...*“. Ca să calculeze timpul, aplică logaritmi, cu paranteza explicativă „*(vezi teoria lor)*“. Cred că acest calcul a fost aşezat aici din motive de continuitate, dar de fapt trebue să-l fi făcut după explicarea logaritmilor. La anuităţi întâlnim iar o expresie mai rară: „*Anuităţile servesc deobicei pentru amortizare sau răfuire de datorii pe termen lung*“.

1) E probabil că BACALOGLU nu ştia că formula binomului era cunoscută încă din sec. XVI, căci ar fi amintit-o.

După definirea seriilor convergente şi divergente arată că pentru convergenţă e necesar, dar nu şi suficient; ca termenii unei serii să fie descrescători, dovedind divergenţa seriei armonice. Regula raportului o ilustrează prin seria e^x a cărui sumă pentru $x = 1$ „*se înseamnă cu litera e şi e importantă la teoria logaritmilor şi alte părţi din analiza matematică*".

Ca o aplicaţie a seriilor, sunt date numerele figurate pe care suntem obişnuiţi să le întâlnim în manualele de acum, imediat după combinări. Definiţia dată de BACALOGLU le fixează însă mai natural locul aici. „*Numerele figurate formează o clasă de serii după principiul următor: să ne închipuim 1 scris de mai multe ori pe o linie orizontală — să adunăm 1, 2, 3,... termeni ai acestei serii şi rezultatele să le scrim pe o a doua linie orizontală, formându-se astfel seria numerelor naturale 1, 2, 3,... sau a numerelor figurate de ordinul I. Să adunăm iar pe cei dintâi 1, 2, 3... termeni ai acestei serii şi vom avea o serie nouă scrisă în a treia linie orizontală adică 1, 3, 6,... sau numerele figurate de ordinul II, numite şi numere trigonale*"... „*Aceste diferite ordine de numere figurate le putem aşeza şi sub forma unui triunghiu care poartă numele de triunghiul lui* PASCAL".

Cu ajutorul numerelor figurate se rezolvă mai departe problema numărării grămezilor de corpuri sferice, „*cari se pot aşeza în grupe largi la bază şi înguste la vârf*".

In capitolul VI se ajunge la noţiunea de *fracţie continuă* din consideraţiuni asupra fracţiilor ordinare. Se defineşte *redusă* sau *fracţia convergentă* a unei fracţii continue, întâlnind teoremele asupra formării resturilor succesive precum şi asupra fracţiilor continue periodice.

Capitolul VII este deosebit de interesant prin originalitatea expunerei, cât şi prin observaţiile personale cari le întâlnim. E. BACALOGLU defineşte logaritmi prin puteri, şi imediat stabileşte şi relaţiile celor două progresii cari corespund logaritmilor astfel: „*După această definiţie a logaritmilor, este clar că dacă mai multe numere formează o progresie geometrică, logaritmii lor vor forma o progresie aritmetică*". Urmează demonstraţia celor afirmate precum şi o notă în subsol: „*In aritmetică se consideră logaritmii ca termenii unei progresii aritmetice, iar numerele ca termenii unei progresii geometrice. Se înţelege însă că acest mod de a presenta*

logaritmii este mai puțin practic. Cu ajutorul unei prolixități mai mari se poate funda teoria elementară a logaritmilor și pe această bază"... Aici găsim încă o însemnare istorică: „*Inventatorul logaritmilor este iarăși*" (căci vorbise mai înainte de BRIGGS) *un matematician englez* NAPIER, *care a calculat logaritmii naturali sau hiperbolici sau și neperieni*". In denumirea celor două părți a unui logaritm, găsim „*caracteristica*" pentru partea întreagă nu însă și „*mantiză*" pentru care întrebuințează numai „*parte zecimală*". Formarea tablelor este explicată cu ajutorul fracțiilor continue, după care urmează o descriere amănunțită a căutării în table, fără de exemple sau indicarea tablelor de care se folosește. Ca aplicare rezolvă ecuațiile exponențiale de ordinul I ($a^x = b$) și de ordinul II ($a^{b^x} = c$).

In fine ultimul Capitol întitulat „*Cele dintâi noțiuni din teoria derivatelor*", începe cu funcțiunile de una și mai multe variabile pentru care se explică intuitiv noțiunea de continuitate relatându-se totodată și următorul fapt: „IOAN BERNOULLI *și* LEIBNIZ *au generalizat cei dintâi noțiunea de funcțiune, care mai întâi era o putere* x^m". După definirea derivatei găsim o foarte frumoasă expunere de istorie matematică: „*Studiul raportului, al relațiunilor care există între funcția primitivă și derivatele ei, formează o ramură specială și cea mai importantă a matematicilor numită calculul diferențial și integral, sau calculul infinitezimal, descoperit pe la a doua jumătatate a secolului al XVII, dela 1656 încoace. Gloria acestei descoperiri, celei mai mari în domeniul științelor teoretice, revine la doi matematicieni mari* LEIBNIZ *și* NEWTON, *cel dintâi german și al doilea englez. Fiecare din ei a făcut invenția lui independent de celălalt, plecând dela puncte de vedere diferite și amândouă metodele se complectează. Metoda lui* LEIBNIZ *este însă mai conformă naturii lucrurilor și mai productivă, de aceea și mai general întrebuințată. Numai cu ajutorul acestei științe, fizica, mecanica și astronomia s'au putut dezvolta și perfecționa*".

In calcularea derivatei funcțiunii logaritmice, deduce pe e ca limita expresiei $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ cu care ocazie remarcă:

„*Diferitele simplificări care au fost introduse mai sus prin supoziția că* e *este baza logaritmilor, precum și diferitele proprietăți ale acestei expresiuni, ca aceea de a fi egală cu derivata*

ei, fac ca această funcțiune și numărul e *însuși să fie de o importanță mare în teoria funcțiunilor*".

Ca aplicație a calculului derivatelor se rezolvă nedeterminările, stabilindu-se regula lui L'HÔPITAL. Altă aplicație apare la determinarea maximului și minimului unei funcțiuni, propunând ca un criteriu de deosebire semnul derivatei a doua. O a treia aplicație o găsim la formula lui TAYLOR: „*Această formulă fundamentală și de mare importanță în analiza matematică, descoperită de englezul* TAYLOR, *servește între altele pentru dezvoltarea funcțiunilor în serii după puterile crescătoare ale variabilelor. Demonstrația directă a ei, dată de inventatorul însăși și care pare a fi cea mai bună din multe puncte de vedere, presupune oarecari cunoștiințe de calculul diferențelor finite, care a trebuit să fie lăsată în această scurtă expunere a teoriei funcțiunilor*". BACALOGLU dă o demonstrație „*tot așa de riguroasă, mai simplă dar mai puțin directă*". Această demonstrație îi oferă din nou ocazia să facă câteva reflexii pline de spirit critic: „*Matematicienii care au simțit importanța cea mare a acestei formule, s'au grăbit a o demonstra în diferite moduri și astfel există o mulțime de demonstrații pentru aceasta. Un interes istoric prezintă demonstrația dată de* LAGRANGE, *unul din cei mai mari matematicieni francezi. Demonstrația lui însă nu este riguroasă nici generală, și de aceea astăzi este lăsată de toți, numai unii din autorii de algebre elementare o reproduc, neputând a se înălța la principiile mai sănătoase ale calculului infinitezimal.* LAGRANGE *a pretins să deducă și să fondeze pe acea demonstrație toată teoria derivatelor și a funcțiunilor și a crezut că va putea scăpa de teoria limitelor a lui* NEWTON *și a diferențialelor lui* LEIBNIZ. *De aceea a și scris două tratate: Théorie des fonctions analytiques și Leçons sur le calcul des fonctions. Teoriile lui însă au fost defectuoase și nu au putut avea nici un succes, decât numai la începutul apariții acestor tratate, care negreșit sub alte puncte de vedere au merite mari*". Din formula lui TAYLOR deduce formula lui MAC-LAURIN „*Cu toate că adevăratul inventator este* STIRLING"... și mai departe: „MAC-LAURIN *sau* STIRLING *amândoi englezi, au demonstrat-o independent de formula lui* TAYLOR". Cartea se termină cu considerațiuni asupra interpolării. După ce întrebuințează formula lui LAGRANGE autorul observă că atunci când valorile lui x formează

o progresie aritmetică, se poate aplica o formulă *„mai simplă dată mult mai înainte de* NEWTON *şi pe care se bazează şi demonstrarea directă a formulei lui* TAYLOR".

Din expunerea făcută se vede că manualul lui BACALOGLU nu lasă deloc impresia unei cărţi vechi ci prin analiza critică a unora din problemele tratate şi prin informaţiile documentate de istorie matematică, poate fi considerat ca un tratat modern. Şi chiar din primele pagini înţelegem că BACALOGLU nu a tradus, cum se obişnuia pe atunci, vre-un manual similar, ci a prezentat o lucrare personală, aşa cum însuşi o defineşte în prefaţă: *„fructul meditaţiilor de patru ani"*. Dealtfel se poate dovedi temeinicia acestei afirmaţii şi prin aceea că am putut identifica manualul după care BACALOGLU, a prelucrat cartea sa. Acest manual este:

Leçons d'Algébre par P. L. CIRODDE. *II édition. 1854.* BACALOGLU s'a folosit într'o largă măsură de acest tratat, păstrând ordinea capitolelor şi propunând diferite exerciţi şi probleme de aici. Comparând aceste două cărţi, observăm dela început spiritul critic care îl conduce pe BACALOGLU în alcătuirea manualului său. Aşa CIRODDE defineşte obiectul algebrei. BACALOGLU al matematicii în genere şi de aici Algebra ca o ramură a acestei ştiinţe. Apoi toate demonstraţiile care sunt mai greoae, la BACALOGLU le găsim simplificate sau schimbate cu totul. In unele părţi BACALOGLU schimbă ordinea paragrafelor, ca să le poată da astfel o înlănţuire mai evidentă şi în alte locuri adaogă chiar părţi noi, cum sunt numerele figurate, interpolarea etc. Deasemeni, toate privirile istorice, sau acelea de critică în legătură cu discuţiile ecuaţiilor sau definirea logaritmilor sunt proprii lui BACALOGLU. Ţinând seama şi de faptul că timpul de predare a Algebrei era numai de un an, BACALOGLU a eliminat tot ce i s'a părut de prisos, pe de o parte ca să nu *„împovăreze"* înţelegerea problemelor fundamentale şi pe de alta din cauza ororii sale înnăscute de amănunte *„care ar pierde timpul elevilor fără a le adăoga cunoştinţe noi"*. De aceea faţă de 400 pagini cât are cartea lui CIRODDE, a lui BACALOGLU (în acelaşi format) şi cu atâtea chestiuni noi, are 162 pg.

Singurile identităţi între amândouă cărţile, sunt exerciţiile şi problemele, ceea ce m'a determinat să nu insist asupra lor întrucât am căutat să pun în evidenţă în special contribuţia personală a lui BACALOGLU.

Dar s'ar putea pune întrebarea firească, de ce s'a mulţumit numai cu transcrierea exerciţiilor şi nu le-a prelucrat şi pe acestea, de vreme ce traducerea cărţii lui CIRODDE nu l'a satisfăcut?

Răspunsul apare limpede, dacă ne gândim la cultura matematică a lui BACALOGLU şi la scopul urmărit de această carte.

Se ştie că BACALOGLU a petrecut trei ani la Leipzig şi doi ani la Paris. In acest timp nu se ocupă numai cu asimilarea cunoştinţelor care nu le poate căpăta în ţară, dar ia parte efectivă la cercetările ştiinţifice care preocupau pe matematicienii timpului. Aşa BACALOGLU scrie un articol despre curbura suprafeţelor, propunând o formulă nouă pentru măsurarea acestei curburi [1]) când tot atunci RENARD reia studiul curburei medii. Cercetează proprietăţile curbelor şi suprafeţelor reciproce găsind relaţiuni noi cum face şi OSSIAN BONNET în acest domeniu; se ocupă de curbe şi suprafeţe podare ca şi DROBISCH şi WETZIG şi aşa mai departe. BACALOGLU avea o asemenea pregătire ştiinţifică încât putea rezolva el însuşi probleme de înalt caracter matematic. In compunerea cărţii de Algebră, pe BACALOGLU l-a interesat în deosebi metoda prin care să poată transpune în mintea elevilor săi, cunoştinţele matematice cu un maxim de randament. De aceea exerciţiile şi problemele care în linii generale rămân neschimbate, au exact acelaşi efect pedagogic, fie că ar fi vorba de $12x$ sau de $53x$ şi astfel nu intervine deloc necesitatea schimbării exerciţilor, care ar fi cerut numai o pierdere de timp, fără vreun folos real. Totuşi şi aici se observă un mare discernământ aşa că unele din problemele propuse de CIRODDE nu sunt trecute, iar altele sunt modificate. De ex. la pg. 216 (CIRODDE) într'o problemă de analiză nedeterminată cu monede, găsim la pg. 47 (BACALOGLU) introduse monedele noastre de atunci: sfanţi şi icosari, cu calculele corespunzătoare lor.

O singură dificultate prezintă cartea lui BACALOGLU — stilul care îngreunează mult cetirea, cartea fiind scrisă sub infuenţa directă a şcoalei latiniste. Spre ex. întâlnim: *scambare* (schimbare), *celluru-alte* (celorlalte), *cunnoscemu* (cunoaştem), *deca lu facemu* (dacă le facem), *ua* (o), *scadietorul* (scăzător), *crescementu*

---

1) A. MYLLER: 1. Curbura lui BACALOGLU: „Gazeta Matematică" 1935, Nr. 2. A. MYLLER: 2. *La courbure de* BACALOGLU. Annales sc. Iassy. 1936.

(creştere), *diumetate* (jumătate), *pre rondu* (pe rând) etc. Aceasta însă, nu i se poate imputa lui BACALOGLU, care era contimporan cu ELIADE. Din contră, am văzut la el preocuparea de a introduce o nomenclatură românească, întrebuinţând cuvinte ca *„potrivire"*, *„dezlegare"*, *„rânduire"*, etc.

Cartea lui BACALOGLU e izvorîtă din dragostea care a avut-o pentru ştiinţele matematice cu scopul *„de a deştepta interesul pentru ştiinţele exacte şi de a pune junimea studioasă în stare de a urma acest studiu mai departe şi cu succes"*.

Inainte de a termina mă simt obligată să mulţumesc D-lui Prof. A. MYLLER şi Seminarului matematic din Iaşi (unde am găsit şi manualul lui CIRODDE), pentru bunăvoinţa arătată.

FLORICA CÂMPAN
(Profesoară, Cernăuţi).

RAPORTUL COMISIUNEI

PENTRU

ACORDAREA PREMIULUI DE ALGEBRĂ AL SOCIETĂŢEI „GAZETA MATEMATICĂ"

Subsemnaţii, membri în Comisiunea, aleasă în şedinţa din 31 August 1938, pentru acordarea premiului de Algebră, avem onoarea a înainta Societăţii *Gazeta Matematică* următorul raport:

Conform regulamentului, publicat în *Gazeta Matematică* anul XLIV (Sept. 1938 p. 5), acest premiu se decerne anul acesta „autorului unor lucrări referitoare la Algebră" dintre cele publicate în *Gazeta Matematică* anul XLIII, premiatul trebuind „să fie român elev de liceu din ţară".

Mărturisim cu plăcere că alegerea noastră a fost grea, căci corespondenţii *Gazetei Matematice* sunt numeroşi, foarte harnici şi pricepuţi. Lupta între concurenţi, fără ştirea lor, a fost aprigă şi emoţionantă. La începutul cercetărilor noastre au plecat cu aceeaşi sorţi de izbândă mai mulţi, tocmai la sfârşit rămânând în frunte

cel ales: Domnul N. D. ŞTEFĂNESCU, elev al Liceului militar „N. Filipescu“ dela Mănăstirea Dealu.

Hotărîrea noastră este bazată pe consideraţiile care urmează:

D-lui a dat soluţii la următoarele probleme de Algebră rezolvate în *Gazeta Matematică* anul XLIII: 4385 (pag. 596), 4599 (pag. 430), 4661 (pag. 157), 4733 (pag. 322), 4802 (pag. 106), 4862 (pag. 220), 4875 (pag. 273).

Menţionăm un exerciţiu de Geometrie Analitică (pag. 333) care se poate încadra foarte bine şi în domeniul Algebrei.

Pe copertele numerelor *Gazetei Matematice* anul XLIII D-lui are 32 probleme rezolvate.

La Concursul *Gazetei Matematice* ţinut în zilele de 28, 29 şi 30 Aprilie 1938 a fost clasificat primul.

„La toate probele acest candidat a fost notat cu nota cea mai mare: la lucrările scrise pentru siguranţa atât a calculului cât şi a judecăţii, iar la probele orale pe lângă aceste însuşiri pentru numeroasele cunoştinţi pe care le stăpâneşte şi le mânueşte cu uşurinţă“. (*Gazeta Matematică* Iunie 1938, pag. 506). Cu sufletul adânc îndurerat am transcris aceste aprecieri ale Marelui Profesor G. ŢIŢEICA, prin moartea căruia Societatea *Gazeta Matematică*, ţara noastră şi lumea întreagă încearcă o pierdere imensă. Ne închinăm memoriei lui cu adâncă pietate şi recunoştinţă veşnică.

De altfel D-l N. D. ŞTEFĂNESCU a obţinut dela Soc. *Gazeta Matematică* cărţi din fondul «LT.-COL. GH. A. TĂNĂSESCU» (*Gazeta Matematică* Sept. 1937, pag. 27).

De aceea avem onoare de a propune Societăţei *Gazeta Matematică* acordarea premiului de Algebră, în valoare de 5000 lei Domnului N. D. ŞTEFĂNESCU.

MEMBRII COMISIUNEI PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE ALGEBRĂ

P. SERGESCU, TH. ANGHELUŢĂ, D. STAN.

Acest raport s'a citit şi aprobat în şedinţa Adunării generale din 23 Februarie 1939.

NOTE MATEMATICE

34. *Publicarea operei matematice a lui* GHEORGHE ȚIȚEICA. Secțiunea Științifică a Academiei Române, în ședința sa dela 28 Aprilie, și-a exprimat dorința ca operile matematice ale ilustrului matematician Român, GHEORGHE ȚIȚEICA, să fie publicate de către Academia Română. O comisiune compusă din D-nii I. IONESCU, O. ONICESCU, D. POMPEIU și V. VÂLCOVICI a fost însărcinată cu pregătirea acestei publicațiuni.

Țin să adaog că imediat după moartea lui ȚIȚEICA, fiul său, D-l RADU ȚIȚEICA, împreună cu fostul lui elev, D-l GHEORGHE TH. GHEORGHIU au început să adune operile matematice originale ale Profesorului ȚIȚEICA, ceea ce înlesnește, și poate grăbi publicarea acelor opere.

I. IONESCU.

35. *Acum o sută de ani în lumea matematică.* (Date culese în Biblioteca Seminarului Matematic din publicațiile timpului).

Anul 1839, păstrând natural continuitatea desvoltării științelor matematice, apare față de anul precedent mai bogat în producțiuni importante și mult mai interesant prin varietatea preocupărilor geometrilor.

Numărul revistelor de specialitate, în fruntea cărora stau „*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*“ (Vol. 8 și 9), „*Journal für die reine und angewandte Mathematik*“ (*Crelle's* Journal, Vol. 19), „*Journal de Mathématiques pures et appliquées*“ (Journal de *Liouville*, Vol. IV) și „*Journal de l'Ecole Polytechnique*“ (caietul 27, Vol. XVI), crește. E anul apariției Vol. I a celei mai importante reviste matematice din Anglia „*Cambridge Mathematical Journal*“, editat de D. F. GREGORY și R. LESLIE ELLISS (Vol. I—IV, 1839—1845). Acesta e urmat de „*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*“ (Vol. V—XIII, 1846—1854), editat de W. THOMSON și N. M. FERRERS, devenind dela 1855 „*The Quaterly Journal of pure and applied mathematics*“ sub redacția lui J. J. SILVESTER, N. M. FERRERS și J. W. L. GLAISHER. Jurnalul conține, în primii cincizeci de ani dela apariție, lucrările

matematicienilor CAYLEY, BOOLE, BOOTH, BRIOSCHI, DE MORGAN, SPOTTISWOODE, STOKES, COCKLE, MAXWELL, WALKER, ş. a., printre care figurează natural şi editorii.

Scopul apariţiei jurnalului e dat în prefaţă. Citäm liber: „Ni s'a arătat în mai multe rânduri amărăciunea produsă de lipsa unei reviste destinată lucrărilor numai cu caracter matematic... Aici (In Cambridge), vom putea găsi mulţi colaboratori activi... Scopul nostru este să publicăm, în primul rând, lucrări originale şi, în al doilea, traduceri — eventual prescurtate — ale memoriilor importante apărute pe continent, contribuind astfel la o cât mai largă răspândire a adevărurilor ştiinţifice..."

Astăzi, o bună parte din primele volume ale revistei poate servi ca izvor de exerciţii de geometrie analitică, algebră şi calcul diferenţial şi integral studenţilor secţiunilor noastre de matematici.

Creaţia matematică în Franţa e mult înviorată graţie reîntoarcerii în patrie a lui A. CAUCHY. In Germania, la Göttingen, GAUSS publică o lucrare fundamentală întitulată: „*Teoreme generale asupra forţelor atractive şi repulsive care acţionează în raport invers cu patratul distanţelor*" (Vol. IV din „*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*", Leipzig, Weidmann'sche Buchhandlung) — originea teoriei sistematice a potenţialului. Studiile istorice îşi găsesc un impuls puternic în opera „*Histoire des Sciences Mathématiqus en Italie*" (Jules Renouard, Paris), începută în 1838 de G. LIBRI — acest pasionat al cărţilor şi al manuscriselor până la necorectitudine — şi prin descoperirea, făcută de el, a unei părţi importante din opera lui FERMAT.

In decursul anului publică următorii geometri: ARAGO, BINET, BRIANCHON, CATALAN, CAUCHY, CHASLES, DIRICHLET (seriile care-i poartă numele), DUHAMEL (criteriul de convergenţă carei-i poartă numele), GAUSS, GREEN, GUDERMANN, HAMILTON, IMBERT, JACOBI, KUMMER, LAMÉ, LIBRI, LIOUVILLE, LE VERRIER, MINDING, OLIVIER, OSTROGRADSKY, RAMUS, SCHÖNEMANN, STURM, TERQUEM ş. a. In numerele viitoare vom reveni asupra lucrărilor mai importante.

D. M.

(Seminarul Matematic, Iaşi).

36. *Numere interesante de 10 cifre diferite* [1]). 1°. Pe lângă soluţiunile găsite la pag. 413, Vol. XLIII, de D-l G-L GH. BUICLIU pentru $p = 3$ şi N_3 începând cu 2, am mai găsit încă următoarele 72 soluţiuni ale ecuaţiei:

$$p \times N_p = N$$

N_3	N	N_3	N
204 859 761	0 614 579 283	249 876 051	0 749 628 153
204 985 761	0 614 957 283	250 489 761	0 751 469 283
205 798 416	0 617 395 248	250 498 761	0 751 496 283
205 849 761	0 617 549 283	250 987 146	0 752 961 438
205 974 861	0 617 924 583	251 049 876	0 753 149 628
205 978 416	0 617 935 248	254 061 798	0 762 185 394
205 984 761	0 617 954 283	254 618 097	0 763 854 291
206 157 984	0 618 463 952	254 860 971	0 764 582 913
206 159 784	0 618 479 352	256 041 798	0 768 125 394
206 578 194	0 619 734 582	256 041 978	0 768 125 934
206 581 794	0 619 745 382	256 179 804	0 768 539 412
206 594 178	0 619 782 534	256 197 804	0 768 593 412
207 145 986	0 621 437 958	260 541 798	0 781 625 394
208 597 146	0 625 791 438	260 897 145	0 782 691 435
208 614 597	0 625 843 791	260 987 145	0 782 961 435
208 649 571	0 625 948 713	261 048 975	0 783 146 925
209 465 718	0 628 397 154	261 450 987	0 784 352 961
209 586 471	0 628 759 413	261 798 054	0 785 394 162
209 714 586	0 629 143 758	270 856 491	0 812 569 473
209 715 846	0 629 147 538	270 865 491	0 812 596 473
209 857 146	0 629 571 438	271 465 089	0 814 395 267
210 475 986	0 631 427 958	271 645 089	0 814 935 267
210 859 647	0 632 578 941	274 891 065	0 824 673 195
214 608 597	0 643 825 791	278 906 514	0 836 719 542
214 609 857	0 643 829 571	279 180 564	0 837 541 692
215 846 097	0 647 538 291	280 564 179	0 841 692 537
215 970 846	0 647 912 538	280 654 179	0 841 962 537
216 057 984	0 648 173 952	287 164 509	0 861 493 527
217 604 598	0 652 813 794	287 491 065	0 862 473 195
217 806 594	0 653 419 782	287 906 514	0 863 719 542
218 065 794	0 654 197 382	289 047 651	0 867 142 953
219 657 804	0 658 973 412	289 064 751	0 867 194 253
245 618 097	0 736 854 291	290 865 471	0 872 596 413
245 619 807	0 736 859 421	291 048 765	0 873 146 295
248 561 097	0 745 683 291	291 465 087	0 874 395 261
248 976 051	0 746 928 153	291 645 087	0 874 935 261

2°. Din tabelul dela pag. 415 Vol. XLIII trebue eliminat grupul

$$3 \times 278190651 = 0834571953$$

care nu este soluţie având la N cifra 3 întrebuinţat de 2 ori.

STELIAN CETĂŢEANU.

1) Urmare la Nota dela pag. 414, Vol. XLIV, *« Gazeta Matematică »*.

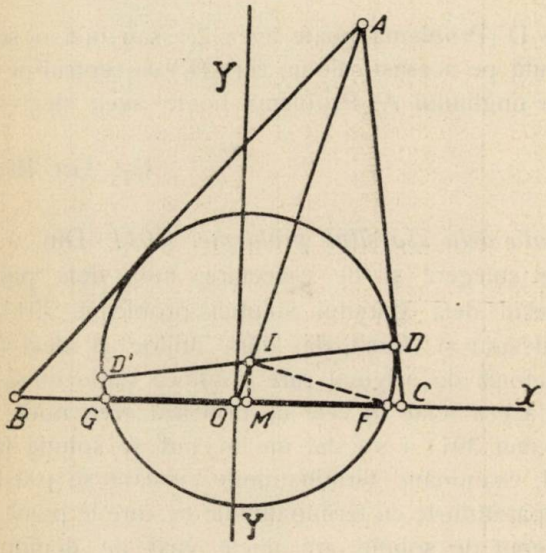
37. *O problemă de construcție.* Problema pe care am tratat-o în nota cu acest titlu la pag. 358, Vol. XLIV, îmi sugerează încă următoarea problemă:

In unghiul BAC *al triunghiului* ABC *să se înscrie un cerc care să intercepteze pe latura* BC *un segment* FG *de lungime dată egală cu* $2b$.

Voiu da acestei probleme o soluție analitică. Fie O intersecția lui BC cu bisectoarea AI. Iau pe OC ca axă de x și perpendiculara Oy pe BC ca axă de y. Notez cu I centrul cercului căutat și fie

$$y = ax$$

ecuația dreptei OA.



Fie încă:

$$I(\lambda,\ a\lambda)\quad ,\quad M(\lambda,\ o)\quad ,\quad C(c,\ o)$$

M fiind proiecția lui I pe BC.

Din triunghiul FMI se scoate

$$\overline{IF}^2 = a^2\lambda^2 + b^2.$$

Ecuația cercului căutat este deci

$$(x-\lambda)^2 + (y-a\lambda)^2 = a^2\lambda^2 + b^2$$

$$\therefore \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2a\lambda y + \lambda^2 - b^2 = 0. \qquad (1)$$

Duc în cercul I diametrul DD' perpendicular pe AC şi caut locul punctelor D, D' când λ variază. Ecuaţia dreptei DD' fiind

$$y - a\lambda = m(x - \lambda) \qquad (2)$$

locul punctelor D, D' se obţine eliminând pe λ între (1) şi (2), eliminare uşor de făcut. Rezultatul acestei eliminări este conica

$$a^2x^2 - 2axy + (m^2 - a^2 + 1)y^2 + 2am(a - m)x - b^2(a - m)^2 = 0.$$

Intersecţiile acestei conice cu dreapta CA, de ecuaţie

$$y = -\frac{1}{m}(x - c)$$

dă punctele D. Problema poate avea 2,1 sau nici o soluţie.

Se caută pe aceeaşi cale un cerc (I') cu centrul pe bisectoarea exterioară a unghiului A. Problema poate avea deci maximum 4 soluţiuni.

G-L. GH. BUICLIU.

38. *Nota dela sfârşitul problemei 3911.* Din o regretabilă greşeală de culegere şi de corectare, nota dela pag. 434 din numărul trecut dela sfârşitul soluţiei problemei 3911, a apărut numai cu început şi sfârşit, dar fără mijloc şi deci fără înţeles. Probabil că foaia de original care conţinea mijlocul s'a rătăcit pe undeva. De aceea refac în cele ce urmează acea notă.

Problemei 3911 i s'a dat un început de soluţie la pag. 468, Vol. XXXVI, examinând terminaţiunile cu care se pot termina un cub şi comparându-le cu terminaţiunile pe care le poate avea suma E. Acel început de soluţie are unele vicii de demonstraţie şi a condus şi la un rezultat falş, dând soluţia

$$n = 1 \quad , \quad E = 0 = 0^3$$

ca şi cum 0 ar fi un cub perfect.

Rezultatul este cu totul altfel

$$n = 0 \quad ; \quad E = -1 = (-1)^3$$

după cum s'a văzut la pag. 433, din numărul trecut.

Metodele de particularizare în rezolvarea problemelor de matematici nu sunt în general recomandabile.

In cazul problemelor ca 3911 ele sunt de înlăturat dela început, pentru că însuşi enunţul cere un rezultat general. De altfel problema se poate extinde, cerându-se valorile întregi ale lui n pentru care expresiunea

$$E = an^2 - bn - a + b$$

este o putere oarecare m ştiind că a şi b sunt numere întregi.

Soluţia acestei extinderi se obţine urmând cuvânt cu cuvânt demonstraţia dela pag. 433. Se găseşte că:

$$n - 1 = du \quad , \quad an + a - b = dv$$

u şi v fiind prime între ele, iar d cel mai mare divizor comun al numerelor $n - 1$, $an + a - b$, deci d^2, u, v trebue să fie puteri de exponent m. Mai mult d trebue să fie un divizor al lui $2a - b$.

Se aleg deci între divizorii lui $2a - b$ pe aceea ale căror patrate sunt şi o putere a lui m şi se ajunge la rezolvarea în numere întregi a unei ecuaţiuni de forma

$$(1) \qquad ax^m + p = y^m$$

unde

$$u = x^m \quad , \quad v = y^m \quad , \quad 2a - b = pd.$$

Aplicaţiune. In cazul problemei 3911 avem

$$a = 8 \quad , \quad b = 7 \quad , \quad d = 1, \quad , \quad m = 3 \quad , \quad p = 9$$

aşa că ecuaţia (1) devine

$$8x^3 + 9 = y^3$$

care a fost rezolvată la pag. 433.

G-L GH. BUICLIU.

39. *O menţiune a lucrării lui* N. ST. BOTEŞU. Despre acest inginer şi matematician autodidact, dar talentat, am scris în *Gazeta Matematică* Anul XL, pag. 337. De curând l'am mai găsit citat în:

E. CATALAN. *Sur la constante de* EULER *et la fonction de* BINET. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris,* 21 Juillet 1873).

A. MYLLER.

BIBLIOGRAFIE

Artă şi technică grafică. Buletinul Imprimeriilor Statului. Caietul 7. Martie—Iunie 1939. Bucureşti.

Boletin Matematico. Anul XII. Nr. 1. Martie 1939. Buenos-Aires. Asupra insumării seriilor de M. O. GONZALES, condiţiuni suficiente în problemele ordinare de calculul variaţiunilor de G. M. EWING.

Idem. Anul XII. Nr. 2. Martie 1939. Buenos-Aires. Incă o observare la nota 17 din „Bol. Mat". Anul IX de A. MOESSNER, Teorema lui MENELAU, dedusă din teorema lui CEVA de M. O. GONZALEZ.

Buletinul Societăţii Politecnice din România. Bucureşti. Anul LIII. Nr. 2. Februarie 1939. † GH. ŢIŢEICA (viaţa şi opera) de N. CIORĂNESCU.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 45. Nr. 3. Martie 1939. New-York.

Bulletin Scientifiques de L'école Polytéchnique de Timişoara. Tom 8. Fasc. 3—4. 1939.

Solution analytique du problème des oscilations amortisées de V. ALACI, Sur le théorème de FEUERBACH de V. THÉBAULT, Sur des fonctions Hypergeométriques confluentes de GH. TH. GHEORGHIU, Sur une probleme de Mécanique de M. GHERMĂNESCU, The cosmogonical problem of the annihilation of the sun's mass, and the evolution of the evolution of the planetary orbits de T. VESCAN, Sur l'unité de la physique théorique de JEAN-LOUIS DESTOUCHES, L'intégration des Fonctions quadratiques de V. ALACI, Notes sur la géométrie du triangle de VINCENZO G. CAVALLARO, Sur la variation du moment d'inertie par raport aux plans pasant par une droite de M. GHERMANESCU, Sur les reseaux à invariants égaux de GH. TH. GHEORGHIU.

Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique Roi Carol II. Bucarest. IX Année (1937—1938). No. 1, 2, 3. Bucureşti. Sur un problème de J. BERTRAND, par PAUL MONTEL. Sur un théorème de M. D. POMPEIU, par A. ANGELESCO. Elementarer Beweis eines planimetrischen Satzes des Herrn D. POMPEIU, von A. HOBORSKI. Sur un théorème de M. D. POMPEIU, par D. GERMANI. Sur l'exagone à cotés consecutifs rectangulaires, par V. THÉBAULT. Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois cotés, par V. THÉBAULT. Sur la réciproque d'un théorème relatif au triangle équilatéral, par E. ABASON. Sur un théorème de M. D. POMPEIU, par C. POSTELNICESCO. Sur une généralisation des surfaces isothermo-asymptotiques, par AL. PANTAZI. Un théorème d'existence, par D. POMPEIU. Sur les fonctions à deux variables, par N. OBRECHKOFF. Une démonstration nouvelle du théorème: Une fonction, dont la dérivée est nulle dans un intervalle, a la même valeur dans cet intervalle, par TH. ANGHELUTZA. Deux équations fonctionelles et quelques propriétés de certains coniques, par N. CIORANESCU. Sur l'équation

fonctionelle de POINSOT, et autres équations analogues, par D. POMPEIU. Sur la généralisation de l'urne de BERNOULLI, par O. ONICESCU et G. MIHOC. Le problème de l'autoréducteur à l'horizon, par V. VÂLCOVICI. I. Note sur les formules de M. E. ABASON pour l'Analyse harmonique des fonctions de période quelconque, par la méthode des discontinuités. II. Sur l'article de M. ABASON. „Sur le coefficient de déformation d'une fonction non sinusoïdale", par A. T. POPESCO. Sur l'application de la méthode des discontinuités à l'analyse harmoniques des fonctions sinusoïdale, par A. T. POPESCO. Note sur l'article de M. AL. GUTZU. „Une comparaison des différentes méthodes de quadrature par approximation", par A. T. POPESCO. Un cas particulier des lignes algébriques, par S. S. STEFANESCO, Stirnabflachung rechteckiger Wanderwellen auf Kraftübertragungsleitungen, von R. RĂDULEȚ. La contreréaction ou réaction négative, par M. MARINESCO. Die Bestimmung des wirtchaftlichen Querchnites für offene Kanäle und Druckleitungen, von D. PAVEL. Beitrag zur Bestimmung der günstigsten Anzahl Maschineninheiten einer Wasserkraftanlage, von D. PAVEL. Sur les vitesses ultrasoniques, par I. LINTEȘ. Essai d'une théorie générale d'une classe de courbes de transition pour les raccordements progressifs, par E. TURRIÈRE. Sur les raccordements progressifs à centre conservé, par E. TURRIÈRE. Problème du tracé elliptique des routes par A. COSTĂCHEL. Fête en l'Honneur des M-rs les Professeurs A. G. IOACHIMESCO et GR. STRATILESCO.

Journal de Mathématiques élementaires. Anul 63. Nr. 13. 1 Aprilie 1939. Paris.

Idem. Anul 63. Nr. 14. 15 Aprilie 1939. Paris.

Mathesis. Tom. LIII. Nr. 3. Martie 1939. Bruxelles.

Exercices d'analyse (urmare) de J. LEEMANS, Polarités planes harmoniques à une homographie plane non homologue de R. DEAUX, Sur certaines fonctions de trois nombres complexes d'égal module, de R. GOORMAGHTIGH.

Mathematica. Vol. XIV. Cluj 1938. Sur le prolongement analytique de WEIERSTRASS, par A. DENJOY. Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints, par W. SIERPINSKI. Sur les fonctions conjuguées, par M. NICOLESCO. Sur les séries de puissances, par J. MARCINKIEWICZ et A. ZYGMUND. Sur les noyaux associés à certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, par D. MANGERON. Un théorème sur l'interpolation, par J. MANCINKIEWICZ. Die Mannigfaltigkeit von PERAZZO als Projektion der SEGRESCHEN Mannigfaltigkeit M_4^6, von E. A. WEISS. Sur les solutions bornées et les solutions mesurables de certains équations fonctionelles, par T. POPOVICIU. Über das Verhalten der Funktionen von zwei complexen Veränderlichen in Gebiten mit einer ausgezeichneter Raundfläche, von S. BERGMANN. La relativité non holonome et la théorie unitaire d'EINSTEIN et MAYER par K. YANO. Sur les invariants de translation relatifs aux polynomes, par G. CALUGARÉANO. Sull'equilibrio delle piastre anulari libere, di CARLO TOLLOTTI. Contributi dati dall'Italia alle matematiche pure, dai tempi più remonti ai giorni nostri, di GINO LORIA. Sur le

fonctions de deux variables réelles données d'analycité hyperboliques et leurs applications, par N. CIORANESCO. Sur certains cas d'univalence ou de multivalence locales, par P. MONTEL. Sur la puissance de la famille de tous les ensembles fermés d'un espace métrique, par W. SIERPINSKI. Bibliographie mathématique roumaine. 1937.

*

Bibliografia de care se vorbeşte aci este precedată de un apel în limba franceză pe care îl dăm aci în traducere română:

„Redacţia **„Matematicei"** a decis să încerce publicarea unei *Bibliografii matematice române*. Scopul acestei Bibliografii este de a da o privire sumară asupra lucrărilor făcute în România în toate ramurile matematicilor pure şi aplicate, şi de a servi, — după ani de publicaţie, — ca archivă pentru o istorie a ştiinţelor în România.

„O asemenea lucrare prezintă, neapărat, lipsuri cu toată grija noastră de a da informaţiuni complecte şi exacte. Cerem ertare dela început.

„Noi reînoim rugămintea noastră către toţi matematicianii români de a ne uşura sarcina. În adevăr, în Noemvrie 1936, noi am trimis o scrisoare circulară rugând pe compatrioţii noştri să ne trimeată un *Extras* din scrierile lor, sau, — mai bine, — rezumate pe care le vom publica aşa cum le vom primi. Căci, nimeni nu ştie mai bine ca autorul să rezume ideile fundamentale ale scrierilor sale. Din nefericire, nu am primit, — pentru 1937, nici chiar *o zecime* din răspunsurile necesare pentru bibliografia aci alăturată. A trebuit să răscolim colecţiile, pe care le aveam în biblioteci, pentru a găsi articolele datorite românilor.

„Poate, îndoiala asupra reuşitei iniţiativei noastre a împiedicat pe compatrioţii noştri ca să răspundă la apelul făcut. După prima încercare, pentru 1937, reînoim rugămintea noastră: să ni se trimită rezumatul fiecărui articol, cu indicarea bibliografică; sau, cel puţin, autorii să ne semnaleze articolele, ca noi să putem însărcina pe cineva ca să facă rezumate scurte. Bibliografia nu cere de loc clasificări, judecăţi critice, etc. Ea se mărgineşte exclusiv la un oficiu de informaţii obiective, — şi pe cât este posibil, — exacte. Cărţile de învăţământ secundar nu se vor cita.

„Sperăm ca să putem da în Volumul XV din *Mathematica*, Bibliografia matematică română pentru 1938.

„Viitorul ne va arăta dacă încercarea noastră poate fi continuată, sau dacă nu avem norocul de a reuşi".

*

Gazeta Matematică se uneşte la apelul făcut de Comitetul de Conducere al Revistei *Mathematica*, iar din partea mea spun membrilor acelui Comitet: *„Nu vă lăsaţi!"*.

ION IONESCU.

Pitagora. Anul IV. Nr. 7. Aprilie 1939. Arad. Asupra unei probleme de geometrie elementară de P. BOLDESCU, Teorema lui KARIYA de C. COŞNIŢĂ.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIX. Nr. 2. 15 Aprilie 1939, Trigonometria patratică de V. ALACI.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXV. Nr. 1. Ianuarie — Martie 1939. Iaşi. Profesorul G. ŢIŢEICA de ILIE I. POPA.

Ştiinţă şi Progres. Anul V. Nr. 7—8. Martie—Aprilie 1939. Târgu-Mureş. Asupra cercurilor ortogonale de N. N. MIHĂILEANU, Ecuaţii pseudo-bipatrate şi pseudo-reciproce de gradul al patrulea de I. V. MĂTIEŞ.

E. ABASON. *Notice sur l'analyse des harmoniques des fonctions périodiques par la méthode des discontinuités.* Bucureşti 1938.

E. ABASON. *Sur quelques propriétés des polygones au centre de gravité et leurs application à la Physique.* (Extras din *Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des sciences*). Bucureşti 1938.

E. ABASON. *Sur une propriété du triangle équilateral.* (Extras din *Bulletin de mathématiques et de physique pures et apliquées de l'École Polytechnique Roi Carol II. Bucarest*). Bucureşti.

E. ABASON. *Un théorème de géométrie.* (Extras din *Bulletin de mathématiques et de physique pures et apliquées de l'École Polytechnique Roi Carol II. Bucarest*). Bucureşti.

E. ABASON. *Propriétés des triangles au même centre de gravités.* (Extras din *Bulletin de mathématiques et de physique pures et appliquées de l'École Polytechnique Roi Carol II. Bucarest*). Bucureşti.

CERERI

284. Se poate stabili o diferenţă certă între sensul cuvintelor *volum, tom* şi *broşură* aplicată cărţilor de diferite mărimi?

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

E. BACALOGLU. Elemente de Algebră, pentru usul şcoalelor secundare. Ediţia a doua. Bucureşti 1870.

Donată de către *Seminarul Matematic Universitar.* Iaşi.

H. SONNET. Problèmes et exercices d'Arithmétique et d'Algèbre. Première Partie. Enoncée. Paris 1858.

Deuxième Partie. Solutions raisonnées. Paris 1858.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. J. S. MACKAY. Recenzia cărţii lui: Plane Geometry, practical and theoretical. (Extras din L'Enseignement mathématique. Geneva 1905).

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

I. Intre rezolvitorii problemei 4542 publicată la pag. 542, XLII, trebue trecuți și următorii : C-TIN N. GAVRILESCU, MIRCEA-LEONTE A. NEGREA, TUDOR STOICESCU, SERGIU TARASIUC, VILHELM CSEKE.

II. Intre rezolvitorii problemei 4554 publicată la pag. 590, XLII, trebue trecuți și următorii: V. I. C. VISARION, MIRCEA-LEONTE A. NEGREA, D. I. LEBĂDĂ, VICTOR D. ENĂȘESCU, AUREL I. CORNĂȚEANU, MIHAIL M. CHIRIȚĂ, GRIGORE MARTEȘ, VASILE CEAUȘESCU, MARCEL F. AMĂRĂȘTEANU, I. ȘT. NICOLESCU, VILHELM CSEKE.

PROBLEMA 1384. *Se dă un cerc* O, *o dreaptă* Δ, *un punct* M *și tangentele* AB, AC *la* O. *Să se ducă dreapta* MDE, *care taie pe* AB *și* AC *în* D *și* E *așa ca mediana ce pleacă din* A *în triunghiul* ADE *să taie cercul în punctul* F, *în care ducând o tangentă să taie pe* MDE *la intersecția acesteia cu* Δ.

N. PROFIRI.

Să luăm ca axe de coordonate: dreapta OA ca axa OX și perpendiculara pe OA trecând prin O ca axă OY; fie în acest caz $A(a, o)$; $M(m, n)$. Fie A' mijlocul lui $\overline{DE}$, $F(x_1, y_1)$ punctul unde AA' taie cercul O, corespunzând problemei; r raza cercului O; α, β cosinusurile directoare ale direcției MDE; apoi pe dreapta MDE, punând

$$\overline{MD} = \rho_1 \quad , \quad \overline{ME} = \rho_2 \quad , \quad \overline{MA'} = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$$

și

$$ux + vy + w = 0$$

ecuația dreptei date Δ. Ecuația cercului O fiind:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0, \tag{1}$$

avem condițiunea:

$$x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0; \tag{2}$$

deci pentru determinarea punctului F corespunzător problemei mai este necesar să determinăm încă o relație între coordonatele lui.

Dacă $P(x_0, y_0)$ este un punct oarecare al cercului O, ecuaţiunea tangentei la cerc în acest punct este:

$$x_0x + y_0y - r^2 = 0 \quad , \quad x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0. \tag{3}$$

Pentru ca tangentele să treacă prin A, trebue să avem:

$$x_0 = \frac{r^2}{a} \quad , \quad y_0 = \pm \frac{r}{a}\sqrt{a^2 - r^2},$$

punctul A fiind exterior cercului O.

Avem deci ecuaţiunile tangentelor AB, AC, anume:

(AB) $rx + \sqrt{a^2 - r^2}\, y - ra = 0$; (AC) $rx - \sqrt{a^2 - r^2}\, y - ra = 0$

sau încă, punând $\sqrt{a^2 - r^2} : r = b$, sub forma:

$$\text{(AB)}\ x + by - a = 0 \ \text{şi}\ \ \text{(AC)}\ x - by - a = 0. \tag{4}$$

Apoi, avem pentru ecuaţiunea dreptei AN:

$$\text{(AN)}\ \ (x_1 - a)\, y - y_1 (x - a) = 0; \tag{5}$$

iar pentru punctele D, E, A′ depe dreapta MDE, respectiv:

$$\begin{gathered} D(m + \rho_1\alpha,\ n + \rho_1\beta) \ ; \ E(m + \rho_2\alpha,\ n + \rho_2\beta); \\ A'\left(m + \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\alpha,\quad n + \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\beta\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Scriind că aceste puncte se găsesc respectiv şi pe dreptele AB, AC, AF avem relaţiunile:

$$\left\{\begin{array}{l} m + \rho_1\alpha + b(n + \rho_1\beta) - a = 0 \\ m + \rho_2\alpha - b(n + \rho_2\beta) - a = 0 \\ (x_1 - a)\left(n + \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}\beta\right) - y_1\left(m + \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}\alpha\right) = 0. \end{array}\right. \tag{7}$$

Punând pentru prescurtare:

$$m - a = p \tag{8}$$

şi înlocuind primele două relaţiuni prin suma şi diferenţa lor, avem sistemul echivalent:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(\rho_1 + \rho_2) + b\beta(\rho_1 - \rho_2) + 2p = 0 \\ \alpha(\rho_1 - \rho_2) + b\beta(\rho_1 - \rho_2) + 2bn = 0 \\ [\beta(x_1 - a) - ay_1](\rho_1 + \rho_2) + 2[n(x_1 - a) - py_1] = 0 \end{array}\right. \tag{10}$$

între care eliminând pe $(\rho_1 + \rho_2)$ şi $(\rho_1 - \rho_2)$ avem condiţiunea:

$$(\alpha^2 - b^2\beta^2)[n(x_1 - a) - py_1] - [\alpha p - b^2 n\beta].[\beta(x_1 - a) - \alpha y_1] = 0. \tag{12}$$

In ipoteza $\alpha \neq 0$, punând $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, avem condiţiunea (12) subt forma:

$$\boxed{b^2 p y_1 \lambda^2 - [p(x_1 - a) + b^2 n y_1]\lambda + n(x_1 - a) = 0} \quad . \quad (12')$$

Dar punctul F a fost astfel luat ca tangenta în F la cercul O

$$(FT) \quad x x_1 + y y_1 - r^2 = 0 \quad , \quad x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0 \qquad (13)$$

şi cu dreptele:

$$(\Delta) \quad ux + vy + w = 0 \quad \text{şi} \quad (MDE) \quad \beta x - \alpha y - \beta m + \alpha n = 0$$

să fie trei drepte concurente, adică astfel ca:

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ x_1 & y_1 & -r^2 \\ \beta & -\alpha & -\beta m + \alpha n \end{vmatrix} = 0; \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} u & v & w \\ x_1 & y_1 & -r^2 \\ \lambda & -1 & -m\lambda + n \end{vmatrix} = 0 \qquad (14)$$

care dă pentru λ valoarea:

$$\lambda = \frac{(nv + w)x_1 - nuy_1 + ur^2}{mvx_1 - (mu + w)y_1 - vr^2} \qquad (15)$$

pe care introducând-o în relaţia (12') obţinem a doua relaţiune care leagă coordonatele punctului F căutat, anume:

$$\boxed{\begin{aligned} & b^2 p y_1 [(nv+w)x_1 - nuy_1 + ur^2]^2 - [p(x_1 - a) + b^2 n y_1] \\ & \quad [(nv+w)x_1 - nuy_1 + ur^2][mvx_1 - (mu+w)y_1 - vr^2] \\ & + n(x_1 - a)[mvx_1 - (mu + w)y_1 - vr^2]^2 = 0 \end{aligned}} \quad . \quad (16)$$

Intersecţia acestei cubice cu cercul $x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0$ dă punctele F de pe cerc care răspund problemei. In cazul când sistemul n'are soluţiuni reale, problema este imposibilă. Cazul excepţionat pentru valabilitatea calculului ($\alpha = 0$), este totuşi cuprins în rezultat dacă considerăm pentru λ valoarea ∞.

Pentru a avea cu siguranţă soluţiuni este suficient ca între parametrii problemei să existe o relaţie care să arate că această cubică (16) trece printr'un punct interior cercului dat. In cazul particular pentru ca cubica să treacă prin origină, trebue ca să avem:

$$ar^4 v(pu + nv) = 0,$$

sau, observând ca a şi r sunt diferiţi de zero, că

$$v(pu + nv) = 0 \qquad (17)$$

şi *reciproc.*

— Dacă luăm $v=0$, adică cazul particular al dreptei Δ perpendiculară pe OA, avem în acest caz cel puţin două soluţiuni ale problemei.

— Dacă luăm $pu + nv = 0$, sau $\frac{n-o}{m-a} = -\frac{u}{v}$, adică dacă avem cazul particular când dreapta Δ este paralelă dreptei MA, deasemenea problema admite cel puţin două soluţiuni.

Condiţiunea (17) prin urmare particularizează poziţiunile dreptei Δ; dar obţinem asemenea cazuri particulare interesante particularizând poziţiunea punctului M.

1. Să presupunem, de exemplu, $p = 0$ $(m = a)$, adică dreapta MA $\perp$ OA; în acest caz cubica (16) se descompune în *o dreaptă* şi *o conică* şi deci intersecţia se reduce la aceea a unui cerc cu o dreaptă şi aceea a unui cerc cu o conică. Se poate însă alege n şi poziţia dreptei Δ astfel ca să se reducă conica la un cerc.

2. Dacă presupunem că $n=0$, adică punctul M aparţine dreptei OA, şi în acest caz cubica se descompune într'o *dreaptă* şi *o conică* şi discuţiunea ca şi în cazul particular precedent este imediată.

Punctul M nu poate coincide cu A, adică $p = 0$, $n = 0$, problema nu are loc, ceea ce este pus în evidenţă şi pe cale analitică din faptul că ecuaţiunea cubicei dispare complect.

Dacă punctul M se găseşte în centrul cercului O, conica din acest caz este o iperbolă echilateră cu asimptotele paralele cu axele de coordonate.

3. Pot fi obţinute alte cazuri particulare interesante, impunând cubicei condiţiunea ca să prezinte un punct dublu. In acest caz cubica fiind unicursală, determinarea punctelor F se reduce la determinarea dreptelor trecând prin punctul dublu şi prin punctele F corespunzătoare problemei. In cazul când punctul dublu îl luăm să fie chiar origina (centrul O), condiţiunile se simplifică foarte mult şi sunt susceptibile de interpretări geometrice, particularizând poziţia punctului M şi a dreptei Δ; fie numai a dreptei Δ.

D-l G. G. CONSTANTINESCU (student Bucureşti) a dat o soluţiune analitică aproape complectă, folosind ca axe de coordonate chiar tangentele AB şi AC. D-l MARIUS MARGULIUS a încercat să dea o soluţiune cu ajutorul diviziunilor homografice.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 1948. k *fiind un număr prim cu 2, 3 şi 5, să se demonstreze că expresiunea:*

$$k^4 (k^{144} - k^{140} - 1) + 1$$

e divizibilă prin 720.

A. ANAGNOSTE.

De oarece

$$720 = 2^4 . 3^2 . 5$$

este destul a arăta că expresiunea dată se divide prin fiecare din numerele 2^4, 3^2, 5.

Expresiunea dată se scrie succesiv

$$E = (k^4 - 1)(k^{144} - 1)$$

$$E = (k-1)(k+1)(k^2+1)(k^9-1)(k^9+1)(k^{18}+1)(k^{36}+1)(k^{72}+1)$$

şi fiindcă

$$k^9 - 1 = (k-1)(k^2+k+1)(k^6+k^3+1)$$

$$k^9 + 1 = (k+1)(k^2-k+1)(k^6-k^3+1)$$

rezultă

$$E = (k-1)^2 (k+1)^2 (k^2+1)(k^2-k+1)(k^2+k+1)$$
$$(k^6-k^3+1)(k^6+k^3+1)(k^{18}+1)(k^{36}+1)(k^{72}+1)$$

k fiind prim cu 2, primii 3 şi ultimii 3 factori ai lui E se divid prin 2. Deci

E *se divide prin* 2^8.

Faţă de divizorul 3, k poate fi de formele $3m \pm 1$.

Când $k = 3m + 1$ factorii 1, 5 şi 7 ai lui E se divid prin 3, iar când $k = 3m - 1$ factorii 2, 4 şi 6 se divid prin 3. Factorii 1 şi 2 fiind patrate perfecte rezultă că

E *se divide prin* 3^4.

La fel se vede că pentru $k = 5m \pm 1$ unul din factorii $(k \mp 1)^2$ se divide prin 5, iar când $k = 5m \pm 2$ se divid prin 5 factorii $(k^2 + 1)$ şi $(k^{18} + 1)$, deci

E *se divide prin* 5^2.

Prin urmare în concluzie E se divide prin

$$2^8 \times 3^4 \times 5^2 = (2^4 \times 3^2 \times 5)^2 = 720^2.$$

Această problemă a fost propusă în numărul din luna Mai 1913 al Vol. XVIII. Pe copertele Volumelor G. M. se găsesc anunțați următorii rezolvitori, citați în ordinea volumelor:

Vol. XVIII, anul 1912/13: C. ALINESCU, C. AVRAMESCU, A. D. BUNESCU, D. CAMBUREANU, V. CARÂP, V. GRIGORESCU, A. HARLAT, M. HERMANN, S. LEIBOVITZ, P. MELAS, A. PANTAZI, I. PĂSĂRICĂ, G. SAMARIAN, A. TOMESCU, A. TIMOTIN, G. C. TULEA, T. VASILESCU, GR. ZAMFIRESCU, A. ZĂNESCU și GR. ZAPAN.

Vol. XIX, anul 1913/14: E. ABASON, C. ANTONIU, L. BĂDESCU, V. DUMITRESCU, C. ISTRATI, I. LINTEȘ, GR. MARINESCU și O. MAYER.

Vol. XX, anul 1914/15: R. BELIAN, S. CARNABET, A. CHEMALE, PH. COHN, T. COROZEL, I. DAVIDSOHN, GH. DUMITRESCU, AL. FLORESCU, G. S. GEORGESCU, M. GHERMĂNESCU, A. D. GHIOLU, S. GRÜNBERG, A. HRISTESCU, A. KIVOVITZ, I. KIVOVITZ, D. LITEANU, C. LOVIN, I. MARCELINO, M. NICOLAU, GH. NICULESCU, ȘT. NICULESCU, A. PANTAZI, A. PĂUN, T. RĂDOIU GH. ROBESCU și A. VIOCELLI.

Vol. XXI, anul 1915/16: N. ALEXE, A. BUCUR, C. MITESCU, V. NEGULESCU, C. NICOLAU, G. OLTEANU, A. POPESCU, G. ROSENBERG, A. ȘTEFĂNESCU și A. TRIANDAFIL.

Vol. XXVIII, anul 1922/23: I. DOBRESCU-BĂBICI.

Vol. XXIX, anul 1923/24: CONST. I. GEORGESCU.

Vol. XXX, anul 1924/25: I. POPA și C. N. POPESCU.

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 1976. *Fie* ABC *un triunghiu,* A′ *mijlocul laturei* $\overline{BC}$, L_a *proiecția ortocentrului* H *pe mediana* AA′ *și* A_2 *punctul lui* EULER *corespunzător vârfului* A. *Să se găsească locul centrului cercului* $A'A_2L_a$, *când latura* BC *e fixă și unghiul* A *constant.*

O. MAYER.

Soluție dată de D-l ION C. VASILIU (Șc. Politecnică, București).

Fie O_a simetricul centrului O al cercului ABC față cu latura BC; el este centrul cercului BHC, care este simetric cu cercul ABC față cu BC. Mediana AA′ și O_aH se întâlnesc într'un punct I, aparținând cercului BHC (căci $\overline{O_aA'} = \overline{A'O} = \frac{1}{2}\overline{AH}$ și $O_aA' \parallel AH$), diametral opus lui H; deci, unde cercul BHC taie mediana AA′, se găsește punctul L_a proiecțiunea ortogonală a lui H pe AA′. Deoarece O_aA_2 și A′A sunt paralele, patrulaterul $A_2L_aA'O_a$ este un trapez; de altă parte diagonalele $\overline{O_aL_a}$, $\overline{A'A_2}$ sunt egale (căci cercul O_a fiind egal cu cercul O, avem: $\overline{O_aL_a} = \overline{OA}$; apoi $OA'A_2A$ fiind

paralelogram $\overline{A'A_2}$, diametrul cercului lui EULER, este egal cu $\overline{OA}$); dar, dacă un trapez are diagonalele egale, este trapez isoscel, deci inscriptibil într'un cerc.

Aşa dar cercul $A'L_aA_2$ trece prin O_a. Cum însă, când vârful A descrie cercul O şi BC rămâne fixă, vârfurile A' şi O_a rămâne fixe, centrul cercului A_2L_aA' se mişcă pe mediatoarea segmentului fix $\overline{A'O_a}$. Distanţa d a locului la latura BC, fiind jumătate din $\overline{OA'}$, adică:

$$d = \frac{1}{2} R \cos A.$$

Observare. Rezolvitorii acestei probleme care au trimes soluţiuni la epoca în care a fost propusă, au fost anunţaţi pe copertele acelor ani.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 2337. *Fiind dat un polinom* $A(x)$ *de gradul al treilea, să se demonstreze că există totdeauna un polinom de gradul al treilea* $F(x)$ *şi numai unul singur, care verifică relaţiunea:*

$$F^2(x) = A(x) + x^4 R(x),$$

$R(x)$ *fiind deasemenea un polinom întreg în* x.

TR. LALESCU.

Să punem

$$F(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

α, β, γ, δ fiind coeficienţi pe care urmează să-i determinăm cu ajutorul relaţiunii date în enunţul problemii. Observăm dela început că polinomul întreg $R(x)$ trebue să fie neapărat de gradul al doilea şi cum nu este dat de mai înainte, urmează că va fi determinat din condiţiunile ce se impun membrului al doilea de a fi patrat perfect, vom pune deci:

$$R(x) \equiv px^2 + qx + r$$

unde p, q, r sunt necunoscute.

Acum, punând

$$A(x) \equiv a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

unde a_0, a_1, a_2, a_3 sunt numere date, în relația dată, avem, identificând cei doi membri ai egalității propuse, următoarele șapte relațiuni:

$$\alpha^2 = p \; ; \quad 2\alpha\beta = q \; ; \quad \beta^2 + 2\alpha\gamma = r \qquad (1)$$

$$\delta^2 = a_3 \; ; \quad 2\gamma\delta = a_2 \; ; \quad 2\beta\delta + \gamma^2 = a_1 \; ; \; 2\alpha\delta + 2\beta\gamma = a_0. \qquad (2)$$

Relațiunile din rândul al doilea determină imediat pe $\delta, \gamma, \beta, \alpha$ din aproape în aproape abstracție făcând de un factor constant $\varepsilon = \pm 1$, deci $F(x)$ este determinat și avem o singură soluțiune; apoi relațiunile din primul șir dau imediat pe p, q și r.

Dacă $A(x)$ este un polinom cu coeficienți reali, $F(x)$ este de asemenea cu coeficienți reali, chiar dacă a_3 este negativ.

Problema poate fi generalizată.

A rezolvat problema propusă D-l ION VASILIU (elev-inginer).

O. N. Ț.

PROBLEMA 2456. *Se consideră un patrulater complect* ABCDEF. *Dreapta, care unește mijloacele* M, N *ale dreptelor* BF, DE, *taie dreptele* AE, AF *în punctele* P, Q; ω *fiind punctul lui* MIQUEL *al acestui patrulater, să se arate că punctele:*

(M, B, P, ω) și (N, D, Q, ω)

sunt conciclice [1]).

C. BULGĂREANU.

Soluție dată de D-nii: AD. C. GHEORGHIU, N. N. MIHĂILEANU și TH. N. PANAITE (Studenți București).

Punctul E fiind pe latura AB și punctul F pe AD, considerăm cercurile lui MIQUEL:

BAωF , DAωE , CDωF , CBωE

și folosind proprietatea unghiurilor înscrise în același segment de cerc, avem relațiunile:

$\sphericalangle \omega BF = \sphericalangle \omega AF = \sphericalangle \omega ED$ (1) și $\sphericalangle \omega DE = \sphericalangle \omega AE = \sphericalangle \omega FB$ (2)

sau încă:

$\sphericalangle \omega BM = \sphericalangle \omega EN$ (3) și $\sphericalangle \omega DN = \sphericalangle \omega FM$. (4)

---

[1]) In enunțul propus la pag. 31, Vol. XXII, fusese schimbate literele M și N între ele.

Triunghiurile ωFB şi ωDE având unghiurile egale sunt asemenea, adică avem proporţionalitatea laturilor omoloage:

$$\frac{\overline{\omega B}}{\overline{\omega E}} = \frac{\overline{\omega F}}{\overline{\omega D}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{DE}} = \frac{2\,\overline{BM}}{2\,\overline{EN}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{EN}} \qquad (5)$$

şi în acest caz triunghiurile ωBM şi ωEN, având un unghiu egal cuprins între laturi proporţionale, *sunt asemenea,* deci:

$$\sphericalangle\, \omega MB = \sphericalangle\, \omega NE. \qquad (6)$$

Observăm acum că dacă considerăm triunghiul CDF şi cercul său circumscris CDFω, dreapta MN, pe baza relaţiunii (6), *este dreapta lui* SIMSON *generalizată* (de unghiul $\varphi = \sphericalangle\, \omega MB$) *a punctului* ω în raport cu triunghiul CDF. (Vezi Cul. Probl. Geometrie de profesor G. ŢIŢEICA ed. 1929, cap. V, pr. 26, pag. 26), adică avem şi:

$$\sphericalangle\, \omega QD = \sphericalangle\, \omega MB = \sphericalangle\, \omega NE = \pi - \sphericalangle\, \omega ND \qquad (7)$$

din care rezultă că patrulaterul ωQDN este inscriptibil.

In acelaş fel, se arată că punctele ω, P, B, M *sunt conciclice.*

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4847. *Să se găsească condiţiile la care trebue să satisfacă numerele* α *şi* β *pentru ca ecuaţia:*

$$\alpha x^8 + \beta x^7 + 7\alpha x^6 + 4\beta x^5 + 13\alpha x^4 + 4\beta x^3 + 7\alpha x^2 + \beta x + \alpha = 0$$

să aibe şi rădăcini reale.

Există valori de α *şi* β *astfel ca ecuaţia să aibă toate rădăcinile reale?*

O. N. ŢINO.

Să presupunem că luăm pentru α valoarea particulară $\alpha = 0$, şi evident $\beta \neq 0$. In acest caz, ecuaţiunea devine:

$$x(x^6 + 4x^4 + 4x^2 + 1) = 0,$$

deci

$$x = 0 \quad \text{şi} \quad x^6 + 4x^4 + 4x^2 + 1 = 0$$

şi punând în ultima $x^2 = y$, avem:

$$y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = 0,$$

care neprezentând nici o variaţiune n'are nici o rădăcină pozitivă, deci ecuaţiunea în x corespunzătoare nici o rădăcină reală. Deci în acest caz o rădăcină reală nulă.

Presupunând acum $\alpha \neq 0$ şi observând că ecuaţiunea dată este omogenă în raport cu α şi β, putem pune $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, iar ecuaţiunea dată devine:

$$x^8 + \lambda x^7 + 7x^6 + 4\lambda x^5 + 13x^4 + 4\lambda x^3 + 7x^2 + \lambda x + 1 = 0, \quad (1)$$

care se observă că este o ecuaţiune reciprocă. Punând deci

$$x + \frac{1}{x} = y$$

şi observăm că:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \; ; \; x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y \; ; \; x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2,$$

ecuaţiunea (1) devine:

$$f(y) \equiv y^4 + \lambda y^3 + 3y^2 + \lambda y + 1 = 0. \quad (2)$$

Dar ecuaţiunea (2) la rândul ei este deasemenea o ecuaţie reciprocă, deci punând:

$$y + \frac{1}{y} = z$$

şi observând că:

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2,$$

obţinem ecuaţiunea:

$$\varphi(y) \equiv z^2 + \lambda z + 1 = 0. \quad (3)$$

Aşa dar, rădăcinile ecuaţiunii (1) sunt date de lanţul de ecuaţiuni:

$$x^2 - xy + 1 = 0 \; ; \; y^2 - zx + 1 = 0 \; ; \; z^2 + \lambda z + 1 = 0. \quad (4)$$

Observăm că, pentru ca x să aibă valori reale, trebue ca $y^2 - 4 \geqq 0$, adică rădăcinile ecuaţiunii în y să fie reale şi în afară de intervalul $(-2, +2)$; dar ecuaţiunea în y este ecuaţiune reciprocă, deci rădăcinile ei inverse una alteia. Urmează că, dacă — de exemplu — y' şi y'' sunt reale negative, când $y' < -2$, avem

neapărat $y'' > -\frac{1}{2}$; şi reciproc; deci ca acest caz să se poată prezenta trebue ca ecuaţia în y să aibă o rădăcină cuprinsă în intervalul $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Punând însă $\psi(y) \equiv y^2 - zy + 1$ şi observând că $\psi(0) = +1$, trebue ca să avem $\psi\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$, adică $2z + 5 < 0$, sau încă $z < -\frac{5}{2}$. Cum însă ecuaţiunea $\varphi(z) = 0$ este şi ea reciprocă, dacă luăm z' real şi astfel ca $z' < -\frac{5}{2}$, avem neapărat $z'' > -\frac{2}{5}$ şi reciproc, deci trebue să determinăm pe λ astfel ca ecuaţiunea $\varphi(z) = 0$ să aibă o rădăcină cuprinsă în intervalul $\left(-\frac{2}{5}, 0\right)$. Cum $\varphi(0) = +1$, trebue să luăm neapărat pe λ astel, ca să avem: $\varphi\left(-\frac{2}{5}\right) < 0$; adică $\lambda > 2,9$, condiţiune care este suficientă pentru că ipotezele asupra lui z' sunt realizate, deoarece avem în acest caz $\lambda^2 - 4 > 0$, iar suma rădăcinilor z' şi z'' fiind negativă, z' şi z'' care sunt reali sunt negativi.

Se observă că, pentru $\lambda > 2,9$ avem realizate condiţiunile pentru ca ecuaţiunea dată să aibă şi rădăcini reale; însă cum numai pentru una din rădăcinile ecuaţiunei $\varphi(z) = 0$ corespund ecuaţiunii $\psi(y) = 0$ rădăcini reale, urmează că ecuaţiunea dată nu poate avea toate rădăcinile reale pentru nici o valoare de λ satisfăcând condiţiunii de mai sus.

Să presupunem acum că y' şi y'' sunt presupuşi reali pozitivi şi că — de exemplu — $y' > 2$, urmează că $y'' < +\frac{1}{2}$ şi reciproc; deci pentru ca acest caz să se poată prezenta, trebue ca ecuaţiunea $\psi(y) = 0$ să aibă o rădăcină în intervalul $\left(0, +\frac{1}{2}\right)$. Cum $\psi(0) = +1$, trebue neapărat ca $\psi\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, sau încă: $5 - 2z < 0$, deci $z > \frac{5}{2}$. Cum însă ecuaţiunea $\varphi(z) = 0$ are rădăcinile inverse

una alteia, dacă luăm $z' > \frac{5}{2}$, avem neapărat $z'' < \frac{2}{5}$, deci trebue să determinăm pe λ astfel ca $\varphi(z) = 0$ să aibă o rădăcină reală în intervalul $\left(0, +\frac{2}{5}\right)$. Avem însă $\varphi(0) = +1$, deci trebue să luăm pe λ astfel ca $29 + 10\lambda < 0$; sau $\lambda < -2, 9$.

Şi în acest caz nu sunt valori de λ pentru care ecuaţiunea dată să aibă toate rădăcinile reale. In cazurile limită $\lambda = +2, 9$ sau $\lambda = -2, 9$ rădăcinile reale ale ecuaţiei date sunt egale.

A rezolvat problema pe altă cale D-l SANDU R. TURCU (Liceul militar, Iaşi).

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4851. *Să se găsească locul geometric al punctelor de contact ale tangentelor, duse din două puncte fixe* A *şi* B, *la un cerc mobil cu centrul pe cercul descris pe* AB *ca diametru şi tangent la dreapta* AB.

AL. ŞCODRANO.

I. *Soluţie* dată de D-nii: O. SACTER, S. R. TURCU, I. STREDER (Lic. militar, Iaşi), AD. O. ŞAICHIN (Şc. Politechnică, Bucureşti), D. N. THEODORESCU (Lic. militar „N. Filipescu).

Fie O centrul cercului de diametru AB, M un punct mobil pe el, C proiecţia lui M pe AB, T şi T' punctele de tangenţă ale cercului M $(\overline{MC})$ cu tangentele duse din A şi B.

Prin construcţie AM este bisectoara unghiului CAT şi cum triunghiul AOM este isoscel, rezultă

$$\sphericalangle OMA = \sphericalangle MAT$$

ceea ce arată că OM, AT sunt paralele, de unde urmează că MT este o tangentă mobilă la cercul O.

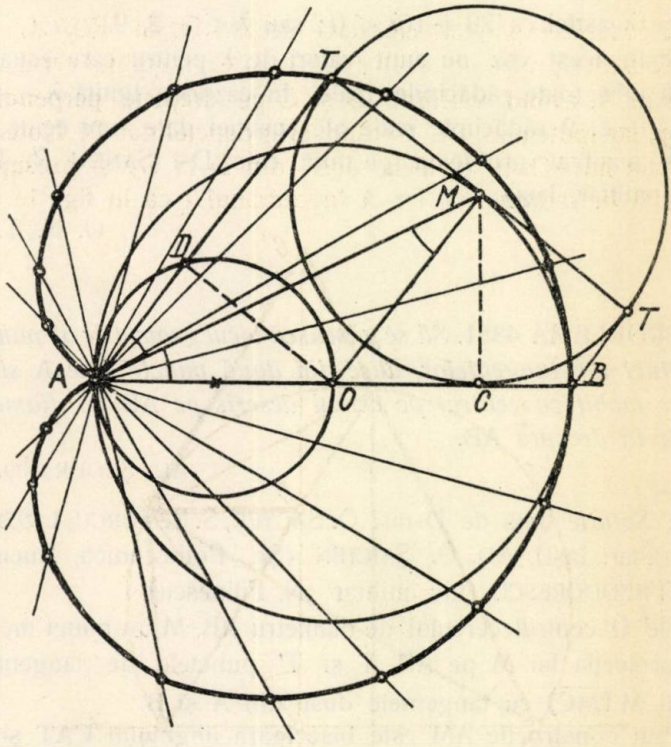
Se ştie că locul proiecţiei unui punct A de pe O pe tangentele în punctele M de pe O este o *cardioidă* cu punctul de întoarcere în A.

La fel se arată că locul lui T' este o cordioidă simetrică cu precedenta faţă de O. Această a doua cordioidă nu este trasată pe figură.

II. *Soluţie* dată de D-l O. SACTER.

Fie D proecţia lui O pe AT. Locul lui D este cercul de diametru OA. Cum DT este paralelă şi egală cu OM, rezultă că

$$DT = OM = Const.$$



Deci T descrie concoida cercului ADO şi fiindcă

$$DT = AO$$

această concoidă este o *cardioidă* (TR. LALESCU, *Curs de Geometrie Analitică*, fasc. IV, pag. 73).

Notă. 1°. D-l ŞT. C. TILICĂ (Lic. „Traian" Turnu-Severin) a dat o bună soluţie analitică găsind ecuaţiile exacte ale locurilor în coordonate carteziene.

2°. D-nii E. MARCOVICI şi D. RIPIANU au găsit ecuaţiile exacte ale locului în coordonate polare.

3°. Soluţia II-a a D-lui O. SACTER dă putinţa de a construi locul prin puncte.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4990. *Să se construiască un triunghiu dreptunghic cunoscând poziția vârfului unghiului drept și știind că vârfurile unghiurilor ascuțite sunt pe două drepte perpendiculare date, iar ipotenuza trece printr'un punct dat.*

G-L GH. BUICLIU.

I. *Soluțiune* geometrică, dată de D-l G. ST. ROȘCA.

Consider problema rezolvată. Fie ABC triunghiul cerut, dreptunghic în A, având vârfurile B și C pe dreptele perpendiculare Ox, Oy, iar ipotenuza BC trecând prin punctul dat D. Notez cu E intersecția lui AO cu paralela dusă din D la Oy și presupun că D se află în cadranul II, iar A în cadranul I ca în fig. 1.

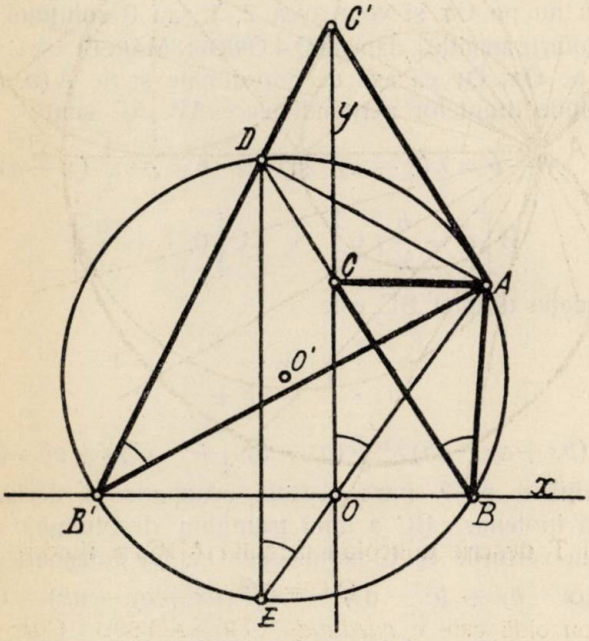


Fig. 1.

Patrulaterul OBAC având unghiurile BAC și BOC drepte este inscriptibil în cercul de diametru BC, rezultă că

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABD = \measuredangle AOy$$

deci B se află pe segmentul de cerc care vede coarda AD sub unghiul constant AOy. Observ că

$$\measuredangle AOy = \measuredangle AED$$

ca alterne interne, deci patrulaterul ABED este inscriptibil, de unde urmează următoarea construcție:

Se construește cercul ADE, care taie pe Ox în B și B'. Dreapta BD taie pe Oy în C. Triunghiul BAC este triunghiul căutat.

Unind pe B' cu D se obține punctul C', care dă o a doua soluție B'AC'.

Las pe A fix și fac să varieze D în plan.

Se vede că dacă D se află în unul din cadranele II, III sau IV punctele D și E sunt sau de o parte și de alta a lui Ox sau de aceeași parte, însă cel puțin unul din aceste puncte nu se află de aceeași parte a lui Ox cu A. Rezultă că cercul ADE taie *totdeauna* pe Ox în 2 puncte, care ne dau două soluțiuni.

Când A și D se află în același cadran, cercul ADE poate întâlni sau nu pe Ox și vom avea 2, 1 sau 0 soluțiuni.

II. *Soluție* analitică, dată de D-l ORIGEN MĂRCULESCU (Craiova).

Iau pe Ox, Oy ca axe de coordonate și fie $A(a, b)$.

Ecuațiile dreptelor perpendiculare AB, AC sunt

$$y-b=\lambda(x-a) \quad \text{și} \quad y-b=-\frac{1}{\lambda}(x-a)$$

$$\therefore \qquad B\left[a-\frac{b}{\lambda},\ 0\right] \ , \quad C\left[0,\ b+\frac{a}{\lambda}\right]$$

așa că ecuația dreptei BC este

$$\frac{x}{a-\frac{b}{\lambda}}+\frac{y}{b+\frac{a}{\lambda}}=1$$

$$\therefore \quad (bx+ay-ab)\lambda^2+(ax-by+b^2-a^2)\lambda+ab=0. \qquad (1)$$

Eliminând pe λ între această ecuațiune și derivata ei, se găsește că ipotenuza BC a unui triunghiu dreptunghic cu vârful A fix și cu vârfurile B, C mobile pe Ox, Oy înfășoară parabola:

$$(ax-by+b^2-a^2)^2-4ab(bx+ay-ab)=0$$

sau

$$(ax-by)^2-2(a^2+b^2)(ax+by)+(a^2+b^2)^2=0. \qquad (2)$$

Axa parabolei (2) este

$$ax-by-(a^2-b^2)=0 \qquad (3)$$

și trece prin A. Se găsește, pe calea cunoscută a teoriei conicelor că $A(a, b)$ este focarul parabolei (2) a cărei directoare este

$$y=-\frac{b}{a}x.$$

Când $x = a$, $y = -b$ deci directoarea trece prin simetricul A′ al lui A față de Ox. Unind A′ cu O obțin directoarea după care se construește vârful V.

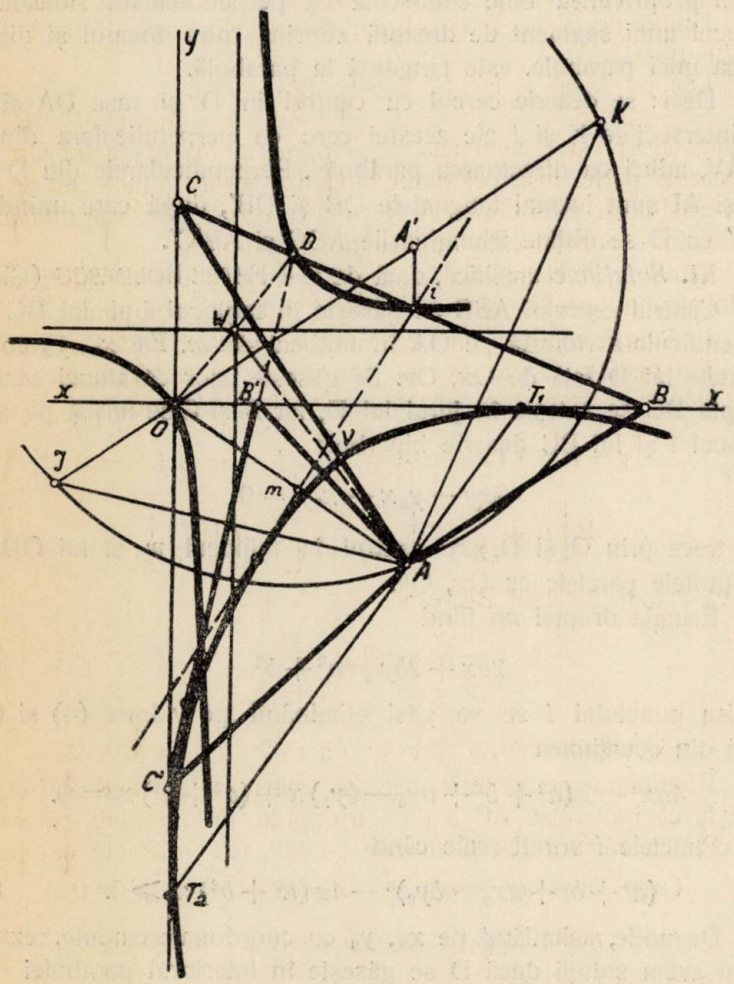


Fig. 2.

Anulând în (2) pe rând pe x și y, se mai observă ca parabola (2) este tangentă axelor Ox, Oy. Cu aceste elemente se construește parabola (fig. 2) la care se duc tangentele DBC, DB′C′ și se obțin astfel triunghiurile cerute în enunț. Se vede că dacă D este

în interiorul parabolei (2) nu avem nici o soluţie. Avem 2 soluţii când D este exterior parabolei şi 1 soluţie când D este pe parabolă.

Construcţia tangentelor duse din D la parabolă se face utilizând proprietatea bine cunoscută că perpendiculara ridicată în mijlocul unui segment de dreaptă cuprins între focarul şi directoarea unei parabole, este tangentă la parabolă.

Deci: se descrie cercul cu centrul în D şi raza DA şi se iau intersecţiile K şi I ale acestui cerc cu perpendiculara din O pe AV, adică cu directoarea parabolei. Perpendicularele din D pe AK şi AI sunt tocmai tangentele DB şi DB', după care unind B şi B' cu D se obţine triunghiurile ABC şi AB'C'.

III. *Soluţiune* analitică, dată de D-l PETRE BOLDESCU (Cluj).

Centrul cercului ABC se găseşte în mijlocul i al lui BC pe perpendiculara ridicată pe OA în mijlocul său m. Fie x_0, y_0 coordonatele lui D faţă de Ox, Oy. Se găseşte uşor că atunci când o dreaptă BC se roteşte în jurul lui D, iar B şi C se mişcă pe axe, mijlocul i al lui BC descrie hiperbola

$$2xy - y_0x - x_0y = 0 \qquad (4)$$

care trece prin O şi D, are centrul în mijlocul w al lui OD şi asimptotele paralele cu Ox, Oy.

Ecuaţia dreptei mi fiind

$$2ax + 2by = a^2 + b^2 \qquad (5)$$

abscisa punctului i se va găsi eliminând pe y între (4) şi (5) adică din ecuaţiunea

$$4ax^2 - 2(a^2 + b^2 + ax_0 - by_0)x + (a^2 + b^2)x_0 = 0.$$

Punctele i vor fi reale când

$$(a^2 + b^2 + ax_0 - by_0)^2 - 4a(a^2 + b^2)x_0 \geqslant 0. \qquad (6)$$

De unde, asimilând pe x_0, y_0 cu coordonate curente, rezultă că nu avem soluţii dacă D se găseşte în interiorul parabolei

$$(a^2 + b^2 + ax - by)^2 - 4a(a^2 + b^2)x = 0$$

sau ceea ce este tot una cu

$$(ax - by)^2 - 2(a^2 + b^2)(ax + by) + (a^2 + b^2)^2 = 0 \qquad (7)$$

care este tocmai ecuaţiunea (2) dela soluţiunea II.

Prin metodele cunoscute se găseşte că axa parabolei (7) este

$$ax - by = a^2 - b^2$$

că are focarul în A şi vârful în

$$V\left[\frac{a^3}{a^2+b^2} \ , \ \frac{b^3}{a^2+b^2}\right]$$

şi că este tangentă la Ox, Oy în

$$T_1\left[\frac{a^2+b^2}{a}, 0\right] \ ; \ T_2\left[0, \frac{a^2+b^2}{b}\right].$$

Punctul V se construeşte cu rigla şi compasul în felul următor: se proectează A pe Ox; punctul obţinut se proectează pe OA, iar această proecţie se proectează din nou pe Ox şi se obţine abscisa lui V.

Construcţiuni analoage faţă de Oy, dau ordonata lui V.

Observaţiuni. 1°. Bune soluţiuni geometrice dela D-nii: M. D. POPA, I. V. JAREGHIE (Lic. militar, Iaşi), H. M. BODNĂRESCU (Lic. „Titu Maiorescu", Bucureşti), şi R. E. GVIAZDOMORSCHI (Lic. militar, Cernăuţi).

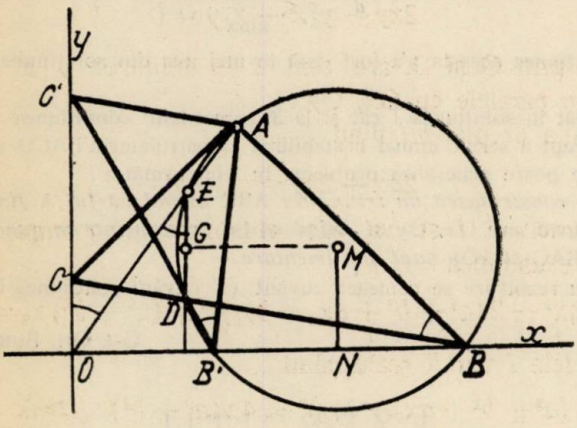


Fig. 3.

2°. D-l M. AL. VASILESCU-STABU (Bucureşti) a rezolvat foarte bine problema dând soluţia III fără însă a separa planul în regiuni după poziţiile punctului D.

3°. Considerăm în figura 3, ce urmează cazul când A şi D sunt în acelaşi cadran şi fie M centrul cercului ADE; N şi G proecţiile lui M pe Ox şi DE; F intersecţia lui Ox cu DE;

$$AD = c \ ; \ DF = d \ ; \ EF = e \ ; \ MA = MD = MB = R$$

şi α unghiul AOy.

BD taie pe Oy, în C. Triunghiul BAC este triunghiul căutat căci

$$\sphericalangle \text{OEF} = \sphericalangle \text{ABD}$$

având ca măsură jumătatea arcului AED. Cum

$$\sphericalangle \text{OEF} = \sphericalangle \text{EO}y = \alpha$$

rezultă

$$\sphericalangle \text{ABD} = \alpha$$

ceea ce arată că patrulaterul ABOC este inscriptibil şi deci că unghiul BAC este drept.

Ca problema să fie posibilă trebue ca cercul ADE să taie pe Ox, pentru aceasta este necesar şi suficient ca

$$\text{MN} = \text{GF} \leqslant \text{MD} = \text{R}. \tag{8}$$

Dar în triunghiul ADE avem

$$2\text{R} = \frac{\text{AD}}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\alpha},$$

iar

$$\text{GF} = \frac{\text{DF} + \text{EF}}{2} = \frac{d+e}{2}$$

aşa că (8) devine

$$d + e \leqslant \frac{c}{\sin\alpha}. \tag{9}$$

Condiţiunea aceasta n'a fost dată în nici una din soluţiunile geometrice primite.

4°. Atât în soluţiunea I cât şi la 3° precedent condiţiunea că unghiul xOy este drept a servit numai la stabilirea că patrulaterul BACO este inscriptibil. Deci se poate generaliza problema în felul următor:

Să se construiască un triunghiu ABC *având vârful* A *fix, vârfurile* B *şi* C *pe două axe* Ox, Oy *şi ştiind că* BC *trece printr'un punct fix şi că unghiurile* BAC *şi* xOy *sunt suplimentare.*

Pentru rezolvare se urmează cuvânt cu cuvânt soluţiunea I şi punctul 3° precedent.

G-L GH. BUICLIU.

EXERCIŢII

18. Dacă $a + b + c = 0,$

să se arate că avem identităţile:

$$12\,\Sigma a^4\,\Sigma a^5 = 5\,(\Sigma a^2)^3\,\Sigma a^3 \quad ; \quad 2abc\,\Sigma a^3 + \Sigma a^2\,\Sigma a^4 = 2\,\Sigma a^6$$

$$a^3b^3c^2\,\Sigma a^4 + 2\,\Sigma a^2b^2\,\Sigma a^3b^3 = 2\,\Sigma ab\,\Sigma a^4b^4$$

$$50\,\Sigma ab\,\Sigma a^4\,\Sigma a^4b^4 + (\Sigma a^2)^2\,(\Sigma a^5)^2\,100\,\Sigma a^2b^2\,\Sigma a^5b^5$$

sumele fiind întinse la permutările circulare între literile a, b, c,

CEZAR COŞNIŢĂ.

R. Privind pe a, b şi c ca rădăcini ale ecuaţiei:

$$x^3 + px + q = 0$$

şi calculând funcţiunile simetrice cari intervin în identităţile propuse, obţinem

$$\Sigma a^2 = -2p \; ; \; \Sigma a^3 = -3q \; ; \; \Sigma a^4 = 2p^2 \; ; \; \Sigma a^5 = 5pq \; ; \; \Sigma a^6 = 3q^2 - 2p^3$$

$$\Sigma a^2b^2 = p^2 \; ; \; \Sigma a^3b^3 = p^3 + 3q^2 \; ; \; \Sigma a^4b^4 = p^4 - 4pq^2 \; ; \; \Sigma a^5b^5 = p^5 + 5p^2q^2$$

$$\Sigma a^6b^6 = p^6 + 3q^4 + 6p^3q^3$$

datorită cărora, identităţile propuse devin evidente.

19. Să se determine condiţia ca rădăcinile ecuaţiei:

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

să fie astfel încât patratul uneia să fie egal cu suma patratelor celorlalte rădăcini.

I. N. CONSTANTINESCU.

R. Conform enunţului trebuind să avem relaţiunea:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$$

eliminarea rădăcinilor x_1, x_2, x_3, x_4 între această relaţie şi cele clasice dintre rădăcini şi coeficienţi, ne dă, în urma efectuării calculelor

$$2(m^4 + 4q - 2m^2n)^2 - (m^3 + 2p - 2mn)^2(m^2 - 2n) = 0$$

care este relaţia cerută.

20. Să se rezolve sistemul:

$$x(-x + y + z) + 2yz = 4$$
$$y(x - y + z) + 2zx = 10$$
$$x(x + y - z) + 2xy = 16.$$

S-LT. ADRIAN POPESCU.

R. Notând:

$$x + y + z = u \quad \text{şi} \quad xy + yz + zx = v$$

sistemul dat se scrie:

$$(1) \qquad \begin{aligned} xu &= 2v - 4 \\ yu &= 2v - 10 \\ zu &= 2v - 16 \end{aligned}$$

din care deducem uşor:

$$u^2 = 6v - 30$$

$$u^2v^2 = 12v^2 - 120v + 264$$

rezultând:

$$u = \begin{cases} \pm 6 \\ \pm i\sqrt{6} \end{cases} \qquad v = \begin{cases} 11 \\ 4 \end{cases}$$

şi din (1) rezultă imediat valorile lui x, y şi z. Generalizarea nu întâmpină nici o dificultate.

21. Dacă a, b, c sunt rădăcinile ecuației

$$x^3 + nx^2 + px + q = 0,$$

să se arate că în cazul realității lor, avem inegalitățile:

$$np \leqslant 9q \quad ; \quad n(n^2 - 2p) \leqslant 9q \quad ; \quad n^4 + p^2 + 6nq \geqslant 4n^2p$$

$$n^4 + 2p^2 + 3nq \geqslant 4n^2p \quad ; \quad n^2(n^4 + 6nq + 9p^2) \geqslant 2p(p^2 + 6nq + 3n^4).$$

CEZAR COȘNIȚĂ.

R. Considerând inegalitățile următoare:

$$\Sigma a \, \Sigma ab \geqslant 9abc \quad ; \quad \Sigma a \, \Sigma a^2 \geqslant 9abc \quad ; \quad \Sigma a^4 \geqslant \Sigma a^2b^2$$

$$\Sigma a^4 \geqslant abc \, \Sigma a \quad ; \quad \Sigma a^6 \geqslant 3a^2b^2c^2$$

din R. M. T. — VIII — 68 și calculând funcțiunile simetrice

$$\Sigma a^2 = n^2 - 2p \quad ; \quad \Sigma a^2b^2 = p^2 - 2nq \quad ; \quad \Sigma a^4 = n^4 - 4n^2p + 2p^2 + 4nq$$

$$\Sigma a^6 = n^6 + 9n^2p^2 + 3q^2 - 6n^4p - 12npq + 6n^3q - 2p^3$$

obținem imediat inegalitățile din enunț.

22. Să se arate că soluțiile sistemului

$$x^2 - 2y = a$$

$$y^2 - 2cx = b$$

sunt deductibile din rădăcinile ecuației:

$$t^3 - at^2 + bt - c^2 = 0$$

S-LT. ADRIAN POPESCU.

R. Într'adevăr, dacă u^2, v^2, w^2 sunt rădăcinile ecuației în t și dacă luăm:

$$\Sigma u = x \quad \Sigma uv = y$$

avem:

$$x^2 - 2y = a = (\Sigma u)^2 - 2\Sigma uv = \Sigma u^2$$

$$y^2 - 2cx = b = (\Sigma uv)^2 - 2uvw \, \Sigma u = \Sigma u^2v^2$$

ceea ce demonstrează proprietatea.

23. Două parabole cu același focar, intersectează pe bisectoarea unghiului format de directoarele lor.

N. M.

R. Fie F, focarul și D_1, D_2 directoarele, iar M_1, M_2 punctele de intersecție; M_1, M_2 sunt egal depărtate de F, D_1 și D_2.

24. Se consideră un punct M, un cerc de centru O şi de rază r; o dreaptă Δ paralelă cu D, la distanţa r de D şi de cealaltă parte faţă cu punctul O. Să se arate că 1) parabola de focar M şi directoare D; 2) parabola de focar O şi directoare Δ şi 3) hiperbola de focare O, M şi cu axa mare $= r$, sunt concurente.

N. M.

R. Punctul de intersecţie este egal depărtat de punctul M, de dreapta D şi de cercul O. Dacă M este interior cercului O, în locul hiperbolei trebue considerată elipsa în aceleaşi condiţii.

PROBLEME PROPUSE

5119. Se face o înmulţire de două numere întregi şi se observă că la factori, produse parţiale şi produsul total nu se află o aceeaşi cifră de două ori. Care sunt factorii?

I. IONESCU.

5120. Să se găsească patratul perfect de forma *abccba* ştiind că prima cifră a rădăcinii este *c*.

S-LT. ADR. POPESCU.

5121. Se poate ca produsul a două numere întregi să se termine cu grupul de p cifre a unuia din factori?

I. V. MĂTIEŞ.

5122. In intervalul de numere dela *1000* la *2000*, câte numere sunt prime cu 1939?

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

5123. Să se demonstreze că dacă raza cercului circumscris unui triunghiu isoscel de laturi şi suprafaţă numere întregi, este număr întreg, atunci înălţimea corespunzătoare bazei este un multiplu de *3*.

G. G. CONSTANTINESCU.

5124. Fie în triunghiul dreptunghiu ABC, BB_1, CC_1 bisectoarele unghiurilor ascuţite B, C; I intersecţia lor; AD înălţime; AA_b, AA_c bisectoarele unghiurilor BAD, DAC; B_2, C_2 intersecţiile dreptelor BB_1, CC_1 cu AD şi I_1 intersecţia dreptelor $A_b C_2$, $A_c B_2$. Să se demonstreze că:

1. Patrulaterul $A_b I I_1 A_c$ este inscriptibil;

2. Patrulaterele $ABA_b I$ şi $ACA_c I$ sunt deasemenea inscriptibile.

S-LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5125. Două triunghiuri T, T' sunt omologice de centru ω şi axă Δ. Fie încă α, β, γ trei puncte pe laturile triunghiului T; $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$ taie laturile corespunzătoare ale triunghiului T' în α' β' γ'.

1. Dacă α, β, γ sunt colineare pe o dreaptă δ, α', β', γ' sunt colineare pe o dreaptă δ'; δ şi δ' se taie pe Δ, polii lor trilineari μ' şi μ' sunt pe o dreaptă ce trece prin ω.

2. Dacă α, β, γ sunt picioarele cevienelor unui punct μ, α', β', γ' sunt picioarele cevienelor unui punct μ'; punctele μ, μ' sunt pe o dreaptă ce trece prin ω; polarele lor trilineare δ, δ' se taie pe Δ. Cazuri particulare.

N. N. MIHĂILEANU.

5126. A' fiind pe latura BC a triunghiului ABC izotomicul piciorului bisectoarei vârfului A al triunghiului, se consideră punctele A_c şi A_b unde paralelele duse prin A' respectiv la laturile AB şi AC taie mediana vârfului A. Analog se obţin punctele B_a, B_c şi C_a, C_b. Se cosideră triunghiul $A_1B_1C_1$ format de dreptele CA_c, AB_a, BC_b şi triunghiul $A_2B_2C_2$ format de dreptele CB_c, AC_a, BA_b. Să se arate că triunghiul ABC este ortologic cu fiecare din triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$, care sunt ortologice între ele.

TH. G. COCEA.

5127. Fie M un punct în planul unui triunghiu şi M_c complimentarul său. Când M_c este echiparalelul lui M?

(A se vedea G. M. XXXIII, 243).

ION C. VASILIU.

5128. Să se studieze natura seriei cu termenul general

$$u_n = \frac{n!}{(1+k_1)(2+k_2)\dots(p+k_p)(p+1+k_1)(p+2+k_2)\dots(2p+k_p)}$$

unde numitorul este un produs de n factori, iar $k_1, k_2, \dots, k_p$ numere pozitive.

M. GHERMĂNESCU.

5129. Să se demonstreze că seria cu termenul general

$$u_n = \frac{2.4.6\dots(2n)}{3.57\dots(2n+1)}\left(x^n + x^{n-1} + \frac{1.3}{1.2}x^{n-2} + \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{1.2\dots n}\right)$$

este uniform convergentă în intervalul $1 < x \leqq 2$.

G-L GH. BUICLIU.

5130. Presupunând că:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

să se arate că relaţia:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \end{vmatrix}$$

atrage după sine relaţia:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}$$

şi reciproc. Să se arate apoi că ambele pot fi înlocuite prin relaţia :

$$\begin{vmatrix} a_1 - \alpha_1 & a_2 - \alpha_2 & a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1 \\ b_1 - \beta_1 & b_2 - \beta_2 & b_1\beta_2 - b_2\beta_1 \\ c_1 - \gamma_1 & c_2 - \gamma_2 & c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1 \end{vmatrix} = 0,$$

şi reciproc.

GH. TH. GHEORGHIU.

5131. Să se studieze variaţia funcţiunii :

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3 - 6x + 5}{x^3 - 6x - 5}}.$$

Să se traseze apoi curba reprezentativă.

VIRGIL CLAUDIAN.

5132. Se consideră într'un plan, două axe dreptunghiulare Ox şi Oy, o curbă C şi un punct M (x, y) pe ea.

Fie T punctul de intersecţie al tangentei în M la C cu Oy.

1. Să se determine curbele C ştiind că punctul P (u, v), mijlocul segmentului $\overline{MT}$, descrie parabola

$$v = 2u^2.$$

2. Dintre aceste curbe să se construiască aceea care trece prin punctul (1, 1). Să se calculeze *centrul de greutate* al ariei, presupusă omogenă şi închisă de această curbă şi de dreapta $y = x$.

3. Să se determine curbele C ştiind că P (u, v) descrie curba dată

$$v = f(u).$$

TH. ANGHELUŢĂ.

ERATĂ. 1°. Prima egalitate dela soluţia problemei 5000 pag. 439 este

$N^2 = 100a + b$ în loc de $N^2 = 100 + b$.

2°. Nota dela pag. 434 la finele soluţiei problemei 3911 se înlocueşte prin Nota Matematică No. 38 din numărul acesta.

3°. Problema rezolvată publicată la pag. 442/XLIV, sub Nr. 5070, trebue trecută sub Nr. 5071.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bedreag C. M. (4928, 68, 5025, 83); *Bogdan Gr. Gh.* (5090, 114); *Boiangiu D. D.* (4928, 5060); *Cârdeiu G.* (5005, 63, 78, 79, 83); *Cherţman S. Mozes* (5014, 29, 78); *Cleanoveanu Mircea* (5002, 75); *Cocea T. Th.* (P); *Costescu G. I.* (5051); *Dimitriu C. I. C.* (4876, 5088); *Drăghicescu P. P.* (5064, 90, 108, 14); *Eftimie D. Cristea* (5031, 33, 78, 83); *Grumăzescu M.* Subloc. (5041, 64, 67, 78, 98, 103); *Herman Victor* (4989, 5025); *Jareghie V. Ioan* (5108); *Leibovici S.* (5005, R); *Modâlcă S. Emil* (5108); *Moessner A.* (R); *Pantelimon V. Const.* (5055, 63, 79, R); *Pascaru I. C.* (5018, 90, 114); *Petrescu Achile* (5098); *Petrescu Iulian* (5009, 50, 51, 80); *Popa D. Mircea* (5110, 15); *Popa Marin* (P); *Popa N. Aurel* (5114); *Ripianu D-tru* (4853, 5065, 66, 67, 81, 100); *Rohr I. Al.* (4968, 5039, 41, 63, 79, 108, 14); *Roşculeţ N. Marcel* (4728, 29, 959, 5013); *Sacter O.* (4601); *Şaichin O. A.* (5055, 115 R); *Solomon I. Isac* (4931, 5025, 78, 98, 108); *Stamate I. Ionel* (4934, 5025, 33, 75, 79); *Ştefanovici M.* (R); *Thébault V.* (P); *Vasiliu D.* (5078).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — IV de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte inainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon : 3-9803).

C. 55.376.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIV

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1939

SUMARUL

1. Comemorarea Profesorului G. Țițeica de către Cercul Matematic al Societății de Științe din Cluj.
2. Proprietăți ale pseudo-rombului . *Stelian Cetățeanu.*
3. Aplicație a punctului lui Miquel. Cuartica piriformă . . . . . *N. Abramescu.*
4. Asupra unor însumări . . . . . *Eugen Vișa.*
5. Asupra punctelor lui Feuerbach . *Victor L. Florescu.*
6. Raport pentru decernarea premiului „V. Cristescu" . . . . . *Comisiunea pentru Premii.*
7. Note Matematice: 40 — 43.
8. Bibliografie.
9. Cereri 285.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 2689, 3365, 4369, 4666, 4808, 4902, 4904, 4930, 4952, 4965, 4994, 5005, 5011, 5018, 5019, 5048.
12. Exerciții 25 — 27.
13. Probleme propuse: 5133 — 5147.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1939

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stoica**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1938 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5010, 22, 23, 26, 28, 37, 43, 45, 47, 49, 53, 58, 59, 68, 71, 72, 73, 74, 76, 82, 85, 89, 91, 93, 94, 95, 99, 101, 02, 04, 05, 06, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42 43, 44, 45, 46, 47.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

IN BIBLIOTECA ISTORICĂ A „GAZETEI MATEMATICE“

A APĂRUT:

ELEMENTELE LUI EUCLID

(Cărţile I — VI de Geometrie plană)

TRADUSĂ DIN LIMBA GREACĂ

DE

V. MARIAN

Preţul 160 lei

COMEMORAREA PROFESORULUI G. ŢIŢEICA

DE CĂTRE

CERCUL MATEMATIC AL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE DIN CLUJ

(Urmare dela pag. 451)

D-l Profesor ANGHELUŢĂ dă apoi cuvântul D-lui Profesor D. V. IONESCU care spune următoarele:

Impreună cu D-l Conferenţiar CĂLUGĂREANU ne-am luat sarcina de a expune la comemorarea de azi a lui G. ŢIŢEICA câteva rezultate din lucrările lui arătând în acelaşi timp domeniile în care a lucrat şi a strălucit eminentul nostru Profesor. D-l CĂLUGĂREANU a vorbit despre o clasă de suprafeţe care în literatură sunt de mult cunoscute cu numele de suprafeţele S sau suprafeţele lui ŢIŢEICA.

Eu voiu încerca să expun câteva din proprietăţile geometrice ale reţelelor şi ale congruenţelor de drepte, domeniu care a preocupat pe regretatul ŢIŢEICA toată viaţa şi i-a animat toate cercetările.

Să reamintesc definiţia reţelelor.

In spaţiul proiectiv cu $n-1$ dimensiuni, să considerăm o suprafaţă S pe care se pot trasa două familii de curbe C şi C_1 care se bucură de următoarea proprietate: prin fiecare punct M al suprafeţei trece câte o curbă din fiecare familie şi când M descrie curba C, tangenta în M la curba C_1 descrie o suprafaţă desfăşurabilă.

In acest caz se zice că cele două familii de curbe formează o *reţea*. Proprietatea precedentă este simetrică, adică şi tangenta la curba C în punctul M, dealungul curbei C_1, formează o suprafaţă desfăşurabilă.

Dacă cele două familii de curbe sunt luate ca curbe coordonate u şi v, coordonatele proiective x_i ale punctului M, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, care sunt funcţiuni de u şi v, verifică o ecuaţie cu derivate parţiale lineară de forma

$$x_{uv} + ax_u + bx_v + cx = 0, \tag{1}$$

care poartă numele de ecuaţia lui LAPLACE.

In ecuaţia (1), x_u şi x_v sunt derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiunei x în raport cu u şi v; x_{uv} este derivata parţială de ordinul al doilea a lui x în raport cu u şi v.

Ecuaţia cu derivate parţiale (1), este instrumentul analitic cu care se studiază proprietăţile geometrice ale reţelelor.

Primul geometru care trebue socotit ca întemeietorul teoriei reţelelor este CHARLES DUPIN, care după cum se ştie a definit prima dată tangentele conjugate într'un punct al unei suprafeţe din spaţiul nostru. Teoria reţelelor pentru spaţiul nostru a fost aprofundată de către marele geometru francez GASTON DARBOUX şi se găseşte expusă în volumul al doilea al magistralului său curs de teoria suprafeţelor.

Generalizarea reţelelor, din punct de vedere metric, la spaţii cu n dimensiuni a fost făcută de către CLAUDE GUICHARD, geometru francez, succesorul lui DARBOUX la catedra de geometrie superioară dela Facultatea de Ştiinţe din Paris.

Studiul geometric al reţelelor din punct de vedere proiectiv a fost făcut în spaţiul cu n dimensiuni de către G. ŢIŢEICA şi D-l E. BOMPIANI Profesor la Universitatea din Roma.

Lucrările lui ŢIŢEICA au apărut sub formă de note publicate de Academia de Ştiinţe din Paris şi de Academia Română. O lucrare de ansamblu asupra teoriei reţelelor a fost publicată de către G. ŢIŢEICA în 1923 cu titlul *„Géometrie différentielle projective des réseaux"* şi ea a rămas clasică pentru acest domeniu. Această lucrare a fost tipărită de către Academia Română. O altă lucrare fundamentală a Profesorului ŢIŢEICA este un memoriu întitulat *„Sur certaines congruences de droites"* publicat în *„Journal de mathématiques pures et appliquées"* în anul 1928.

LAPLACE a pus în evidenţă o proprietate a ecuaţiei cu derivate parţiale (1), arătând că dacă se face transformarea

$$x_1 = x_v + ax, \tag{2}$$

ecuaţia (1) se scrie

$$(x_1)_u + bx_1 = hx \tag{3}$$

unde

$$h = a_u + ab - c, \tag{4}$$

şi eliminând pe x între ecuaţiile (2) şi (3) se obţine o nouă ecuaţie a lui LAPLACE

$$(x_1)_{uv} + a_1(x_1)_u + b_1(x_1)_v + c_1x_1 = 0 \tag{5}$$

care se numeşte *transformata ecuaţiei (1) în sensul variabilei* v.

Deasemenea, dacă se face transformarea

$$x_{-1} = x_u + bx \tag{6}$$

ecuația (1) se scrie

$$(x_{-1})_v + ax_{-1} = kx \tag{7}$$

unde

$$k = b_v + ab - c \tag{8}$$

și eliminând pe x între ecuațiile (6) și (7) se obține o nouă ecuație a lui LAPLACE

$$(x_{-1})_{uv} + a_1'(x_{-1})_u + b_1'(x_{-1})_v + c_1'(x_{-1}) = 0 \tag{9}$$

care se numește *transformata ecuației (1) în sensul variabilei* u.

Calculele precedente au pus în evidență două funcțiuni h și k numite *invarianții ecuației lui* LAPLACE. Dacă unul din invarianți este nul ecuația lui LAPLACE se integrează prin quadraturi.

DARBOUX a dat interpretarea geometrică a acestei metode de transformare a ecuației lui LAPLACE. Să considerăm o rețea (x) și fie (1) ecuația lui LAPLACE corespunzătoare. Punctul x_1 dat de formula (2), este punctul unde tangenta în x la curba v atinge coama de înapoiere a suprafeței desfășurabile descrise de această tangentă. Deorece x_1 verifică ecuația lui LAPLACE (5) rezultă că *punctul* x_1 *descrie o rețea.* Tangenta în x_1 la curba u descrisă de x_1 este dreapta x_1x după cum se vede din ecuația (3).

Punctul x_1 definit de formula (6) descrie deasemenea o rețea și tangenta în x_{-1} la curba v descrisă de x_{-1} este dreapta $x_{-1}x$.

In mod analog se poate deduce rețeaua (x_2) din (x_1), rețeaua (x_{-2}) din $(x_{-1}), \ldots$, și așa mai departe.

Rețelele (x_1), $(x_2), \ldots$ se numesc *transformatele lui* LAPLACE *ale rețelei* (x) *în sensul curbei* v, iar rețelele (x_{-1}), $(x_{-2}), \ldots$ se numesc *transformatele lui* LAPLACE *în sensul curbei* u.

Configurația $\ldots x_{-2}x_{-1}xx_1x_2\ldots$ formează *un șir al lui* LAPLACE.

Se vede din transformarea precedentă a rețelelor că la o rețea (x), corespunde o *congruență specială de drepte,* ca xx_1, care se bucură de proprietatea că curba v descrisă de x este tangentă la dreapta xx_1, iar curba u descrisă de x_1 este deasemenea tangentă la dreapta x_1x. Această congruență poate fi studiată independent de noțiunea de rețea.

Se demonstrează că dacă (x, y) este o congruență de drepte în sensul explicat mai sus, atunci coordonatele punctelor x și y verifică un sistem de ecuații de derivate parțiale de forma

$$(10) \qquad \begin{aligned} x_v &= \alpha x + \beta y, \\ y_u &= \gamma x + \delta y, \end{aligned}$$

în care α, β, γ, δ sunt funcțiuni de u și v.

Se poate face o schimbare asupra coordonatelor punctelor x și y, care nu modifică pozițiile lor, astfel ca sistemul precedent să fie înlocuit cu

$$(11) \qquad \begin{aligned} x_v &= ay \\ y_u &= by. \end{aligned}$$

Sistemul precedent de ecuații cu derivate parțiale (10) sau (11) este instrumentul analitic cu care se studiază proprietățile geometrice ale congruențelor.

Se demonstrează că punctele x, y, care se numesc *focarele* congruenței (x, y), descriu rețele numite *rețelele focale* ale congruenței (x, y).

Rețelele cu invarianți egali $(h = k)$ ocupă un loc de frunte în teoria rețelelor. Printr'o transformare de coordonate de forma

$$x = \lambda \bar{x},$$

care nu schimbă punctul x, ecuația lui LAPLACE se poate reduce la forma

$$x_{uv} = hx.$$

Aceste rețele se bucură de o proprietate caracteristică, care constitue *teorema lui* KÖNIGS și anume:

Dacă rețeaua (x) *este cu invarianți egali, — și numai în acest caz, — există o conică care are în* x_1 *un contact de ordinul al doilea cu curba* $v = const.$ *a rețelei* (x_1) *și în* x_{-1} *un contact de ordinul al doilea cu curba* $u = const.$ *a rețelei* (x_{-1}).

Această teoremă, care a fost dată de KÖNIGS pentru o rețea cu invarianți egali în plan, a fost generalizată de DARBOUX, care i-a dat o demonstrație metrică, iar ȚIȚEICA i-a dat o demonstrație proectivă conformă cu caracterul ei proiectiv.

Să considerăm șirul lui LAPLACE format din rețeaua (x) și transformatele ei succesive în sensul curbelor v și al curbelor u. Laturile șirului formează congruențe speciale, de care s'a vorbit

mai sus. ȚIȚEICA numește *congruențe ale lui* GOURSAT, congruențele xx_1 care se bucură de proprietatea că invarianții rețelelor x_2, x_3,..., să fie egali cu invarianții rețelelor x_{-1}, x_{-2},... ȚIȚEICA mai exprimă proprietatea precedentă spunând că *șirul lui* LAPLACE *este simetric în raport cu congruența* (xx_1).

Dacă se notează cu (h, k) invarianții rețelei (x) și cu (h_1, k_1) invarianții rețelei (x_1), se demonstrează că condiția ca și șirul precedent să fie simetric în raport cu congruența (xx_1) este $h_1 = k$.

Dacă o congruență (x, y) este reprezentată prin sistemul de ecuații cu derivate parțiale (11), condiția ca (xy) să fie o congruență GOURSAT este $a = b$.

Relativ la aceste congruențe ȚIȚEICA a demonstrat o teoremă analoagă teoremei lui KÖNIGS relativă la rețelele cu invarianți egali.

Se consideră o congruență oarecare (x, y) și se notează cu x', y' transformatele lui LAPLACE ale lui x și y, primul în sensul curbei u, al doilea în sensul curbei v. Există o cuadrică Q_1 care trece prin muchiile xx', yy', xy' și $x'y$ ale tetraedrului format de punctele x, y, x', y' și care are un contact de ordinul al treilea în x' cu curba $u = \text{const.}$ descrisă de x'. Deasemenea există o cuadrică Q_2 care trece prin aceleași muchii ca Q_1 dar care are un contact de ordinul al treilea în y' cu curba $v = \text{const.}$ descrisă de y'.

Cele două cuadrice Q_1 *și* Q_2 *se confundă când congruența* (x, y) *este o congruență* GOURSAT *și numai în acest caz.*

In alte probleme asupra rețelelor, ȚIȚEICA a adus importante contribuțiuni. Menționăm studiul său asupra *rețelelor* R care se bucură de proprietatea că toate congruențele șirului lui LAPLACE corespunzător sunt *congruențe* W. (Congruențe WEINGARTEN).

Deasemenea menționăm studiul asupra șirurilor lui LAPLACE care sunt *periodice*, adică șiruri pentru care rețeaua (x_n) a șirului coincide cu rețeaua inițială (x). Se zice că șirul are perioada n. Vom cita ca exemplu teorema următoare:

Perspectiva pe un plan a liniilor asimptotice ale unei suprafețe ȚIȚEICA — *neriglate — este o rețea cu invarianți egali și care dă naștere la un șir al lui* LAPLACE *periodic, cu perioada 3.*

Iată câteva din problemele care au preocupat pe ȚIȚEICA și câteva din rezultatele obținute de el.

(Va urma).

PROPRIETĂȚI ALE PSEUDO-ROMBULUI

In *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVIII, la pagina 479, D-l Profesor I. IONESCU a propus următoarea problemă investigativă (No. 4284).

„*Să zicem pseudo-romb patrulaterului care are diagonalele sale perpendiculare pe mijlocul numai a uneia din ele. Să se dea proprietăți ale acestei figuri*".

In afară de proprietățile date la pagina 333, Vol. XXXIX și la paginele 73 și 133, Vol. XLII, mai putem da următoarele:

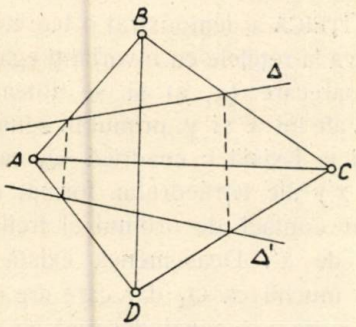


Fig. 1.

1. *Două drepte simetrice față de diagonala-axă a pseudo-rombului împart laturile egale în părți proporționale* (fig. 1).

2. *Diagonalele și dreptele care unesc punctele de contact ale cercului înscris pseudo-rombului cu laturile opuse, sunt concurente* (fig. 2).

3. *Pseudo - rombul admite patru cercuri exînscrise cu centrele în punctele de intersecție ale bisectoarelor exterioare unghiurilor* (fig. 3).

4. *Centrele cercurilor exînscrise sunt situate pe perpendicularele ridicate la extremitățile diagonalei-axă.*

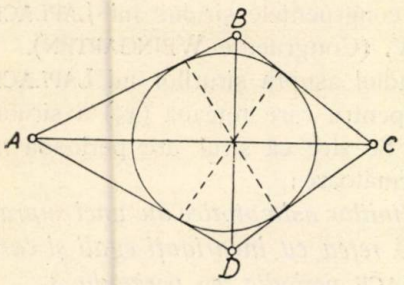


Fig. 2.

Se dovedește ținând seamă că axa de simetrie este bisectoarea celor două unghiuri neegale ale pseudo-rombului.

5. *Cercurile exînscrise sunt egale două câte două.*

Intr'adevăr fiind simetrice față de diagonala axă sunt egale două câte două.

6. *Centrul de greutate al pseudo-rombului este în proecția centrului de greutate al triunghiului de deasupra diagonalei axă de simetrie, pe această axă* (fig. 4).

Se dovedeşte ţinând seamă că pseudo-rombul este simetric faţă de diagonala axă.

7. *Două pseudo-romburi sunt asemenea când au:*

a) *Două unghiuri alăturate egale.*

b) *Laturile proporţionale şi un unghiu egal.*

c) *Laturile şi o diagonală proporţionale.*

d) *O latură şi o diagonală proporţionale iar unghiul adiacent lor egal.*

e) *Diagonalele proporţionale şi împărţite de punctul lor de intersecţie în rapoarte egale.*

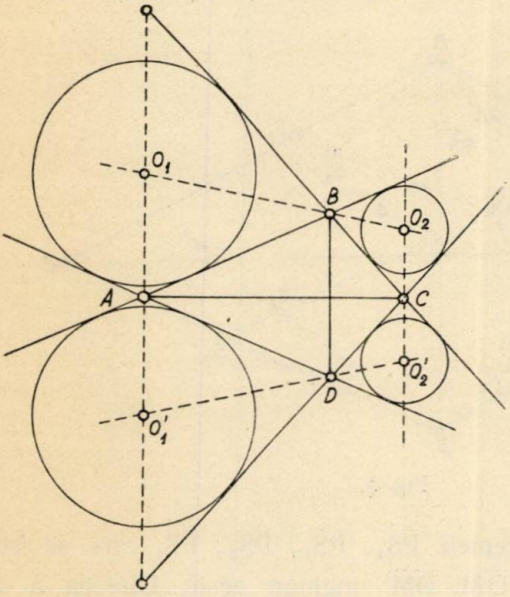


Fig. 3.

Se pot dovedi cu ajutorul cazurilor de asemănare ale triunghiurilor oarecare.

8. *Două pseudo-romburi sunt egale când au egal:*

a) *Două unghiuri alăturate şi o latură sau o diagonală.*

b) *Laturile şi un unghiu sau o diagonală.*

c) *Diagonalele care trebuesc să fie împărţite de punctul lor de intersecţie în raporturi egale.*

d) *O latură, o diagonală şi unghiul adiacent lor.*

e) *Diagonala axă şi unghiurile adiacente ei.*

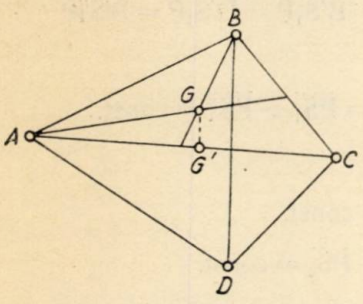


Fig. 4.

Se pot dovedi cu ajutorul cazurilor de egalitate ale triunghiurilor oarecare.

9. M *şi* M′ *fiind două puncte de pe diagonala-axă* $\overline{AC}$, *suma segmentelor duse dintr'un punct mobil* P *echiunghiular la dreptele* $\overline{BM}$, $\overline{BM'}$, $\overline{DM}$ *şi* $\overline{DM'}$ *este constantă când* P *se mişcă după o direcţie paralelă cu cealaltă diagonală* (fig. 5).

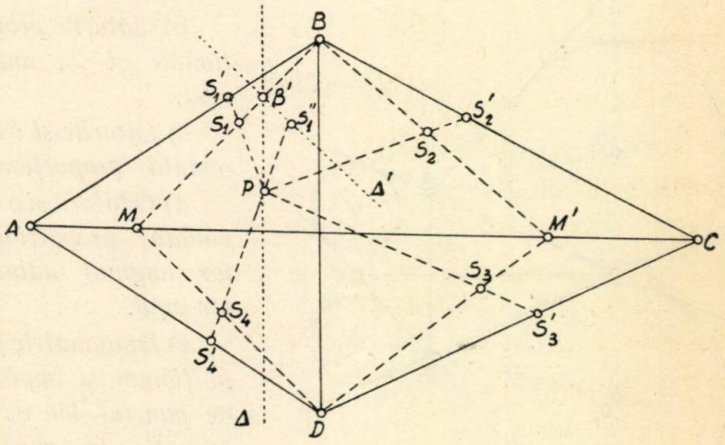


Fig. 5.

Din P ducem dreptele $\overline{PS_1}$, $\overline{PS_2}$, $\overline{PS_3}$, $\overline{PS_4}$ care să facă cu dreptele $\overline{BM}$, $\overline{BM'}$, $\overline{DM}$, $\overline{DM'}$ unghiuri egale. Direcţia Δ de mişcare a punctului P intersectează pe $\overline{MB}$ şi $\overline{MD}$ în B şi D iar prelungirea lui PS_4 taie paralela Δ' dusă prin B′ la $\overline{MD}$ în S_1''.

Deoarece

$$\widehat{D'B'M} = \widehat{MD'B'} = \widehat{D'B'\Delta'} \quad \text{iar} \quad \widehat{B'S_1P} = \widehat{D'S_4P} = \widehat{B'S_1''P}$$

avem

$$\overline{PS_4} = \overline{PS_1''} \quad \text{iar} \quad \overline{PS_1} + \overline{PS_4} = \overline{PS_1} + \overline{PS_1''} = \text{const.}$$

La fel se arată că:

$$\overline{PS_2} + \overline{PS_3} = \text{const.}$$

$$\therefore \quad \overline{PS_1} + \overline{PS_2} + \overline{PS_3} + \overline{PS_4} = \text{const.}$$

10. *Perimetrele patrulaterelor* MS_1PS_4 *şi* $PS_2M'S_3$ *sunt constante, când* P *se mişcă pe o direcţie paralelă cu diagonala ce nu este axă.*

Intr'adevăr avem:

$$\overline{B'S_1} + \overline{D'S_4} = \overline{B'S_1''} + \overline{D'S_4} = \overline{D'M} - \overline{B'M} = \text{const.}$$

iar

$$\overline{MS_1} + \overline{MS_4} = \overline{B'M} - \overline{B'S_1} + \overline{D'M} - \overline{D'S_4}$$

$$= \overline{B'M} + \overline{D'M} - (\overline{B'S_1} + \overline{D'S_4}) = \text{const.}$$

Insă cum:

$$\overline{PS_1} + \overline{PS_4} = \text{const.}$$

deducem că:

$$\overline{MS_1} + \overline{PS_1} + \overline{MS_4} + \overline{PS_4} = \text{const.}$$

La fel se arată că:

$$\overline{PS_2} + \overline{M'S_2} + \overline{PS_3} + \overline{M'S_3} = \text{const.}$$

11. *Suma perimetrelor* PS_1BS_2 şi PS_3DS_4 *este constantă când* P *se mişcă pe o direcţie paralelă cu diagonala ce nu este axă.*

Se observă că

$$\overline{BS_1} + \overline{BS_2} + \overline{DS_3} + \overline{DS_4} = \text{const.}$$

deoarece este diferenţa între perimetrul pseudo-rombului şi suma

$$\overline{MS_1} + \overline{MS_4} + \overline{M'S_2} + \overline{M'S_3} = \text{const.}$$

12. S_1'; S_2'; S_3'; S_4' *fiind punctele de intersecţie ale dreptelor* $\overline{PS_1}$; $\overline{PS_2}$; $\overline{PS_3}$ *şi* $\overline{PS_4}$ *cu laturile pseudo-rombului avem:*

$$S_1S_1' + S_2S_2' + S_3S_3' + S_4S_4' = \text{const.}$$

Deoarece $\widehat{ABM} = \widehat{ADM}$ şi $\widehat{PS_4D} = \widehat{PS_1B}$

avem: $\widehat{PS_4'D} = \widehat{PS_1'B}$ deci dreptele $\overline{PS_1'}$ şi $\overline{PS_4'}$ sunt echiunghiulare cu laturile pseudo-rombului. In virtutea punctului 9 avem:

$$\overline{PS_1'} + \overline{PS_4'} = \text{const.} \quad \text{şi} \quad \overline{PS_1} + \overline{PS_4} = \text{const.}$$

deci:

$$\overline{S_1S_1'} + \overline{S_4S_4'} = \overline{PS_1'} + \overline{PS_4'} - (\overline{PS_1} + \overline{PS_4}) = \text{const.}$$

La fel se dovedeşte că:

$$\overline{S_2S_2'} + \overline{S_3S_3'} = \text{const.}$$

$$\therefore \quad \overline{S_1S_1'} + \overline{S_2S_2'} + \overline{S_3S_3'} + \overline{S_4S_4'} = \text{const.}$$

22 Aprilie, 1939.

STELIAN CETĂŢEANU
(Cl. VIII-a Lic. Gh. Şincai, Bucureşti).

APLICAȚIE A PUNCTULUI LUI MIQUEL
CUARTICA PIRIFORMĂ

Ca aplicație a punctului lui MIQUEL, se găsesc noui proprietăți ale cuarticei piriforme.

1. *Punctul lui* MIQUEL. Să considerăm *dreapta variabilă* DE (Fig. 1), *care trece prin punctul fix* C *al bisectoarei unghiului dat* AOB, *care taie laturile* OA *și* OB *ale unghiului în* D *și* E. Notând cu D'CE' altă poziție a dreptei, să însemnăm cu N punctul de intersecție al cercurilor ODE și OD'E'. Se vede că unghiurile EDN = EON din patrulaterul inscriptibil OEND și E'D'N = E'ON din patrulaterul OE'ND'. Deci unghiurile CD'N = CDN, de unde rezultă că patrulaterul D'CND este inscriptibil, adică cercul D'CD trece prin N. In același mod se arată că și cercul ECE' trece prin N. Deci, *cercurile circumscrise celor patru triunghiuri* OED, OE'D', ECE', D'CD *formate de laturile unui patrulater complet* OECD'DE' *trec prin punctul* N *al lui* MIQUEL *al patrulaterului.*

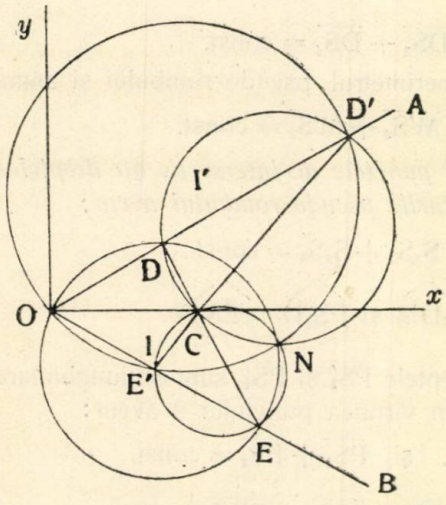


Fig. 1.

2. *Cuartica piriformă.* Când D'E' tinde către DE atunci cercurile DCD', ECE' (Fig. 1) tind către cercurile trecând prin C și tangente respectiv în D și E la dreptele OA și OB. Punctul N de intersecție al cercurilor DCD' și ECE' tinde către *punctul de intersecție* M *al cercurilor trecând prin* C *și tangente în* D *și* E *la* OA *și* OB. Când DE variază trecând prin C, *locul lui* M *este o curbă* (M), care, vom vedea că este o cuartică piriformă.

3. *Altă proprietate a curbei.* M este limita punctului de intersecție al cercurilor ODE, OD'E'. Deci, este punctul caracteristic

al cercului variabil ODE, adică punctul de contact al acestui cerc cu înfăşurătoarea sa. Aşa dar *curba* (M) *este înfăşurătoarea cercului variabil* ODE, când DE se mişcă în jurul lui C.

4. *Centrul cercului variabil* ODE *descrie o iperbolă* (I). Dreapta DE trecând punctul C fix, determină pe OA şi OB două diviziuni (punctuale) D şi E, între care există o corespondenţă de ordinul întâiu (liniară). Deci, centrul I al cercului ODE, care este la intersecţia perpendicularelor pe mijloacele lui OD şi OE, descrie o conică. Considerând cazul când DE este paralelă cu OA, atunci D este la infinit, centrul I este la infinit în direcţia perpendicularei pe mijlocul lui OE, adică a perpendicularei pe OB. Conica este o iperbolă (I) cu direcţiile asimptotice perpendiculare pe laturile OA şi OB ale unghiului AOB, centrul este pe bisectoarea interioară OC, iar un vârf este punctul O.

Luând ca axe perpendiculare Ox şi Oy bisectoarele unghiului AOB, fie $y = ax$, $y + ax = 0$ ecuaţiile laturilor unghiului AOB şi C (c, o). Ecuaţia dreptei DE este $y = m(x - c)$. Ecuaţia cercului ODE este aceea a unei conice circumscrisă triunghiului format de dreptele OA, DE, OB, adică este de forma

$$y^2 - a^2x^2 + \lambda[y - m(x-c)](y - ax) + \mu(y + ax)[y - m(x-c)] = 0.$$

Scriind că reprezintă un cerc, adică să fie egali coeficienţii lui x^2 şi y^2, iar acela al lui xy să fie zero, avem:

$$ma(\lambda - \mu) - (\lambda + \mu) = 1 + a^2 \quad , \quad a(\lambda - \mu) = -m(\lambda + \mu)$$

$$\lambda - \mu = \frac{m(1 + a^2)}{a(1 + m^2)} \quad , \quad \lambda + \mu = -\frac{1 + a^2}{1 + m^2}.$$

Ecuaţia cercului ODE este

$$(1) \quad (x^2 + y^2)(m^2 - a^2) - mc(1 + a)(mx + y) = 0.$$

Locul centrului acestui cerc este dat de

$$x = \frac{m^2c(1 + a^2)}{2(m^2 - a^2)} \quad , \quad y = \frac{mc(1 + a^2)}{2(m^2 - a^2)}.$$

De unde $x = my$ şi eliminând pe m, se obţine

$$x^2 - a^2y^2 - \frac{c}{2}(1 + a^2)x = 0,$$

care arată că este o iperbolă (I), cu direcţiile asimptotice perpendiculare pe laturile unghiului AOB, cu un vârf în O şi centrul pe bisectoarea OC a unghiului AOB.

5. *Ecuația curbei* (M). Curba (M) este înfășurătoarea cercului (1),

$$(2)\quad m^2[x^2+y^2-c(1+a^2)x]-mc(1+a^2)y-a^2(x^2+y^2)=0,$$

și se obține eliminând m între ecuație și derivata în raport cu m. Fiind de gradul al doilea în m, se obține scriind că este zero realizantul ecuației (2) de gradul al doilea în m, și avem ecuația curbei (M)

$$(x^2+y^2)^2-(1+a^2)\,c\,(x^2+y^2)\,x+c^2\frac{(1+a^2)^2}{4a^2}y^2=0.$$

Se obține reprezentarea parametrică rațională tăind curba cu cercul

$$x^2+y^2=\frac{c\,(1+a^2)}{2a}\,yu\,;\ \text{avem:}$$

$$y\,(u^2+1)=2aux\quad,\quad x=(1+u^2)\lambda\quad,\quad y=2a\lambda u,$$

$$x=\frac{c\,(1+a^2)\,u^2\,(1+u^2)}{1+2\,(1+2a^2)\,u^2+u^4}\quad,\quad y=\frac{2ac\,(1+a^2)\,u^3}{1+2\,(1+2a^2)\,u^2+u^4}\,.$$

In coordonate polare, curba (M) are ecuația

$$r^2-c\,(1+a^2)\,r\cos\theta+\frac{c\,(1+a^2)^2}{4a^2}\sin^2\theta,$$

de unde

$$r=\frac{1}{2}c\,(1+a^2)\left(\cos^2\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-\frac{\sin^2\theta}{a^2}}\right).$$

Curba (M) *este o cuartică bicirculară piriformă* [1]) (Fig. 2), simetrică în raport cu Ox, tangentă la Ox în origine, care este un punct de întoarcere; tangentă la laturile OA și OB ale unghiului AOB în punctele

$$\left(\frac{1}{2}c\ ,\ \pm\frac{1}{2}ac\right);$$

taie din nou axa Ox în punctul de abscisă $c\,(1+a^2)$, unde tangenta este perpendiculară pe Ox.

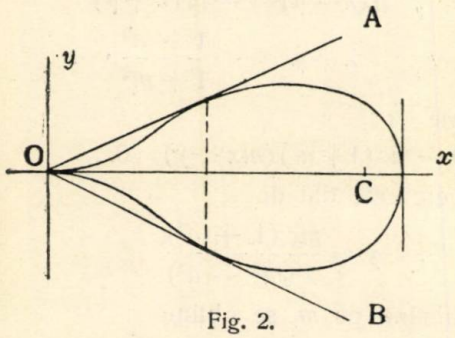


Fig. 2.

1) Studiată de HUGGENS (1657); WALLIS (1685); OSSIAN BONNET (*Nouvelles Annales de Math.*, 1884); BROCARD (*Nouvelle correspondance Math.*, 1880 și în *Mathesis*, 1883); GOMER TEIXEIRA, *Traité des courbes spéciales remarquables*, t. I, 1908, p. 289.

6. *Altă proprietate a cuarticei piriforme.* Fie I şi I′ (Fig. 1) centrele cercurilor ODE, OD′E′, care se taie în N. ON este perpendiculară pe II′ şi N este simetricul lui O faţă de II′. La limită când cercul OD′E′ tinde către ODE, dreapta II′ tinde către tangenta în I la iperbola (I). Deci M, limita lui N, este simetricul lui O faţă de piciorul perpendicularei din O pe tangenta la iperbola (I). Aşa dar, *cuartica piriformă* (M) *este simetrica faţă de* O, *a podarei iperbolei* (I) *în raport cu vârful său* O [1]).

7. Curba (M) am găsit-o ca *bază* în studiul mişcării unei figuri plane variabile cu păstrare de similitudine, iar M este centrul instantaneu de mişcare şi apare în altă revistă.

N. ABRAMESCU.

ASUPRA UNOR ÎNSUMĂRI

Nota D-lui GH. D. SIMIONESCU „*Calculul unor sume*“ publicată la pag. 83 a Volumului XLIII al *Gazetei Matematice*, precum şi exerciţiul *D-sale* Nr. VII. 287 propus la pag. 68 din Vol. IV al „*Suplimentului*“, mi-au sugerat ideia a două formule sumatorii interesante, pe cari îmi propun a le stabili în cele ce urmează.

* * *

I. Fie

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$$

termenii consecutivi ai unei *progresiuni aritmetice de ordinul m* şi $\Delta^k a_i$, diferenţa de ordinul k a termenului de rang i al acestei progresiuni.

Se cere să se calculeze suma:

$$(1)\qquad S_n = C_n^0 a_0 + C_n^1 a_1 + C_n^2 a_2 + \ldots + C_n^n a_n$$

unde simbolul C_n^i reprezintă numărul combinărilor de n obiecte luate câte i.

1) Cu aceasta se consideră rezolvată problema 4794 din *Gazeta Matematică*, t. 42, 1937, p. 392.

Pentru aceasta vom scrie suma S_n condensat, sub forma:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a_i \tag{2}$$

şi vom ţine seamă de relaţia:

$$a_i = \sum_{k=0}^{m} C_i^k \Delta^k a_0, \tag{3}$$

care este caracteristică termenilor unei progresiuni aritmetice de ordinul m.

In virtutea relaţiei (3), relaţia (2) se va scrie:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \left(C_n^i \sum_{k=0}^{m} C_i^k \Delta^k a_0 \right)$$

sau, ceea ce e tot una:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{m} C_n^i C_i^k \Delta^k a_0 \right) \tag{4}$$

de unde, intervertind ordinea însumărilor, avem:

$$S_n = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i C_i^k \Delta^k a_0 \right)$$

şi în cele din urmă:

$$S_n = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{i=k}^{n} C_n^i C_i^k \right) \Delta^k a_0. \tag{5}$$

Dacă notăm acum:

$$\varphi_k^n = \sum_{i=k}^{n} C_n^i C_i^k, \tag{6}$$

relaţia (5) se va putea scrie încă şi sub forma:

$$S_n = \sum_{k=0}^{m} \varphi_k^n \Delta^k a_0. \tag{7}$$

In felul acesta ne mai rămâne să calculăm suma φ_k^n definită prin relaţia (6).

Ori, se observă foarte uşor că avem:

$$C_n^i = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots(n-i+1)}{1.2\dots k.(k+1)(k+2)\dots i}$$

$$= C_n^k \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\dots(n-i+1)}{(k+1)(k+2)\dots i},$$

$$C_i^k = C_i^{i-k} = \frac{i(i-1)(i-2)\dots(k+1)}{1.2\dots(i-k)}$$

de unde, urmează:

$$C_n^i C_i^k = C_n^k \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\dots(n-i+1)}{(k+1)(k+2)\dots i} \cdot \frac{i(i-1)\dots(k+1)}{1.2\dots(i-k)}$$

adică:

$$C_n^i C_i^k = C_n^k \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\dots(n-i+1)}{1.2\dots(i-k)} = C_n^k C_{n-k}^{i-k}.$$

Ţinând seama de ultimul rezultat, relaţia (6) se va scrie:

$$(8) \qquad \varphi_k^n = C_n^k \cdot \sum_{i=k}^{n} C_{n-k}^{i-k}$$

şi cum avem:

$$\sum_{i=k}^{n} C_{n-k}^{i-k} = C_{n-k}^0 + C_{n-k}^1 + \dots + C_{n-k}^{n-k} = 2^{n-k},$$

în cele din urmă deducem:

$$(9) \qquad \varphi_k^n = C_n^k \cdot 2^{n-k}$$

aşa încât (7), la rândul său, va deveni:

$$(10) \qquad \boxed{S_n = \sum_{k=0}^{m} C_n^k \cdot 2^{n-k} \cdot \Delta^k a_0}.$$

Avem astfel în relaţia (10) una din formulele sumatorii ce voiam să stabilesc.

* * *

II. In condiţiunile problemei de adineauri fie, ceva mai general, să se calculeze suma:

$$(11) \qquad S_n(x) = C_n^0 a_0 + C_n^1 a_1 x + C_n^2 a_2 x^2 + \dots + C_m^n a_n x^n.$$

Urmând procedeul din cazul precedent şi notând de astă dată:

$$(12) \qquad \varphi_k^n(x) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i C_i^k x^{i-k}$$

se deduce relaţia:

$$(13) \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{m} x^k \varphi_k^n(x) . \Delta^k a_0 .$$

In ceea ce priveşte suma particulară $\varphi_k^n(x)$, absolut pe aceeaşi cale, se deduce că aceasta are expresia:

$$(14) \qquad \varphi_k^n(x) = C_n^k \sum_{i=k}^{n} C_{n-k}^{i-k} . x^{i-k} .$$

Având încă în vedere relaţia:

$$\sum_{i=k}^{n} C_{n-k}^{i-k} x^{i-k} = C_{n-k}^0 + C_{n-k}^1 x + C_{n-k}^2 x^2 + \ldots + C_{n-k}^{n-k} x^{n-k} = (1+x)^{n-k}$$

în cele din urmă rezultă:

$$(15) \qquad \varphi_k^n(x) = C_n^k . (1+x)^{n-k}$$

aşa încât relaţia (13), la rândul său, devine:

$$(16) \qquad \boxed{S_n(x) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k x^k (1+x)^{n-k} \Delta^k a_0} .$$

Relaţia (16) constitue a doua formulă sumatorie ce-mi propuneam a stabili. Ea generalizează, după cum se vede, relaţia (10) deoarece pentru $x = 1$, ea se reduce la aceasta din urmă.

* * *

Observaţii. Dacă ţinem seama de proprietatea care ne spune că, termenul general al unei progresii aritmetice de ordinul m este un polinom de gradul m în raport cu rangul lui, considerat drept variabilă, se poate arăta că suma S_n este exprimabilă cu ajutorul sumelor particulare definite de D-l GH. D. SIMIONESCU în nota *D-sale* pe care am citat-o la începutul acestui articol.

In acelaşi mod se poate arăta apoi că suma $S_n(x)$ este exprimabilă cu ajutorul unor sume particulare — polinoame de x — analoage acelora ale *D-sale*.

EUGEN VIŞA
Profesor Secundar, Blaj.

ASUPRA PUNCTELOR LUI FEUERBACH

In *Gazeta Matematică* au mai fost stabilite condiţiile ce trebuesc îndeplinite de un triunghiu ABC, pentru ca unul din punctele lui FEUERBACH să fie situat pe o bisectoare de D-nii: V. THÉBAULT (vol. XL, pag. 278), I. ŢIŢEICA (vol. XLI, pag. 476) şi M. POSTELNICESCU (vol. XLIII, pag. 297). In cele ce urmează voiu regăsi aceleaşi condiţii, pe o cale geometrică simplă.

Pentru aceasta fie φ, φ_a, φ_b, φ_c punctele lui FEUERBACH; O, O_9, I, H notaţiile obişnuite şi A′ intersecţia lui $\overline{AI}$ cu cercul circumscris triunghiului ABC.

Dela început trebue remarcat că dacă φ se află pe una din bisectoare, spre exemplu pe $\overline{AI}$ şi φ_a se va găsi pe ea. Reciproca este adevărată.

Aceasta este uşor de demonstrat ţinând seama că $A\varphi_a$, $B\varphi_b$, $C\varphi_c$ sunt concurente într'un punct M de pe $\overline{IO_9}$ (conjugatul armonic al lui φ în raport cu I şi O_9 — *Gazeta Matematică* vol. XL, pag. 73). Dacă φ este situat pe $\overline{AI}$, tot pe $\overline{AI}$ se va găsi punctul M şi deci şi φ_a care aparţine dreptei $\overline{AM}$. Reciproc, dacă φ_a este pe $\overline{AI}$ şi O_9 va fi pe $\overline{AI}$ şi deci şi φ care aparţine dreptei $\overline{IO_9}$.

Fiind stabilită propoziţia de mai sus, e suficient să presupun că φ se află pe o bisectoare, pentru a regăsi condiţiile şi pentru ca φ_a, φ_b, φ_c să se afle situate tot pe o bisectoare.

Dacă φ se află pe $\overline{AI}$, această dreaptă va trece prin O_9 (mijlocul lui $\overline{OH}$) şi cum $\overline{OA'} \parallel \overline{AH} \perp \overline{BC}$, patrulaterul AOA′H este paralelogram; dar $\overline{A'O} = \overline{AO} = R$, deci OAA′H este romb; atunci $\overline{AH} = \overline{AO} = R$ dar

$$\overline{AH} = 2R \cos A$$

deci

$$\hat{A} = 60^0.$$

Mai rămâne de studiat cazul când $\overline{OH}$ se confundă cu $\overline{AI}$, adică atunci când triunghiul ABC este isoscel. In acest caz, φ şi φ_a se găsesc totdeauna pe $\overline{AI}$ ($\sphericalangle B = \sphericalangle C$).

VICTOR L. FLORESCU.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „V. CRISTESCU"

Subsemnaţii, membri în Comisiunea pentru premiul „V. CRISTESCU", cercetând articolele, notele şi problemele rezolvate de trigonometrie publicate în cursul anului 1937—38, am hotărît să decernăm premiul Domnului D. MAVRODIN student la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti, pentru soluţia dată problemei 4238, publicată la pag. 369. Domnul MAVRODIN este citat deasemeni printre cei mai buni rezolvitori ai problemelor de trigonometrie 4248 şi 4378. Afară de această activitate, D-sa este unul dintre cei mai buni corespondenţi ai *Gazetei Matematice* şi merită cu prisosinţă acest premiu, în valoare de lei 5.000, (cinci mii lei).

COMISIUNEA
PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „V. CRISTESCU":
GH. TH. GHEORGHIU, M. NICULESCU, AL. BUNESCU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în şedinţa Adunării generale din 23 Februarie 1939.

NOTE MATEMATICE

40. *Acum o sută de ani în lumea matematică.* (Date culese în Biblioteca Seminarului Matematic din publicaţiile timpului).

In Germania, la Göttingen, în cadrul lucrărilor pe anul 1839 a societăţii pentru studiul magnetismului terestru, GAUSS publică o lucrare fundamentală pentru teoria potenţialului întitulată „Teoreme asupra forţelor atractive şi repulsive care acţionează în raport invers cu patratul distanţelor".

Interesul deosebit şi imediat ce s'a arătat de matematicienii şi fizicienii timpului acestei lucrări, face să apară traduceri complete ale ei, în 1842, în Franţa *(Journal de Liouville)*, v. 7, pp. 273—324) şi în Anglia (Taylor's Scientific memoirs) şi a unui rezumat în *Chambridge Mathematical Journal*, v. *III*, p. 189 şi u. Cu această ocazie se ridică vălul uitării de pe memoriul lui G. GREEN „Cercetări asupra aplicaţiunilor analizei matematice la teoria electricităţii şi magnetismului" (Nottingham, 1828), acesta republicându-se începând cu 1850 în *Crelle's Journal* (v. 39, 44, 47).

In primele 18 paragrafe ale lucrării sale, GAUSS stabileşte riguros unele proprietăţi generale ale potenţialului de volum şi de suprafaţă, studiate în parte de LAPLACE şi POISSON. Se demonstrează de ex., ecuaţia lui POISSON pentru punctele interioare massei, se arată chipul de variaţie a potenţialului de suprafaţă şi a derivatelor lui prime ş. a. In paragrafele următoare (19—37, GAUSS stabileşte o mulţime de teoreme nouă, dintre care multe acum îi poartă numele. Astfel § 20 conţine ceea ce numim azi teorema lui GAUSS asupra valorii medii a potenţialului. Rezultatul fundamental al lucrării, pe care autorul însuşi îl consideră ca cel mai important, coincide cu ceea ce se chiamă astăzi *principiul lui* DIRICHLET, care afirmă existenţa soluţiei unei probleme pe contur pentru un laplacian. GAUSS, ca şi mai târziu DIRICHLET, se bazează în demonstraţie pe faptul că o anume integrală admite un minim. Câte sclipiri de geniu s'au consacrat de atunci încolo cercetării valabilităţii acestui principiu de un WEIERSTRASS, un POINCARÉ, un HILBERT ! Ce impuls uriaş a primit calculul variaţiilor graţie acestor studii !

Cităm din § I : „Schema matematică a mai multor fenomene din natură ne-o făurim presupunând anumite forţe ale căror acţiuni se exercită între părţile cât de mici ale corpurilor invers proporţional cu patratul distanţelor. In această mulţime de fenomene e cuprinsă în primul rând gravitaţia universală... fenomene magnetice... acţiunea reciprocă ce exercită între ele fluidele electrice... Acţiunea reciprocă a unui element liniar al unui curent galvanic şi al unui element al fluidului magnetic (adminţând că acesta din urmă există) e şi ea invers proporţională cu patratul, distanţei însă forţa motrice nu are direcţia dreptei care le uneşte... Pentru două elemente de curent galvanic (după teoria lui AMPÈRE)... chipul în care forţa depinde de direcţia curenţilor e ceva mai complicată.

Ne vom mărgini aici la primele trei cazuri în care forţele acţionează în direcţia dreptelor ce unesc respectiv elementele două câte două şi au o intensitate proporţională cu massele elementelor şi invers proporţională cu patratul distanţelor între ele.

„Subliniem însă că mai multe din teoriile noastre se aplică cu uşoare modificări în alte cazuri ale căror tratare voim să o rezervăm unui memoriu ulterior".

D. M.

(Seminarul Matematic, Iaşi).

41. *Restabilirea unei priorităţi.* La pag. 25, Vol. XLII, *Gazeta Matematică*, D-l V. THÉBAULT dă soluţia următoarei probleme:

„Produsul a 9 numere întregi consecutive nu pote fi un cub perfect"

care a fost propusă de D-l I. DOBROVICI (Bârlad) în *Journal de Mathématique Elémentaires*, Vol. XXVII, 1902/3, pag. 68 sub numărul 5425.

Răsfoind *Gazeta Matematică* Vol. III, găsesc rezolvată la pag. 279 aceeaşi problemă care a fost propusă de răposatul I. GHIBALDAN în Vol. II, pag. 123 sub Nr. 185. Vol. II, *Gazeta Matematică* a apărut în 1896/97. Rezultă că fostul membru fondator al *Gazetei Matematice* are dreptul la prioritate asupra acestei probleme. Adaug că soluţia dată de D-l I. GHIBALDAN în Vol. III este identică cu aceea dată acum, după peste 30 ani. Incă o dată deci: *nil novi sub sole.*

G-L GH. BUICLIU.

42. *Numere interesante cu 10 cifre diferite* [1]). 1°. Pentru N_3 începând cu 4 am mai găsit următoarele 10 soluţiuni pe lângă cele 156 soluţiuni publicate de D-l G-L GH. BUICLIU în nota de la pag. 533, Vol. XLIII:

N_3	N	N_3	N
401 597 862	1 204 793 586	421 597 860	1 264 793 580
401 965 782	1 205 897 346	425 617 980	1 276 853 940
401 978 256	1 205 934 768	457 621 980	1 372 865 940
417 982 560	1 253 947 690	459 821 760	1 379 465 280
419 782 560	1 259 347 680	462 175 980	1 386 527 940

2°. In nota dela pag. 581 Vol. XLIII în coloana N_p se înlocueşte numărul 564 281 079 prin numărul 564 281 790.

---

1) Urmare la Nota dela pag 472 Vol. XLIV, *„Gazeta Matematică"*.

3°. La cele 150 soluțiuni publicate în nota dela pag. 581 Vol. XLIII pentru N_3 începând cu 5, am mai găsit următoarele 30 de soluțiuni:

N_3	N	N_3	N
501 249 876	1 503 749 628	564 028 179	1 692 084 537
502 489 761	1 507 469 283	564 179 028	1 692 537 084
502 498 761	1 507 496 283	564 179 280	1 692 537 840
502 764 891	1 508 294 673	578 019 642	1 734 058 926
502 876 491	1 508 629 473	578 021 964	1 734 065 892
510 249 876	1 530 749 628	578 196 420	1 734 589 260
512 498 760	1 537 496 280	580 179 642	1 740 538 926
512 764 890	1 538 294 670	580 197 462	1 740 592 386
541 798 260	1 625 394 780	581 796 402	1 745 389 206
541 978 260	1 625 934 780	581 796 420	1 745 389 260
542 601 978	1 627 805 934	582 019 746	1 746 059 238
560 179 824	1 680 539 472	596 401 782	1 789 205 346
560 197 824	1 680 593 472	596 402 178	1 789 206 534
560 241 798	1 680 725 394	596 420 178	1 789 260 534
564 027 918	1 692 083 754	596 421 780	1 789 265 340

STELIAN CETĂȚEANU.

43. *Asupra indicatorilor.*

Se știe că avem:

1) $$\varphi(N) \leqslant N - 1.$$

Imi propun să restrâng și mai mult această condiție.

Fie $\varphi(N)$ numărul numerilor prime cu N și mai mici ca el și $n(N)$ numărul divizorilor lui $N = a^{\alpha}.b^{\beta}\ldots l^{\lambda}$; atunci avem:

2) $$N \geqslant \varphi(N) + n(N) - 1$$

unde trebue să scădem 1 deoarece intră și ca număr prim și ca divizor.

Aceasta ne permite să scrim că:

3) $$\varphi(N) \leqslant N - [(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1) - 1]$$

condiție care restrânge mai mult intervalul din 1).

Deasemenea, dacă $\Sigma(N)$ este suma numerilor prime cu N şi mai mici decât el, iar $s(N)$ este suma divizorilor lui N, atunci avem:

$$4) \qquad \frac{N(N+1)}{2} \geqslant \Sigma(N) + s(N) - 1$$

Dar cum:

$$\Sigma(N) = N \cdot \frac{\varphi(N)}{2}$$

şi

$$s(N) = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdots \frac{l^{\lambda+1}-1}{l-1}$$

urmează că:

$$5) \qquad \varphi(N) \leqslant N + 1 - \frac{2[s(N)-1]}{N}.$$

In sfârşit, dacă $P(N)$ reprezintă produsul numerilor prime cu N şi mai mici decât el şi $p(N)$ reprezintă produsul divizorilor lui N, atunci avem:

$$6) \qquad N! \geqslant P(N) \times p(N).$$

Dar ştim că:

$$P(N) = \frac{N!\,\Pi\left(\frac{N}{ab}\right)!\,\Pi\left(\frac{N}{abcd}\right)!\ldots}{\Pi\left(\frac{N}{a}\right)!\,\Pi\left(\frac{N}{abc}\right)!\ldots\,\Pi a^{\frac{\varphi(N)}{a-1}}\ldots}$$

şi

$$p(N) = N^{\frac{1}{2}n(N)}$$

urmează că:

$$7) \qquad \varphi(N) \geqslant \frac{\operatorname{Log}\left[N^{\frac{1}{2}n(N)} \dfrac{\Pi\left(\frac{N}{ab}\right)!\,\Pi\left(\frac{N}{abcd}\right)!\ldots}{\Pi\left(\frac{N}{a}\right)!\,\Pi\left(\frac{N}{abc}\right)!\ldots}\right]}{\operatorname{Log}\left[\Pi a^{\frac{1}{a-1}}\ldots\right]}.$$

Aplicațiuni numerice.

1) Fie $N = 7$ atunci avem:

După 3) și 5):

$$\varphi(7) \leqslant 6.$$

După 7) avem:

$$\varphi(7) \geqslant 6.$$

2) Fie $N = 7^2$ atunci avem:

După 3):

$$\varphi(7^2) \leqslant 48.$$

După 5):

$$\varphi(7^2) \leqslant 50 - \frac{16}{7}.$$

După 7):

$$\varphi(7^2) \geqslant 6 \cdot \frac{\operatorname{Log} \frac{7^2}{6!}}{\operatorname{Log} 7}.$$

3) Fie $N = 3^3 \cdot 5^2$ atunci avem:

După 3):

$$\varphi(3^3 \cdot 5^2) \leqslant 3^3 \cdot 5^2 - 11.$$

După 5):

$$\varphi(3^3 \cdot 5^2) \leqslant 3^3 \cdot 5^2 - \frac{601}{225}.$$

După 7):

$$\varphi(3^3 \cdot 5^2) \geqslant 8 \cdot \frac{\operatorname{Log} \frac{3^{13} \cdot 5^9}{224!\ 46 \cdot 47 \ldots 134}}{4 \operatorname{Log} 3 + 2 \operatorname{Log} 5}.$$

* * *

Din cele de mai sus se mai poate deduce lesne că:

8) $$\Sigma(N) \leqslant \frac{N(N+1)}{2} - s(N) + 1$$

și

$$P(N) \leqslant \frac{N!}{p(N)}$$

sau:

9) $$P(N) \leqslant \frac{(N-1)!}{N^{\frac{1}{2} n(N) - 1}}.$$

CPT. C-DOR I. LINTEȘ.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXVII. Fascicola I. Ianuarie 1939. Buenos Aires. Determinarea singularităţilor curbelor unicursale de ANTONIO VALEIRAS.

Idem. Fascicola II. Februarie 1939. Buenos Aires. Studiul elementar al complexelor bihiperbolice de JUAN M. ALESSI. Determinarea momentelor probabilităţilor hipergeometrice ordinare de C. E. DIEULEFAIT.

Boletin Matematico. Anul XII. Nr. 3. Aprilie 1939. Buenos Aires. Generalizarea teoremelor PAPPUS-GULDIN de S. SISPANOV. Asupra geometriei analitice complexe de B. I. BAIDAFF.

Idem. Anul XII. Nr. 4. Aprilie 1939. Buenos Aires.

Buletinul „I. R. E.". Anul VII. Nr. 1. Martie 1939. Bucureşti. Folosirea integrală a cursurilor de apă în cadrul valorificării bogăţiilor naturale de GR. C. VASILESCU. Contribuţia de ameliorare a factorului de putere în economia naţională de GIOVANNI PARIS. Funcţiuni periodice şi aplicaţiunile lor în electricitate de E. ABASON.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 45. Nr. 4. Aprilie 1939. Menasha, Wis & New-York.

Journal de Mathématiques élementaires. Anul 63. Nr. 15. 1 Mai 1939. Paris.

Idem. Anul 63. Nr. 16. 15 Mai 1939. Paris.

Mathematica. Volumul XIV. 1939. Cluj. Über sphärische kurven von A. HOBORSKI, Sur quelques limites supérieures des modules des zéros d'un polynome, par D. MARKOVIC, Conditions d'uniformité ou de multiformité dans le problème plan de DIRICHLET par C. IACOB, Contribution ou catalogue de raccordement pour la carte photographique du ciel par G. BRATU, Sur un mouvement tautochrone par D. V. IONESCU, Sur les surfaces minima applicables sur des surfaces de révolution par G. CĂLUGĂREANU, Sur cetaines invariants homogènes de certaines fonctions entières par G. CĂLUGĂREANU, Invariants de prolongement et fonctionnelles analytiques par G. CĂLUGĂREANU, Recherches sur l'équivalence, la négation et la réciprocité dans le calcul des propositions par E. G. MIHĂILESCU, Sur la sommabilité forte et la sommabilité absolue par J. KARAMATA, Zur Erweiterung des Legendreschen Satzen auf algebraische zahlkörper von S. LUBELSKI, Transformationstheorie der Komplexe [(11) (112)] von K. STRUBECKER.

Über Wurzelabschaetzungen bei algebraischen Gleichungen von H. HADWIGER, Sur les zéros de quelques classes de polynomes par N. OBRECHKOFF, Sur la mesurabilité au sens restreint des esembles-image des fonctions multiformes ou uniformes de variables réelles par A. FRODA, L'apolarité d'une forme binaire et d'une forme cubique, Aplication à la théories des surfaces par N. ABRAMESCU, Sur les fonctions inverses aux fonctions satisfaisant à la condition de BAIRE par W. SIERPINSKI, Bemerkungen zu einigen Trennungssätzen von M. NICOLESCO und S. TAKAHASHI für die Nullstellen der Lösungen von Differential gleichungen, von E. KAMKE, Sur le mouvement relativ par D. V. IONESCU.

Pitagora. Anul IV. Nr. 8—9. Iunie 1939. Arad. Hexagone et Dodécagone réguliers de V. THÉBAULT, Proprietăţi în legătură cu parabola de N. N. MIHĂILEANU, Relaţiuni într'un patrulater de ADRIAN GHEORGHIU.

Revista Matematică Timişoara. Anul XIX. Nr. 3. 15 Mai 1939. Trigonometria patratică (urmare) de V. ALACI

Sphinx, revue mensuelle des questions récréatives. Anul IX. Nr. 6. Iunie 1939. Bruxelles.

Suplimentul Gazetei Matematice. Exerciţii. Anul V. Nr. 9. 1 Iunie 1939.

MIHAIL ŞT. BOTEZ. *Concepţia Idealistă a Matematicilor în Antichitate.* (Extras din revista „Orizonturi", Galaţi, 1939).

MIHAIL ŞT. BOTEZ. *Su la somma di alcune successioni di numeri.* (Extras din Bullettino di matematica 1939). Bologna.

A. GLODEN şi A. MOESSNER. *Diophantische probleme.* (Extras din „The Proceedings of the Indian Academy of Sciences", 1938).

CĂPITAN COMANDOR I. LINTEŞ. *Asupra unor operaţiuni de poligon— Determinarea vitezei iniţiale şi coeficientului balistic.* (Extras din Revista Artileriei Nr. 2. 1939). Timişoara.

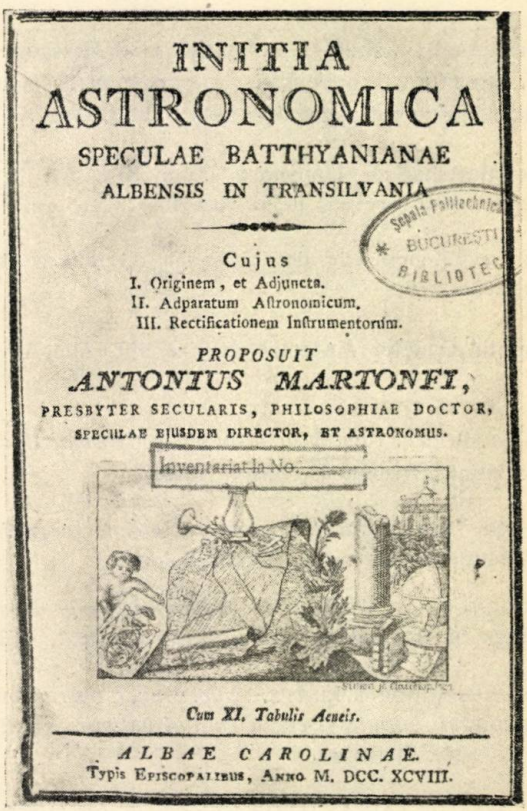
L. NOGUEIRA DE PAULA. *Teoria racional de los sistemas economicos,* tradusă în castelană de JOSE BERRAL SOUTO. Buenos Aires 1939.

J. BERRAL SOUTO. *Interpolacion y ajustamiento de la curva logistic generalizada.* Buenos Aires 1939.

CERERI

285. In Biblioteca Şcoalei Politecnice „REGELE CAROL II" din Bucureşti, se găseşte o carte cu titlul următor :

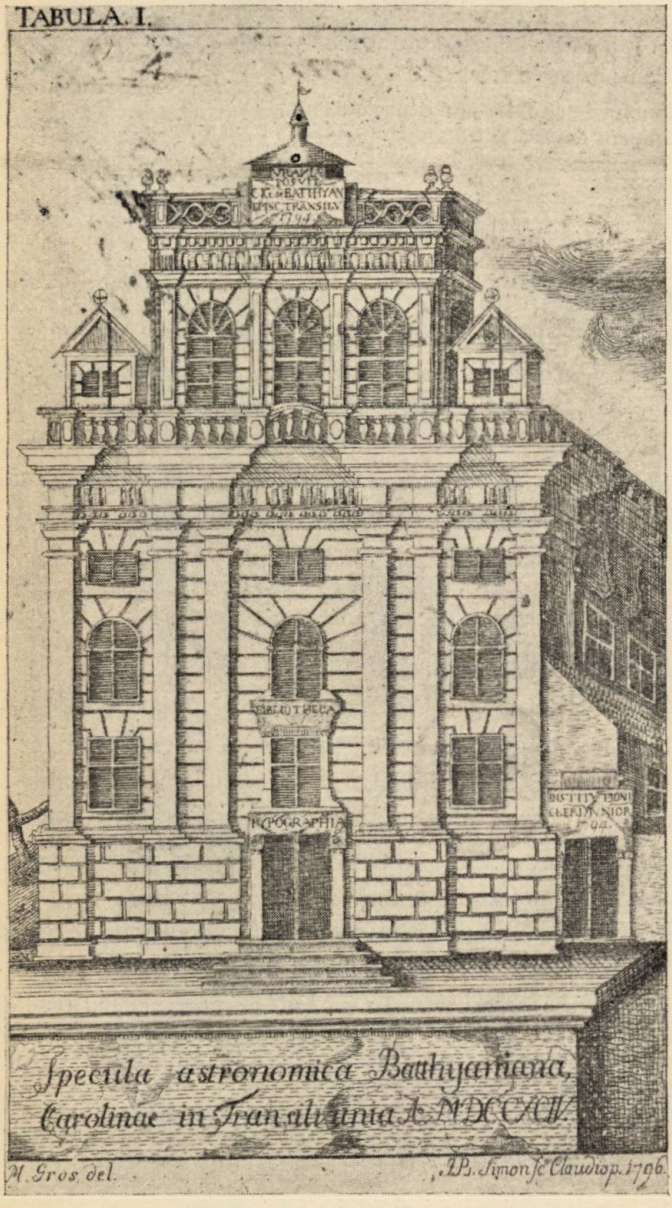
INITIA | ASTRONOMICA | *speculae Batthyanae* | *Albensis in Transilvania* | Cujus | I. Originem, et Adjuncta. | II. Adparatum Astronomicum. | III. Rectificationem Instrumentorum. | Proposuit | ANTONIUS MARTONFI. | Presbyter Secularis, Philosophiae Doctor, | Speciilae Ejusdem Director, et Astronomus. | Cum XI Tabulis Aeneis. | Albae Carolinae. | Typis Episcopalibus, Anno M DCC XCVIII. |


INITIA
ASTRONOMICA
SPECULAE BATTHYANIANAE
ALBENSIS IN TRANSILVANIA
Cujus
I. Originem, et Adjuncta.
II. Adparatum Aſtronomicum.
III. Rectificationem Inſtrumentorum.
PROPOSUIT
ANTONIUS MARTONFI,
PRESBYTER SECULARIS, PHILOSOPHIAE DOCTOR,
SPECULAE EJUSDEM DIRECTOR, ET ASTRONOMUS.
Inventariat la No.
Cum XI. Tabulis Aeneis.
ALBAE CAROLINAE.
Typis Episcopalibus, Anno M. DCC. XCVIII.

Din această carte lipseşte Planşa III. Dacă cineva poate avea un alt exemplar aş dori să am o fotografie după acea planşă, plătind cheltuielile de fotografiere şi expediere la adresa subsemnatului, Bucureşti Strada Răsuri 25.

Ce a devenit Clădirea în care era instalat acel Observator astronomic din Alba-Iulia la finele secolului XVIII ? Reproduc aci după Planşa I vederea acelui Observator. Pe frontispiciul lui era scris: „VRANIA | C. J. G. de

BATTHYAN | E. PISC. TRANSILV. | 1794. | Pe poarta de intrare era scris TYPOGRAPHIA, Deasupra la etaj BIBLIOTHECA iar pe o poartă laterală INSTITVTIONI CLERJ JVNIOR.



Aceste date îmi sunt necesare pentru o recensiune a cărţii sus arătate.

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

G. FONTENÉ. L'hyperspace à $(n-1)$ dimensions. Paris 1892.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

Merchiston Castle and JOHN NAPIER.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2689. *Intr'un triunghiu* ABC *se duc dreptele* BB_1 *şi* CC_1, *care se taie în interior în punctul* O *şi se uneşte* B_1 *cu* C_1. *Dacă notăm ariile* ABC, AB_1C_1, BOC, B_1OC_1 *respectiv cu* S, S_1, S_2, S_3, *să se demonstreze relaţia:*

$$S \times S_3 = S_1 \times S_2 \text{ [1)]}.$$

Soluţia. Se aplică teorema transversalelor triunghiurilor BAB_1 şi CAC_1 tăiate respectiv de transversalele COC_1 şi BOB_1 şi se obţin relaţiunile:

$$OB_1 . C_1B . CA = OB . C_1A . CB_1$$
$$B_1C . OC_1 . BA = B_1A . OC . BC_1$$

care după înmulţire şi simplificare se reduc la

(1) $OB_1 \times OC_1 \times AB \times AC = OC \times OB \times AB_1 \times AC_1$.

Suprafeţele date în enunţ sunt date de expresiunile:

$$2S = AB \times AC \sin A \; ; \; 2S_3 = OB \times OC \sin O$$
$$2S_1 = AC_1 \times AB_1 \sin A \; ; \; 2S_2 = OB_1 \times OC_1 \sin O.$$

Comparând aceste expresiuni cu (1) se găseşte tocmai relaţiunea de demonstrat în enunţ.

Proprietatea se menţine şi când O este exterior triunghiului ABC. Demonstraţia se face la fel.

Pe copertele Volumelor XXV—XXVIII se găsesc citaţi următorii rezolvitori ai acestei probleme: E. BĂLAN, N. CIORĂNESCU, I. COŞEREANU, I. FLORESCU, GH. TH. GHEORGHIU, N. N, MIHĂILEANU, A. NICOLAU, A. NICULESCU, GH. POPESCU, M. SARIAN şi J. ZAIDMAN.

Dela Vol. XXIX încoace nu s'au mai primit soluţiuni.

1) Propunătorul acestei probleme este anonim.

PROBLEMA 3365. *Să se găsească un şir de numere satisfăcând relaţiunea*

$$u_n + u_{n-1} = (u_n - u_{n-1})^2.$$

N. KAUFMANN.

Conform enunţului avem

$$u_{n-1} + u_{n-2} = (u_{n-1} - u_{n-2})^2.$$

Scăzând această relaţiune din cea din enunţ obţinem

$$u_n - u_{n-2} = (u_n - u_{n-2})(u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2})$$

de unde rezultă că între numerele cerute trebue să avem una din condiţiunile

(1) $$u_n - u_{n-2} = 0$$

(2) $$u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2} = 1.$$

Reciproc, numerele care satisfac una din relaţiunile (1) sau (2) satisfac şi relaţiunea din enunţ.

1°. *Cazul relaţiunei (1).* Numerele şirului (1) sunt

$$x\ ,\ y\ ,\ x\ ,\ y, \ldots$$

între care trebue să avem

(3) $$x + y = (x - y)^2$$

Fiind o infinitate de numere, care verifică această relaţiune, avem o infinitate de numere u_i, care verifică relaţiunea (1) şi pe cea din enunţ. Din această infinitate să căutăm forma a acelora raţionale. Ecuaţiunea (3) rezolvată în raport cu x dă

$$x = \frac{2y + 1 \pm \sqrt{8y + 1}}{2}$$

şi punând

$$8y + 1 = k^2$$

vom avea pentru x şi y valorile parametrice

$$x = \frac{k^2 \pm 4k + 3}{8}\ ,\quad y = \frac{k^2 - 1}{8}.$$

In valoarea lui x se poate lua numai semnul $+$, căci k putând lua toate valorile raţionale pozitive sau negative, adoptarea semnului $-$ revine la a schimba pe k în $-k$ şi invers.

Şirul de numere raţionale căutat este deci

$$\frac{k^2+4k+3}{8}\ ,\ \frac{k^2-1}{8}\ ,\ \frac{k^2+4k+3}{8}\ ,\ \frac{k^2-1}{8},\ldots$$

2°. *Cazul relaţiunei (2).* Această relaţiune se mai poate scrie

$$(u_n-u_{n-1})-(u_{n-1}-u_{n-2})=1.$$

Sau punând

$$v_n=u_n-u_{n-1} \tag{4}$$

avem

$$v_n-v_{n-1}=1$$

care arată că numerele v formează o progresie aritmetică cu raţia 1, deci avem

$$v_n=v_0+n$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n=\frac{v_1+v_n}{2}.n=\left(v_0+\frac{n+1}{2}\right)n.$$

In (4) dăm lui n primele n valori întregi consecutive şi obţinem:

$$u_1-u_0=v_1$$
$$u_2-u_1=v_2$$
$$u_3-u_2=v_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{n-1}-u_{n-2}=v_{n-1}$$
$$u_n-u_{n-1}=v_n.$$

De unde prin adunare

$$u_n-u_0=v_1+v_2+\ldots+v_n=\left(v_0+\frac{n+1}{2}\right)n$$

$$\therefore\quad u_n=u_0+nv_0+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$u_{n-1}=u_0+(n-1)\,v_0+\frac{(n-1)\,n}{2}$$

şi deci

$$u_n+u_{n-1}=2u_0+(2n-1)\,v_0+n^2$$
$$u_n-u_{n-1}=v_0+n.$$

Scriind, între aceste sume, relaţiunea din enunţ, obţinem :

$$2u_0 + (2n - 1)\, v_0 + n^2 = (v_0 + n)^2$$

$$\therefore \qquad 2u_0 = v_0 + v_0^2.$$

Dând lui v_0 o valoare arbitrară k şi ducând în valoarea lui u_n precedentă obţinem

$$(5) \qquad u_n = \frac{1}{2}(n + k)(n + k + 1)$$

care este expresia generală a şirului de numere ce răspunde cazului (2).

In concluzie problema are ca soluţiuni două şiruri de numere :

Un şir x, y legate prin relaţiunea (3).

Un şir u_n dat de forma (5) în care k este arbitrar iar n ia toate valorile întregi consecutive.

Notă. 1°. S'au primit la timp soluţiuni bune dela : N. N. ALDEA, †N. BOTEA, O. I. BRAEŞTER, T. V. DIACONESCU, H. P. IONESCU-BISS şi I. C. VASILIU.

Nu am considerat soluţiunile care s'au limitat la examinarea numerelor întregi pozitive, ceea ce nu cerea enunţul problemei.

N. K.

2°. Numerele reale x, y, care formează soluţiunile cazului relaţiunei (1) se pot determina şi geometric. Ele sunt abscisele şi ordonatele tuturor punctelor de pe parabola

$$x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0.$$

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 4369. *Să se determine cu o eroare mai mică de* $^1/_{1000}$ *numărul* x *astfel încât ducând în cercul de rază* R *coardele*

$$\overline{AB} = Rx \quad ; \quad \overline{BC} = 2Rx \quad ; \quad \overline{CD} = 3Rx,$$

coarda AD *care uneşte punctul iniţial cu cel final sa aibă lungimea cea mai mare posibilă.*

N. CIORĂNESCU.

Soluţie dată de D-l PANAIT MAZILU (elev-inginer).

Coarda AD are lungimea cea mai mare posibilă când va trece prin centru ($\overline{AD} = 2R$).

Din triunghiurile dreptunghice ACD şi ABD scoatem relaţiile:

$$\overline{AC} = R\sqrt{4 - 9x^2} \quad \text{şi} \quad \overline{BD} = R\sqrt{4 - x^2}.$$

Aplicăm teorema lui PTOLOMEU în patrulaterul ABCD:

$$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{CB},$$

sau:

$$R^2\sqrt{(4 - 9x^2)(4 - x^2)} = 3R^2x^2 + 4R^2x,$$

de unde rezultă ecuaţia:

$$3x^3 + 7x^2 - 2 = 0.$$

Aplicând şirul lui ROLLE găsim că această ecuaţie are toate rădăcinile reale: una pozitivă şi două negative

$$0 < x_1 < 1 \; ; \; x_3 \text{ şi } x_3$$

sunt separate prin valoarea $-\frac{14}{9}$.

Observăm că fiecare din cele trei coarde este mai mică decât diametrul:

$$3Rx < 2R, \text{ sau}$$

$$x < \frac{2}{3} \text{ în valoare absolută.}$$

Prin urmare trebue respinsă soluţia x_3 care e mai mare în valoare absolută decât $-\frac{14}{9}$.

Calculând cu ajutorul metodelor de aproximaţie celelalte două rădăcini, găsim:

$$x_1 = 0{,}486 \quad \text{şi} \quad x_2 = -0{,}624.$$

Pentru a ne da seama ce reprezintă rădăcina negativă, să considerăm cazul patrulaterelor *convexe* înscrise, unde diametrul AD şi coarda BC apar ca diagonale.

Aplicând teorema lui PTOLOMEU în acest caz, obţinem ecuaţia:

$$3x^3 - 7x + 2 = 0.$$

Observăm că această ecuaţie este transformata în $-x$ a ecuaţiei precedente, deci rădăcina ei pozitivă este chiar rădăcina negativă ($-0{,}624$) schimbată de semn, adică 0,624.

Am găsit deci o interpretare geometrică pentru rădăcina negativă a ecuaţiei iniţiale.

Aşa dar problema are două soluţii: 0,486 şi 0,624.

Observări. 1. Au mai dat soluţii D-nii: CSEKE VILHELM (student mat., Cluj), DIMITRIE MAVRODIN (cl. VII-a lic. M. Eminescu) şi ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE (cl. V-a lic. milit. N. Filipescu), fără să înterpreteze soluţia negativă.

2. D-l CSEKE VILHELM a calculat prin desvoltarea în *fracţia continuă* a rădăcinii pozitive, cele trei zecimale.

PROBLEMA 4666. *Fie* α, β, γ *punctele unde o dreaptă* Δ *intersectează laturile triunghiului ortic* $H_a H_b H_c$ *al triunghiului* ABC.

Să se arate că perpendicularele coborîte din vârfurile triunghiului ABC *respectiv pe dreptele ce trec prin ortocentrul* H *al triunghiului* ABC *şi punctele* α, β, γ *sunt concurente.*

TEODOR GH. COCEA.

Soluţie. Fie α_1, β_1, γ_1 şi A_1, B_1, C_1 intersecţiile perpendicularelor din A, B, C pe H_α, H_β, H_γ respectiv cu aceste drepte şi cu laturile opuse BC, CA, AB ale triunghiului ABC.

Problema revine la a arăta că cevienele AA_1, BB_1, CC_1 în triunghiul ABC sunt concurente.

Se ştie că într'un triunghiu ABC, dreapta determinată de proecţiile unui punct depe înălţimea AH_a pe laturile AB, AC este antiparalelă laturei BC.

Cu acestea să observăm că H fiind un punct pe înălţimea AH_a a triunghiurilor AA_1B şi AA_1C, în aceste triunghiuri $\alpha_1 H_c$ şi $\alpha_1 H_b$ sunt antiparalele respectiv laturilor A_1B şi A_1C; deci din asemănarea triunghiurilor:

$$\overline{AA_1B} \text{ cu } \overline{AH_c\,\alpha_1} \quad \text{şi} \quad \overline{AA_1C} \text{ cu } \overline{AH_b\,\alpha_1}$$

(unde literile sunt scrise în ordinea unghiurilor egale) rezultă:

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AH_c}} = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{H_c\alpha_1}} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AH_b}} = \frac{\overline{A_1C}}{\overline{H_b\alpha_1}} \qquad (1)$$

relaţiuni adevărate şi ca semn în urma ordinei introduse şi cum se constată dacă proectăm vârfurile triunghiurilor pe o axă oarecare orientată, pe care se precizează chiar, semnele rapoartelor.

Prin împărţirea relaţiilor dela (1) obţinem:

$$\frac{\overline{AH_b}}{\overline{AH_c}} = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{H_b\alpha_1}}{\overline{H_c\alpha_1}} \cdot \tag{2}$$

Să observăm că H_b, H_c, H şi α_1 sunt conciclice (pe cercul de diametru AH); deci din asemănarea triunghiurilor:

$$\overline{\alpha_1\alpha H_b} \text{ cu } \overline{H_c\alpha H} \text{ şi } \overline{\alpha_1\alpha H_c} \text{ cu } \overline{H_b\alpha H}$$

rezultă:

$$\frac{\overline{\alpha_1\alpha}}{\overline{H_c\alpha}} = \frac{\overline{H_b\alpha_1}}{\overline{HH_c}} \text{ şi } \frac{\overline{\alpha_1\alpha}}{\overline{H_b\alpha}} = \frac{\overline{H_cA_1}}{\overline{HH_b}} \tag{3}$$

relaţiuni adevărate şi ca semn în virtutea aceloraşi observaţii de sub (1).

Prin împărţirea relaţiunilor dela (3) obţinem:

$$\frac{\overline{H_b\alpha}}{\overline{H_c\alpha}} = \frac{\overline{H_b\alpha_1}}{\overline{H_c\alpha_1}} \cdot \frac{\overline{HH_b}}{\overline{HH_c}} \cdot \tag{4}$$

Ţinând seama în relaţia (2) de relaţia (4) şi ştiind că putem inversa ordinea literilor la numărătorul şi numitorul aceluiaşi raport, fără a schimba semnul; obţinem:

$$\frac{\overline{H_bA}}{\overline{H_cA}} = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{\alpha H_b}}{\overline{\alpha H_c}} \cdot \frac{\overline{HH_c}}{\overline{HH_b}} \cdot \tag{5}$$

Analog obţinem şi relaţiunile:

$$\frac{\overline{H_cB}}{\overline{H_aB}} = \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{\beta H_c}}{\overline{\beta H_a}} \cdot \frac{\overline{HH_a}}{\overline{HH_c}} \tag{6}$$

$$\frac{\overline{H_aC}}{\overline{H_bC}} = \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{\gamma H_a}}{\overline{\gamma H_b}} \cdot \frac{\overline{HH_b}}{\overline{HH_a}} \cdot \tag{7}$$

Inmulţind relaţiunile (5), (6), (7) obţinem, grupând în mod convenabil termenii:

$$\frac{\overline{H_a C}}{\overline{H_a B}} \cdot \frac{\overline{H_c B}}{\overline{H_c A}} \cdot \frac{\overline{H_b A}}{\overline{H_b C}} = \left(\frac{\overline{A_1 B}}{\overline{A_1 C}} \cdot \frac{\overline{B_1 C}}{\overline{B_1 A}} \cdot \frac{\overline{C_1 A}}{\overline{C_1 B}} \right) \cdot \left(\frac{\overline{\alpha H_b}}{\overline{\alpha H_c}} \cdot \frac{\overline{\beta H_c}}{\overline{\beta H_a}} \cdot \frac{\overline{\gamma H_a}}{\overline{\gamma H_b}} \right). \quad (8)$$

Dar H_a, H_b, H_c fiind picioarele înălţimilor triunghiului ABC, avem:

$$\frac{\overline{H_a C}}{\overline{H_a B}} \cdot \frac{\overline{H_c B}}{\overline{H_c A}} \cdot \frac{\overline{H_b A}}{\overline{H_b C}} = -1. \quad (9)$$

Iar prin ipoteză α, β, γ fiind intersecţiile unei drepte Δ cu laturile triunghiului ortic $H_a H_b H_c$, avem:

$$\frac{\overline{\alpha H_b}}{\overline{\alpha H_c}} \cdot \frac{\overline{\beta H_c}}{\overline{\beta H_a}} \cdot \frac{\overline{\gamma H_a}}{\overline{\gamma H_b}} = +1. \quad (10)$$

Ţinând seama deci de relaţiunile (9) şi (10) în relaţiunea (8), rezultă:

$$\frac{\overline{A_1 B}}{\overline{A_1 C}} \cdot \frac{\overline{B_1 C}}{\overline{B_1 A}} \cdot \frac{\overline{C_1 A}}{\overline{C_1 B}} = -1 \quad (11)$$

adică cevienele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente. q. e. d.

Observaţiuni.

1°. Pe relaţunea (8) se observă că putem enunţa şi următoarea proprietate:

Fie α, β, γ picioarele a *trei ceviene concurente* pe laturile triunghiului ortic $H_a H_b H_c$ al triunghiului ABC. Perpendicularele coborite din vârfurile triunghiului ABC respectiv pe dreptele ce trec prin ortocentrul H al triunghiului ABC şi punctele α, β, γ taie laturile opuse ale triunghiului ABC în *trei puncte colineare.*

2°. La această problemă s'au primit numai dela doi buni corespondenţi trei „ne-soluţii", pentrucă sunt complet eronate.

3°. O soluţie în coordonate triliniare s'a primit dela D-l G. G. Constantinescu.

4°. Problema poate admite o generalizare, a cărei căutare o propunem corespondenţilor.

A. G.

PROBLEMA 4808. *Să se găsească cel mai mic patrat perfect ale cărui ultime patru cifre dela dreapta sunt în progresie geometrică.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-nii: D. D. MATEI (Bacalaureat, Iaşi), V. L. FLORESCU (Liceul militar, Târgovişte) şi H. L. REISCHER (Liceul internat, Iaşi).

Problema este un caz particular al rezultatelor date de D-l G-L GH. BUICLIU în articolul *„Numere ale căror patrate se termină cu cifre în progresie aritmetică sau geometrică"*, publicat în *Revista Matematică din Timişoara,* Vol. XV, pag. 37.

Pentru patratele terminate cu 4 cifre în progresie aritmetică s'au găsit, în acelaşi articol, următoarele rezultate:

No. de ordine	Terminaţiunea patratului N^2	Forma generală a rădăcinei N	Cea mai mică valoare a lui N
1^0	. . . 1284	$2500n \pm 722$	722
2^0	. . . 1824	$2500n \pm 2232$	268
3^0	. . . 2481	$5000n \pm 559$ $5000n \pm 1809$	559
4^0	. . . 2841	$5000n \pm 2779$ $5000n \pm 4029$	971
5^0	. . . 4281	$5000n \pm 3091$ $5000n \pm 4391$	609
6^0	. . . 8241	$5000n \pm 329$ $5000n \pm 4079$	329

Se vede din coloana a patra că cea mai mică valoare a lui N, care răspunde enunţului este

$$268^2 = 7\,\mathbf{1824}.$$

Notă. 1°. Majoritatea rezolvitorilor acestei probleme s'au servit de rezultatele găsite în articolul citat din *Revista Matematică din Timişoara*, fără a fi dat rezultatul exact, deaceea nu le citãm numele aici; ei au fost anunţaţi pe copertele numerelor anterioare. Iată de curiozitate, diferitele rezultate date de acei rezolvitori:

$$329^2 = 108241 \quad ; \quad 559^2 = 312481 \quad ; \quad 5268^2 = 27651824.$$

Insuşi propunătorul problemei a dat rezultatul greşit, indicând pe 559^2 ca soluţie.

2°. Au rezolvat problema fără a face uz de articolul citat, dar dând rezultate greşite: D-ra SONIA TUDORAN (Şcoala Centrală, Bucureşti) şi D-l M. D. POPA (Liceul militar, Iaşi).

3°. Unii corespondenţi au dat soluţia complect falşă

$$100^2 = 1.0000$$

considerând că numerele $0, 0, 0, \ldots 0$ sunt în progresie geometrică de raţie 0.

4°. Un corespondent anunţat pe copertele anterioare a examinat şi cazul patratelor având ultimele 4 cifre în progresie aritmetică şi a ajuns la rezultatul greşit

$$137^2 = 18769$$

atunci când rezultatul bun este

$$\boxed{66^2 = 4356}\ .$$

Cazul acesta formează obiectul problemei 4381 rezolvată la pag. 90, Vol. XL unde i s'a dat greşit soluţia

$$116^2 = 13456.$$

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 4902. *Fie* $r = f(\theta)$ *şi* $r_1 = \dfrac{df(\theta)}{d\theta}$ *două curbe în coordonate polare. O dreaptă trecând prin pol taie curbele respectiv in* M *şi* M_1, *făcând cu tangentele duse în aceste puncte unghiurile* V *şi* V_1.

Să se stabilească relaţia:

$$\int \frac{\cos V \sin(V_1 - V)}{\sin V_1}\, d\theta = V + C,\ C \textit{ fiind o constantă.}$$

C. IONESCU-BUJOR.

Se ştie că avem:

$$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'} \qquad \left(r' \equiv \frac{df(\theta)}{d\theta}\right),$$

deci:

$$\operatorname{tg} V_1 = \frac{r'}{r''}\ .$$

Derivând prima egalitate,

$$\frac{1}{\cos^2 V} V' = \frac{r'^2 - rr''}{r'^2} = 1 - \frac{r}{r'} \cdot \frac{r''}{r'}$$

sau:

$$V' = \cos^2 V (1 - \operatorname{tg} V \operatorname{cotg} V_1),$$

deci:

$$V' = \frac{\cos V \sin (V_1 - V)}{\sin V_1}$$

şi prin integrare se obţine relaţia enunţului.

Au soluţionat problema D-nii: D. MAVRODIN (student), MIRCEA A. NEGREA (Brăila), SLT. GR. MARTEŞ, GH. BAZACOV, ORIGEN MĂRCULESCU (Craiova), NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU (Liceul militar N. Filipescu), D. RIPIANU.

C. I. B.

PROBLEMA 4904. *Produsul numerelor prime cu un număr dat şi mai mici decât el este* 37182145; *care este acel număr?*

MAIOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: N. D. ŞTEFĂNESCU şi M. AL. VASILESCU-STABU.

Descompunând numărul în factori primi, avem:

$$37182145 = 1 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19 . 23.$$

Urmează deci că numărul N va fi:

$$N = 2^{\alpha} . 3^{\beta} . M$$

unde α şi β nu pot fi *zero*, căci N ar fi prim şi cu *2* şi *3*, care însă nu intră în produs; iar M este un număr care trebue să conţină în factorii lui primi, numere prime mai mari ca *23*, deoarece, dacă ar conţine numere prime mai mici ca *23*, N s'ar divide cu ei şi atunci n'ar mai fi conform enunţului.

Făcând $\alpha = 1$, $\beta = 1$ şi $M = 29$, atunci:

$$N_{minim} = 6 \times 29 = 174.$$

Dar între *29* şi *174* sunt alte numere prime care nu intră în produs.

Urmează deci că $M = 1$ şi atunci:

$$N = 2^{\alpha} . 3^{\beta}.$$

Cum $N > 23$ atunci $N = 24, 32, 36 \ldots$, dar afară de $N = 24$, celelalte numere sunt prime şi cu *29*, care nu intră în produs.

Singura soluţie este dar $N = 24$.

Observaţii:

1. Observăm că numărul factorilor produsului este *8*, deci putem admite că $\varphi(N) = 8$, adică numărul numerelor mai mici decât N şi primi cu el este *8*. Atunci:

$$N = 15, 16, 20, 24, 30.$$

Dintre acestea nu corespund decât $N = 24$.

2. O verificare se poate face aplicând formula care ne dă produsul numerelor prime cu un număr dat şi mai mici decât el (G. M. XXXI, 83) adică:

$$P(24) = \frac{24!\ 4!\ 6^4}{8!\ 12!\ 2^{12} . 3^8} = 1 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19 . 23.$$

O astfel de verificare a făcut D-l M. AL. VASILESCU-STABU.

3. Domnişoara SONIA M. TUDORAN (Şc. Centrală), a căutat să soluţioneze problema prin încercări.

I. L.

PROBLEMA 4930. *Fie* ABCD *un paralelogram şi* A'B'C'D' *paralelogramul format de mediatoarele lui* ABCD. *Să se arate că:*

1°. *Cele două paralelograme sunt asemenea.*

2°. *Au acelaşi centru de greutate.*

3°. *Diagonalele respective sunt perpendiculare.*

4°. *In cazul particular când* $\sphericalangle (AB, AD) = 45^{\circ}$, *romburile* AA'CC', BB'DD' *devin patrate.*

ALEXANDRU V. NICULESCU.

1°. Din construcţie, cele două paralelograme au laturile perpendiculare, deci şi unghiurile corespunzătoare sunt egale. Pentru asemănare trebue ca laturile să fie proporţionale.

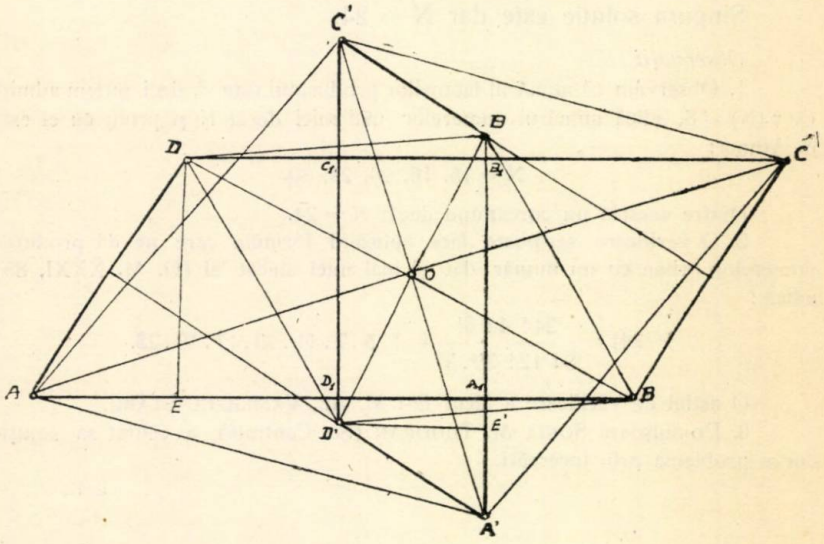
Fie E şi E' picioarele perpendicularelor coborîte din D şi D' pe laturile AB şi A'B' şi $A_1B_1C_1D_1$ intersecţiile laturilor celor două paralelograme

$$\overline{AE} = \overline{D_1A_1} = \overline{D'E'}.$$

Insă în triunghiurile AED şi A′E′D′ avem:

$$\overline{AE} = \overline{AD}\cos A$$

$$\overline{D'E'} = \overline{A'D'}\sin A \quad [\hat{A} = \hat{A}']$$



de unde:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \text{tg}A.$$

Urmând acelaşi procedeu, găsim:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{D'C'}} = \text{tg}A \ldots$$

deci

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{D'C'}} = \ldots \text{tg}A$$

prin urmare paralelogramele sunt asemenea.

2°. Centrele de greutate se află la intersecţia diagonalelor, deci trebue să demonstrăm că O coincide cu intersecţia A′C′, B′D′.

Observăm că punctele A′, B′, C′, D′ sunt prin construcţie centrele cercurilor circumscrise respectiv triunghiurilor

ADC, DBC, ABC şi DAB.

Dar

$$ADC = ABC \text{ şi } DBC = DAB, \text{ deci}$$

$$\overline{A'A} = \overline{A'D} = \overline{A'C} = \overline{C'A} = \overline{C'B} = \overline{C'C} \text{ şi}$$

$$\overline{B'D} = \overline{B'B} = \overline{B'C} = \overline{D'A} = \overline{D'D} = \overline{D'B}.$$

Prin urmare figurile AA'CC' şi BB'DD' sunt nişte romburi.

Diagonalele celor două romburi se taie în părţi egale, deci O se află la jumătatea diagonalelor $\overline{A'C'}$ şi $\overline{B'D'}$ adică se confundă cu centrul de greutate al paralelogramului A'B'C'D'.

Totodată am demonstrat şi punctul 3°, deoarece $\overline{A'C'} \perp \overline{AC}$ şi $\overline{B'D'} \perp BD$ ca diagonala în romburile AA'CC' şi BB'DD'.

4°, Când $\hat{A} = 45°$, dreptunghiul $A_1B_1C_1D_1$ devine un patrat, deoarece $\overline{A_1C_1} \perp \overline{B_1D_1}$.

In acest caz, paralelogramele ABCD şi A'B'C'D' fiind asemenea şi cu înălţimile egale ($A_1D_1 = D_1C_1$) sunt egale, deci şi diagonalele lor sunt egale.

Rezultă că romburile AA'CC' şi BB'DD' având diagonale egale sunt patrate.

Observări. Domnişoarele MIOARA CRĂCIUNESCU (studentă), ANA GEREANU (studentă) şi D-l POPESCU-ZORICA (student) au dat soluţii analitice complete.

D-l SUBL. MIRCEA GRUMĂZESCU a dat o soluţie incompletă.

Două soluţii bune an trimes D-nii: O. MĂRCULESCU (Craiova) şi M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. Mihai Viteazu, Alba-Iulia).

Ceilalţi rezolvitori au socotit suficient că unghiurile fiind egale, două paralelograme sunt asemenea, ceea ce nu-i adevărat.

PROBLEMA 4952. *Să se găsească patratele care se termină cu puterea a patra a ultimei cifre a rădăcinilor patrate. In afară de cele terminate în* zero *sau* unu, *care este cel mai mic număr al cărui patrat satisface condiţiunile enunţului?*

M. GHERMĂNESCU.

Fie $N = 10n + a$ rădăcina patrată a numărului căutat, unde a este cifra unităţilor. Din enunţ rezultă că a^4 se termină cu aceeaşi cifră ca a^2, deci putem avea $a = 0, 1, 4, 5, 6, 9$, lăsăm la o parte cazurile banale $a = 0, 1$ şi ne ocupăm de celelalte.

1°. $a = 4$. Deoarece $a^4 = 256$, trebue ca

$$(10n + 4)^2 - 16^2 = M1000$$

$$\therefore \quad (10n + 20)\ (10n - 12) = M1000$$

$$\therefore \quad (n + 2)\ (5n - 6) = M50.$$

Cum $5n - 6$ este prim cu 5, trebue să avem:

$$n + 2 = 25m \quad \therefore \quad n = 25m - 2,$$

deci

$$m\,(125m - 16) = M2,$$

ceea ce arată că m trebue să fie par, $m = 2k$, deci $n = 50k - 2$, aşa că avem primul grup de soluţii dat de

$$(1) \qquad N = 500k - 16.$$

2°. $a = 5$. Deoarece $a^4 = 625$, trebue ca

$$(10n + 5)^2 - 25^2 = M1000$$

$$\therefore \quad (10n + 30)\ (10n - 20) = M.1000$$

$$\therefore \quad (n + 3)\ (n - 2) = M10.$$

Ambii factori $n + 3$, $n - 2$ se divid sau nu în acelaşi timp cu 5, dând acelaşi rest, deci $n = 5k + 2$ şi cum ei sunt de paritate diferită, produsul este totdeauna divizibil prin 2, astfel că al doilea grup de soluţii este dat de

$$(2) \qquad N = 50k + 25.$$

3°. $a = 6$. Deoarece $a^4 = 1296$, trebue ca

$$(10n + 6)^2 - 36^2 = M10^4$$

$$\therefore \quad (10n + 42)\ (10n - 30) = M.2^4.5^4$$

$$\therefore \quad (5n + 21)\ (n - 3) = M2^2.5^3.$$

Primul factor fiind prim cu 5, trebue ca $n - 3 = 125m$ şi cum ei sunt de aceeaşi paritate, trebue ca n să fie un număr impar, deci $m = 2k$, $n = 250k + 3$, iar un nou grup de soluţii va fi astfel dat de

$$(3) \qquad N = 2500k + 36.$$

4°. $a = 9$. Deoarece $a^4 = 6561$, trebue ca

$$(10n + 9)^2 - 81^2 = M.10^4,$$

$$\therefore \quad (10n + 90)\ (10n - 72) = M2^4.5^4$$

$$\therefore \quad (n + 9)\ (5n - 36) = M2^2.5^3.$$

Cum al doilea factor este prim cu 5, trebue ca $n+9=125m$. Apoi, ei fiind de paritate diferită, unul din ei trebue să se dividă prin 4, deci $n+1=M4$ sau $n=M4$. In primul caz $m=4k$, iar în al doilea $m=4k+1$, deci avem încă două grupe de soluţiuni

(4) $\qquad N=5000k-81,$

(5) $\qquad N=5000k+1169.$

Examinând acum formulele (1), (2), (3), (4), (5), se vede că cel mai mic număr care corespunde enunţului se obţine făcând $k=0$ în (2), deci $N=25$.

Notă. 1°. Singurul care a trimis o soluţie serioasă acestei probleme este D. MODÂLCĂ EMIL care, pe o cale mai dificilă, găseşte formulele (1), (3), (4) şi (5). In locul formulei (2). D-sa găseşte $N=100k\pm25$, care cuprinde o parte numai din soluţiile date de (2).

2°. Problema se pretează uşor la o generalizare, înlocuind puterea a patra cu o putere cu soţ, pe care o aşteptăm dela corespondenţi.

M. G.

PROBLEMA 4965. *Dacă scriem un zero între cele două cifre ale rădăcinei unui patrat perfect, se poate obţine indicatorul patratului?*

MAIOR I. LINTEŞ.

Dacă $10.a+b$ este numărul căutat, atunci după enunţ ar trebui să avem:

1) $\qquad 100.a+b=\varphi[(10.a+b)^2].$

Cum însă:

$$\varphi(N^2)=N.\varphi(N),$$

atunci:

2) $\qquad 100.a+b=(10.a+b)\,\varphi(10.a+b).$

Sau:

3) $\qquad 10-\dfrac{9.b}{10.a+b}=\varphi(10.a+b).$

Prin urmare va trebui să avem:

$$10.a+b\leqslant 9.b$$

adică:

$$1<a\leqslant 8 \quad \text{şi} \quad 2\leqslant b\leqslant 9.$$

Vom forma atunci tabloul:

b	2	3	4	5	6	7	8	9
$9.b$	18	27	36	45	54	63	72	81
$10.a+b$	18	27	18 36	15 45	18 54	21 63	18 36 72	27 81

Dintre aceste numere nu convin decât:

15 , 18 şi 45.

Dar cum indicatorul unui număr este *par*, urmează că singura soluţie este *18*.

A rezolvat problema D-l E. S. MODÂLCĂ, Liceul Traian, T.-Severin.

I. L.

PROBLEMA 4994. *Cercurile lui* EULER *ale triunghiurilor* ABC, BCD, CDA, DAB *trec printr'un acelaşi punct.*

AD. GHEORGHIU.

Soluţia I-a dată de D-l ORIGEN MĂRCULESCU (Craiova).

Fie A', B', C', E, F, H mijloacele laturilor BC, CA, AB, AD, DC, DB respectiv. Două oarecare din cercurile lui EULER din enunţ, de exemplu ale triunghiurilor ABC şi CDA, se taie în două puncte în speţă B' şi K.

Să arătăm că cercul lui EULER al triunghiului BCD trece prin punctul K. Acest cerc este determinat de punctele A', F, H. Este deci deajuns să dovedim egalitatea:

$$\sphericalangle A'HF = \sphericalangle A'KF. \qquad (1)$$

Or avem:

$$\sphericalangle A'HF = \sphericalangle BCD \qquad (2)$$

din paralelogramul A'HFC, şi

$$\sphericalangle A'KF = \sphericalangle A'KB' + \sphericalangle B'KF. \quad (3)$$

Dar:

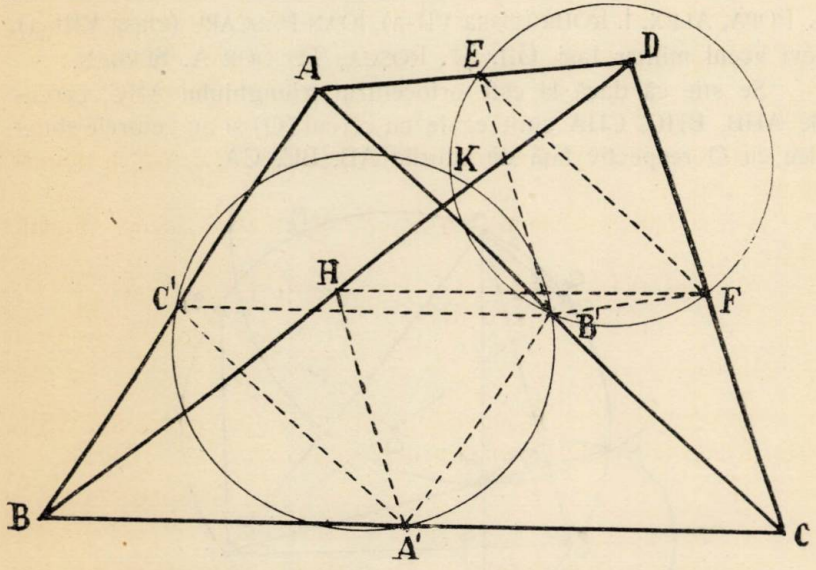
$$\sphericalangle A'KB' = \sphericalangle A'C'B' = \sphericalangle A'CB' \quad (4)$$

$$\sphericalangle B'KF = \sphericalangle B'EF = \sphericalangle B'CD. \quad (5)$$

Ţinând seama de (4) şi (5) egalitatea (3) devine:

$$\sphericalangle A'KF = \sphericalangle A'CB' + \sphericalangle B'CD = \sphericalangle BCD. \quad (6)$$

Incât din egalităţile (6) şi (2) rezultă egalitatea (1) şi deci punctul K se află şi pe cercul lui EULER al triunghiului BCD.



In mod analog se arată că şi cercul lui EULER al triunghiului DAB trece prin K.

Soluţia II-a dată de D-nii: PETRE BOLDESCU şi O. SACTER.

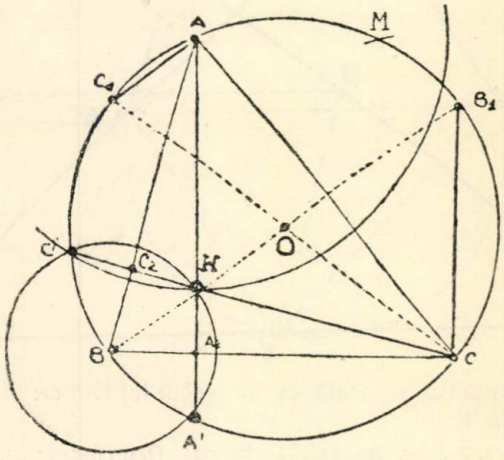
Se ştie că patru punctul ABCD determină o hiperbolă echilateră şi numai una. Pe de altă parte se ştie că hiperbolele echilatere circumscrise unui triunghiu au centrele lor pe cercul lui EULER al acelui triunghiu. Deci, în cazul problemei, hiperbola echilateră fiind circumscrisă celor patru triunghiuri ABC, BCD, CDA, DAB cercurile lui EULER ale acestora *trec toate* prin centrul ei, şi proprietatea e stabilită.

PROBLEMA 5005. *Pe un cerc* O *de rază* R *se ia în mod arbitrar trei puncte* A, B, C. *Să se determine, numai cu ajutorul compasului, ortocentrul triunghiului* ABC.

S-LT. CONST. N. AVRAM.

Soluția I-a dată de D-nii: MIHAI FILIP POPESCU (Școala Politechnică București), ADOLF O. ȘAICHIN (Bacalaureat București), M. AL. VASILESCU-STABU (clasa VII-a liceul Gh. Lazăr București), EMIL S. MODÂLCĂ (clasa VIII-a liceul T.-Severin), PAUL DRĂGHICESCU (clasa V-a), IOAN V. JAREGHIE, CONST. PANTELIMON, M. D. POPA, ALEX. I. ROHR (clasa VII-a), IOAN PASCARU (clasa VIII-a), elevi liceul militar Iași, GH. ȘT. ROȘCA, TEODOR A. ȘERBAN.

Se știe că dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, cercurile AHB, BHC, CHA sunt egale cu cercul (O) și au centrele simetrice cu O respectiv față de laturile AB, BC, CA.



Așa dar dacă din punctele A, B, C descrim arce de cerc cu raza dată R, ele se vor întretăia în O_c, O_a, O_b și O. Cercurile duse cu raza R și având ca centre O_a, O_b, O_c se întâlnesc în H. Este deajuns a se duce două din aceste cercuri, dar ducându-se toate trei verificăm construcția.

Soluția II-a dată de D-nii: M. N. ROȘCULEȚ, EFTIMIE D. CRISTEA (liceul Gh. Lazăr București), IOAN GH. COSTESCU (liceul M. Eminescu), VIRGIL C. ATANASIU, VASILE BÂRZU, ALEX. A.

GHEORGHIU (elevi clasa V-a liceul militar Iaşi), MILLU ROSENBLATT (clasa VIII-a liceul Internat Iaşi), GH. B. N. IONESCU (bacalaureat Ploeşti), MIRCEA C. BEDREAG.

Să notăm cu A', B', C' punctele unde înălţimile AH, BH, CH întâlnesc din nou cercul O. Se ştie că A', B', C sunt simetricele ortocentrului H faţă de laturile BC, CA, AB, deci:

$$\overline{BA'} = \overline{BH} \; ; \; \overline{CB'} = \overline{CH} \text{ etc.}$$

Rezultă că cercurile de centre A, B, C şi de raze respectiv $\overline{AC'}$, $\overline{BA'}$, $\overline{CB'}$ se întâlnesc în ortocentrul H.

Construcţia grafică cerută depinde deci de construcţia punctului A' şi a analoagelor sale. Aceasta se poate face în două feluri:

a) Din punctul C, cu deschiderea compasului cât raza R, se iau trei arce egale şi găsim punctul C_1 diametral opus lui C. Avem:

$$\sphericalangle AC_1C = \sphericalangle ABC, \quad \text{deci} \quad \sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle BAA'$$

care dă

$$\text{arc}AC_1 = \text{arc}BA' \quad \text{şi} \quad \overline{AC_1} = \overline{BA'}.$$

Problema e deci rezolvată.

b) Luăm pe cerc punctul M aşa fel ca $\overline{MC} = \overline{AB}$, ceea ce se poate face cu compasul. Rezultă că AM e paralelă cu BC deci perpendiculară pe AA'. Aşa dar M este diametral opus lui A'. Se ia o deschidere de compas cât raza R şi se poartă de trei ori începând din M, obţinându-se astfel punctul A'. La fel se face pentru B' şi C'.

G. D. S.

PROBLEMA 5011. *Să se determine* λ *aşa fel ca ecuaţia*

$$x^4 - 16x^3 + 86x^2 + \lambda x + 120 = 0$$

să aibă o rădăcină de forma $a + \sqrt{a}$ *a fiind un număr raţional pozitiv, diferit de un patrat, apoi să se rezolve complect ecuaţia dată.*

M. GHERMĂNESCU.

1°. *Prima soluţie.* Inlocuind pe x prin $a + \sqrt{a}$ în ecuaţia dată, obţinem

$$a^4 - 10a^3 + 39a^2 + (86 + \lambda)a + 120 + \sqrt{a}\,(4a^3 - 44a^2 + 156a + \lambda) = 0.$$

Deoarece $\sqrt{a}$ este irațional, o astfel de egalitate nu poate avea loc decât dacă

$$a^4 - 10a^3 + 39a^2 + (86 + \lambda)\, a + 120 = 0,$$

(1)

$$4a^3 - 44a^2 + 156a + \lambda = 0,$$

între care, eliminând pe λ, obținem:

(2) $$3a^4 - 34a^3 + 117a^2 - 86a - 120 = 0,$$

care, conform enunțului, trebue să admită rădăcini raționale. Metoda rădăcinilor întregi ne dă $a = 3$, $a = 5$, $a = 4$, $a = -\frac{2}{3}$, dintre care numai $a = 5$, $a = 3$ corespund enunțului. Pentru ambele găsim $\lambda = -180$ și constatăm, în adevăr, că ecuația dată, care devine

$$x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 180x + 120 = 0$$

admite rădăcinile $3 \pm \sqrt{3}$, $5 \pm \sqrt{5}$.

2°. *Soluția a doua.* Ecuația va admite și rădăcina $a - \sqrt{a}$, astfel că însemnând cu x_1, x_2 celelalte două rădăcini, relațiile între rădăcini și coeficienți devin

(1) $$2a + x_1 + x_2 = 16,$$

(2) $$x_1 x_2 + 2a\,(x_1 + x_2) + a^2 - a = 86,$$

(3) $$(a^2 - a)\,(x_1 + x_2) + 2a x_1 x_2 = -\lambda,$$

(4) $$(a^2 - a)\, x_1 x_2 = 120.$$

Eliminând $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ între relațiile (1), (2), (4) regăsim ecuația (2) din prima soluție apoi, din (3), pe λ.

3°. *Soluția a treia.* Ecuația admițând rădăcinile $a \pm \sqrt{a}$, primul său membru este divizibil prin produsul

$$(x - a - \sqrt{a})\,(x - a + \sqrt{a}) = x^2 - 2ax + a^2 - a.$$

Efectuând împărțirea, găsim câtul

$$x^2 - (16 - 2a)\, x + (86 + 3a^2 - 31a),$$

iar restul

$$(4a^3 - 44a^2 + 156a + \lambda)\, x - (3a^4 - 34a^3 + 117a^2 - 86a - 120)$$

care egalat cu zero conduce tocmai la a doua ecuație (1) și la (2).

4°. *Soluția a patra.* Din soluțiile anterioare rezultă că trebue să avem:

$$x^4 - 16x^3 + 86x^2 + \lambda x + 120 \equiv (x^2 - 2ax + a^2 - a)(x^2 + px + q)$$

deci

$$p - 2a = -16,$$

$$q - 2ap + a^2 - a = 86,$$

$$p(a^2 - a) - 2aq = \lambda,$$

$$q(a^2 - a) = 120.$$

Eliminarea lui p și q între primele două și ultima din aceste relațiuni duce la ecuația (2) din care deducem pe a, apoi valorile lui λ, p și q, iar problema se rezolvă apoi complect.

Notă. 1°. In genul primei soluții, a rezolvat bine problema D-l BODNĂRESCU MIRCEA.

2°. In genul soluției a doua, au rezolvat bine problema D-nii: M. C. ALEXANDRESCU, E. CRISTEA, C. MOTAȘ și A. ȘAICHIN.

3°. In genul soluției a treia a rezolvat bine problema D-l GH. DUMITRESCU.

4°. In genul soluției a patra au rezolvat bine problema D-nii: O. MĂRCULESCU și IONESCU B. N. GH.

PROBLEMA 5018 [1]). *Să se arate că dacă* p *este un număr pozitiv întreg și par, expresia:*

$$E = 13^{4(p+1)} + 50 \cdot 13^{3p+2} + 44 \cdot 13^{2p+1} + 46 \cdot 13^p + 3$$

se divide cu 4704.

M. F. AMĂRĂȘTEANU.

Soluție dată de D-nii: CETĂȚEANU STELIAN (clasa VIII-a Lic. „Gh. Șincai" București) și CRISTEA EFTIMIE (clasa VIII-a Lic. „Gh. Lazăr" București).

---

1) Enunț rectificat.

Expresiunea se scrie succesiv :

$$E = 13^{2(p+1)}(13^{2(p+1)} - 2.13^p + 1) + 4.13^{p+1}(13^{2(p+1)} - 2.13^p + 1) + 3(13^{2(p+1)} - 2.13^p + 1)$$

$$= (13^{p+1} + 1)(13^{p+1} + 3)(13^{2(p+1)} - 2.13^p + 1).$$

$$13^{p+1} + 1 = (14 - 1)^{p+1} + 1 = \mathcal{M}14 - 1 + 1 = \mathcal{M}14.$$

$$13^{p+1} + 3 = (12 + 1)^{p+1} + 3 = \mathcal{M}12 + 4 = \mathcal{M}4.$$

$$13^{2(p+1)} - 2.13^p + 1 = (14 - 1)^{2(p+1)} - 2(14 - 1)^p + 1 = \mathcal{M}14 + 1 - 2 + 1 = \mathcal{M}14.$$

$$13^{2(p+1)} - 2.13^p + 1 = (12 + 1)^{2(p+1)} - 2(12 + 1)^p + 1 = \mathcal{M}12 + 1 - 2 + 1 = \mathcal{M}12$$

deci

$$13^{2(p+1)} - 2.13^p + 1 = \mathcal{M}84, \text{ şi}$$

$$E = \mathcal{M}14.\mathcal{M}4.\mathcal{M}84 = \mathcal{M}4704.$$

C. I. Ţ.

PROBLEMA 5019. *Intr'o placă plană sunt practicate două găuri circulare de mărimi diferite. Să se ducă dreptele tangente comune la aceste găuri.*

IULIAN ALEXIU.

Soluţie dată de D-l MIHU CERCHEZ (Chişinău).

Se duce o dreaptă Δ care taie contururile găurilor circulare O_1 şi O_2 în A_1, B_1 şi A_2, B_2. Se ridică pe Δ perpendicularele:

$$A_1C_1,\ B_1D_1\ ;\ A_2C_2,\ B_2D_2.$$

Construcţia dreptei A_1C_1: Se ia pe Δ un punct M. Din M se ridică o perpendiculară pe Δ. Pe această perpendiculară se ia un punct O' din care, ca centru, se descrie un cerc de rază $O'A_1$ ce va intersecta pe Δ în A'. Se duce diametrul A'O'C. Dreapta CA_1 este perpendiculara pe Δ căutată.

Se construeşte dreapta D_1 paralelă cu A_1C_1 şi B_1D_1 şi egal depărtată de acestea. Fie P_1, Q_1 intersecţiile dreptei D_1 cu conturul circular O_1. P_1Q_1 este un diametru al cercului C_1 fiind perpendicular pe mijlocul coardei A_1B_1.

In mod analog construim dreapta D_2 paralelă cu A_2C_2 şi B_2D_2 şi egal depărtată de acestea. Intersecţiile P_2, Q_2 al dreptei D_2 cu cercul O_2 ne determină diametrul P_2Q_2 al cercului O_2, paralel cu diametrul P_1Q_1 al cercului O_1.

Fie I şi E intersecţiile dreptelor P_1Q_2, P_2Q_1 şi P_1P_2, Q_1Q_2. I şi E sunt centrele de omotetie ale celor două cercuri. Dreapta IE va trece prin centrele inaccesibile O_1 şi O_2 ale celor două cercuri.

Tangentele comune la cele două cercuri vor trece prin I sau prin E.

Fie T_1IT_2 o tangentă comună la O_1 şi O_2. IT_1O_1 este un triunghiu dreptunghiu în T_1 deci:

$$IT_1 = \sqrt{\overline{IO_1}^2 - \overline{O_1T_1}^2}.$$

Notând cu N intersecţia lui IO_1 cu cercul O_1 şi cu R_1 mărimea razei cercului O_1 avem:

$$\overline{IO_1} = \overline{IN} + R_1 \quad ; \quad \overline{O_1T_1} = R_1.$$

Valoarea lui R_1 se capătă ducând perpendiculare pe D_1 în P_1 şi Q_1; distanţa între aceste perpendiculare fiind $2R_1$. Din aceste consideraţiuni rezultă că valoarea lui IT_1 se poate găsi grafic, IT_1 fiind catetă într'un triunghiu dreptunghic în care se cunosc: ipotenuza IO_1 şi cateta O_1T_1.

Cu o deschidere de compas cât IT_1 şi cu I ca centru se descrie un arc de cerc care intersectează cercul O_1 în două puncte T_1 şi T_1'. Dreptele T_1I şi $T_1'I$ sunt tangentele comune la cele două cercuri, tangente ce trec prin I.

In mod analog se obţin tangentele comune la cele două cercuri, tangente trecând prin punctul E.

Notă. S'a mai primit o soluţie greşită la această problemă, întrucât se utilizase arce de cercuri având ca centre puncte pe periferia găurilor circulare. Aceste construcţii sunt imposibil de realizat practic.

I. AL.

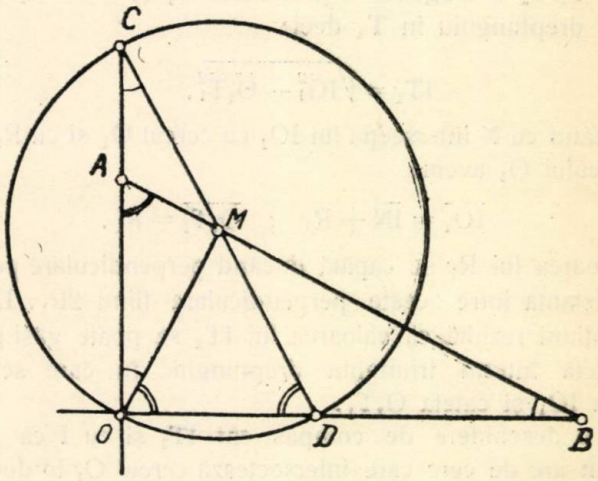
PROBLEMA 5048. *Se dă triunghiul* AOB *dreptunghic în* O. *Fie* M *piciorul înălțimei* OM. *Să se ducă prin* M *o dreaptă care să taie catetele* AO, OB *în* C *și* D, *astfel ca patrulaterul* ABCD *să fie inscriptibil.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluție, dată de D-nii: M. AL. VASILESCU-STABU, IULIAN PETRESCU (Lic. Lazăr, București), EM. I. SĂRULEȘTEANU (București), H. M. BODNĂRESCU (Lic. „Titu Maiorescu", București).

Presupunem problema rezolvită și fie C pe prelungirea lui OA iar D între O și B. Din patrulaterul inscriptibil ABCD și din triunghiul dreptunghic AOB se scoate

$$\sphericalangle ABO = \sphericalangle MOC = \sphericalangle OCM$$



și de aici se deduce

$$\sphericalangle CDO = \sphericalangle BAO = \sphericalangle BOM.$$

De unde rezultă

$$MC = MO = MD.$$

Deci construcția se reduce la a găsi intersecțiile C și D ale lui OA și OB cu cercul cu centrul în M și cu raza MO. Se vede că acest cerc taie pe OA pe prelungirea sa numai dacă $MA < MO$ sau ceea ce este tot una $OA < OB$.

Când $OA > OB$ punctul C cade între O şi A iar D pe prelungirea lui OB.

Nu se poate ca C să fie între O, A sau pe prelungirea lui AO şi D pe prelungirea lui BO sau între B şi O.

Soluţie dată de D-nii: C. PANTELIMON, P. I. DRĂGHICESCU, A. N. POPA (Lic. militar, Iaşi), I. D. DIACONESCU (Lic. „Traian", T.-Severin), ST. D. IONESCU, R. E. GVIAZDOMORSCHI (Lic. militar, Cernăuţi), S. LEIBOVICI (Lic. „M. Eminescu", Bucureşti).

Deoarece

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle MBD = C^t$$

sau

$$\sphericalangle MDB = \sphericalangle MAC = C^t$$

punctul C (sau D) se află la intersecţia lui OA (sau OB) cu segmentul de cerc descris pe AM sau (sau MB) şi capabil de unghiul B sau $\pi - A$.

EXERCIŢII

25. Să se demonstreze că dacă $\varphi(N)$ este indicatorul lui N, atunci expresia:

$$E \equiv (m+2).[(m+2)^{\varphi(N)-1} - (N+1)^n + 1] + (N+1)^n - 2$$

este divizibilă prin $(m+1).N$, unde N este prim cu $(m+2)$.

STELIAN CETĂŢEANU.

R. Avem:

$$E \equiv (m+2)^{\varphi(N)} - m(N+1)^n - (N+1)^n + m$$

$$\equiv [(m+2)^{\varphi(N)} - 1] - (m+1)[(N+1)^n - 1].$$

Prima paranteză se divide cu N şi cu $(m+1)$, iar a doua deasemenea.

26. Fie B_a, C_a punctele în care diametrul cercului circumscris triunghiului ABC corespunzător vârfului A taie înălţimile vârfurilor B, C.

A_b, C_b, A_c, B_c fiind punctele obţinute în mod analog, avem:

$$\frac{HB_a}{HC_a} \cdot \frac{HC_b}{HA_b} \cdot \frac{HA_c}{HB_c} = 1.$$

C. IONESCU-BUJOR.

R. Triunghiurile $HB_a C_a$ şi ABC sunt asemenea, etc.

27. Fie dat un triunghiu ABC ; A', B', C' punctele în care înălțimile taie cercul circumscris, al cărui centru se proiectează în O_a , O_b , O_c pe înălțimile corespunzătoare.

Dacă A_1 , B_1 , C_1 sunt proiecțiile punctelor O_a , O_b , O_c pe dreptele lui SIMSON ale punctelor A', B', C' în raport cu triunghiul ABC, să se arate că dreptele AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt concurente.

C. IONESCU-BUJOR.

R. M_a , N_a fiind proiecțiile lui A' pe AB, AC patrulaterul A' M_a A N_a este inscriptibil, centrul său O_a . A_1 este deci mijlocul segmentului $M_a N_a$ și cum dreapta $M_a N_a$ este antiparalela dreptei BC în unghiul A, conchidem că AA_1 este simediana vârfului A.

PROBLEME PROPUSE

5133. Să se arate că dacă avem:

$$X+Y+Z=A \quad , \quad XY+YZ+ZX=B \quad , \quad XYZ=C,$$

atunci dacă A, B, C sunt numere întregi, numerele X, Y, Z nu pot fi fracționare. Se cere o demonstrație aritmetică.

I. IONESCU.

5134. Să se demonstreze că numerele $(n-1)$ și $(np+1)$ nu pot avea alți divizori comuni în afară de divizorii lui $(p+1)$.

G-L GH. BUICLIU.

5135. Care este *numărul* numerelor prime cu *1939*, *suma* și *produsul* lor, din șirul natural al primelor *100* numere?

CPT. C-DOR I. LINTEȘ.

5136. Fie ABCDEFG un eptagon regulat. Să se demonstreze relația:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}+\overline{AB}}{\overline{AC}+\overline{AD}}.$$

GH. DUMITRESCU.

5137. Fie I, centrul cercului înscris triunghiului ABC, α, β, γ picioarele bisectoarelor și M un punct arbitrar pe dreapta $\beta\gamma$; perpendiculara în I pe MI taie pe $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ în γ', β'; $M\beta'$, $M\gamma'$ taie pe AB, AC în β'', γ''.

Să se arate că $\beta''\gamma''$ este tangentă cercului I.

N. N. MIHĂILEANU.

5138. Fie A_1 un punct situat pe cercul O_1 şi A_2 un punct situat pe cercul O_2, iar D axa radicală a celor două cercuri. Presupunând cunoscute aceste puncte şi axa radicală D, se cere să se construiască cercurile, ştiind că centrul unuia din cercuri se găseşte pe o dreaptă dată. Discuţie.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

5139. Intr'un cerc (O) se scrie un exagon convex ale cărui diagonale trec prin O. Să se arate că locul punctelor pentru care suma produselor distanţelor la două laturi opuse este constantă, este un cerc concentric cu (O).

V. THÉBAULT.

5140. (I) fiind cercul înscris în triunghiul ABC, se consideră un patrat circumscris cercului I. Perpendicularele duse prin I respectiv pe AI, BI, CI intersectează laturile patratului în grupele de puncte $(a_1, b_1, c_1); \ldots; (a_4, b_4, c_4)$.

Grupele de drepte $(Aa_1, Bb_1, Cc_4) \ldots (Aa_4, Bb_4, Cc_4)$ concură în punctele M_1, M_2, M_3, M_4.

Să se găsească locul geometric al punctului M de intersecţie al dreptelor M_1M_3 şi M_2M_4.

THEODOR GH. COCEA.

5141. Pe un segment de dreaptă dat $\overline{AB}$ considerăm un triunghiu ACB; pe latura $\overline{AC}$ construim triunghiul isoscel AMC cu unghiul dela vârf egal cu $(\pi - 2 \sphericalangle CBA)$, iar pe latura $\overline{BC}$ triunghiul isoscel BNC cu unghiul dela vârf egal cu $(\pi - 2 \sphericalangle CAB)$.

Să se aleagă vârful C astfel ca $\overline{MN}$ să fie egal cu $m \cdot \overline{AB}$ (m număr pozitiv), iar aria triunghiului ABC să fie medie geometrică între ariile triunghiurilor AMC şi BNC. Discuţiune.

O. N. ŢINO.

5142. Să se calculeze suma:

$$\sum_{p=1}^{2n+1} \left[\sum_{i=0}^{2k} \sin(2pk + 2i + 2p + 1)\, t + \sum_{i=0}^{2k}{}' \sin[2(p+1)k + 2i + 2p + 1]\, t \right].$$

GH. VASILIU.

5143. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$8x^4 - 8x^3 + x + a = 0$$

şi să se verifice soluţiunile pentru $a = 0$.

I. V. MĂTIEŞ.

5144. Să se arate că avem:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2(n-k)}{(2n^2+k^2)^2} = \frac{\pi}{16\sqrt{2}} \quad ; \quad 4S = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + nk\sqrt{2} + k^2} \; ;$$

$$8S = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n^2+k^2)}{n^4+k^4}$$

când n creşte la ∞.

L-T. C. IONESCU-ŢIU.

5145. Să se reprezinte grafic curba ale cărei ecuaţii parametrice sunt:

$$x = \frac{a\cos 2t}{\cos t}, \quad y = 2a\sin t.$$

Această curbă taie axele de coordonate în patru puncte determinând o suprafaţă închisă.

Să se găsească valoarea acestei suprafeţe.

GH. TH. GHEORGHIU.

5146. Să se determine ecuaţia diferenţială satisfăcută de numărătorul derivatei de ordinul n a funcţiunii:

$$y = \frac{e^{\alpha x} - 1}{e^x - 1}$$

şi să se arate că această funcţiune permite calcularea sumei puterilor asemenea a primelor numere întregi.

G. G. CONSTANTINESCU.

5147. Două bare AB şi AC, de greutate neglijabilă, sunt articulate în A şi legate cu un fir inextensibil la capetele B şi C. Barele AB şi AC se reazemă, fără frecare, respectiv pe cuele D şi E aşezate pe o orizontală; iar în punctul A acţionează o forţă P verticală. Se cere:

a) poziţia de echilibru;

b) reacţiunile în D şi E;

c) tensiunea firului.

GH. D. SIMIONESCU.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Aldea Virgil (5078); *Boiangiu D. D.* (5077); *Boldescu Petre* (4697, N); *Cherţman Mozes* (5087); *Cocea Gh. Th.* (P); *Constantinescu Vasile* (5078); *Cristea I. Const.* (5108); *Drăghicescu P.* (5109); *Enulescu O.* (5077); *Gheorghiu P. Petre* (5131); *Grumăzescu M.* Locot. (5077); *Gviazdomorschi Romulus* (5084); *Herman L. R.* (5077); *Ionescu D. Stelian* (5084); *Jiletcovici Al.* (5114, 31); *Mărculescu Origen* (5110, 11, 16); *Marteş Gr.* Subloc. (4910, 11, 23, 47, 87, 5011, 40, 42, 54, 87, 110, 15, 24, 32); *Mihu Cerchez* (5131); *Miroslav Tudose* (5108); *Modâlcă S. Emil* (4942, 5055, 60, 77); *Modâlcă S. Maria Ana* (5060); *Onişor Vasile* (5084); *Papadopol Elena* (5087); *Petrescu Iulian* (5107, 08); *Petrescu V. Achile* (5110, 14, 22, 31); *Petrescu V. Mihai* (5084); *Popa D. Mircea* (5108, 32, P); *Popescu D. Simion* (5096); *Rohr I. Al.* (4634, 44, 5087, 109, 10, 31); *Stamate I. I.* (5077); *Ştefănescu Radu* (4968, 89); *Sulițeanu C. C.* (5084); *Thébault V.* (A, P); *Theodorescu N. Dorin* (5025, 63, 70); *Topăcescu Gh.* (5122); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (5024, 107, 08, 15); *Zamfirescu Gh. Ion* Locot. (5103, 24).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140.

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — IV de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 56.142.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIV

NUMĂRUL 11. — IULIE 1939

SUMARUL

1. Comemorarea Profesorului G. Țițeica de către Cercul Matematic al Societății de Științe din Cluj (urmare și sfârșit).
2. Ediția dela Cluj a elementelor lui I. G. Pardies . . . . . *Victor Marian*
3. Problema 1379 . . . . . *Gh. Th. Gheorghiu*
4. Asupra unei probleme a lui Goursat *Radu Bădescu*
5. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului de Geometrie elementară . . . . . *Comisiunea pentru Premii.*
6. Note Matematice: 44 — 47.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1379, 3404, 3565, 4740, 4957, 4972, 5014, 5029, 5078, 5082, 5083, 5088.
11. Exerciții 28 — 29.
12. Probleme propuse: 5148 — 5163.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1939

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stoica**, Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1938 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5010, 22, 23, 28, 37, 43, 45, 47, 49, 53, 58, 59, 68, 71, 72, 73, 74, 76, 89, 91, 93, 94, 95, 99, 101, 02, 04, 05, 06, 13, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 40, 41, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

In Biblioteca «Gazetei Matematice» a apărut:

CULEGERE DE PROBLEME DE ALGEBRĂ

INTOCMITĂ DE

D-l Inginer Profesor A. G. IOACHIMESCU
Licenţiat în Matematici

PARTEA II EDIŢIA IV-a
REVĂZUTĂ ŞI MĂRITĂ

Preţul: 240 lei

DE VÂNZARE LA LIBRĂRII. SE POATE COMANDA ŞI LA «GAZETA MATEMATICĂ», BUCUREŞTI, CALEA GRIVIŢEI Nr. 158

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLIV. Nr. 11 *SUPLIMENT* IULIE 1939

RECREAȚIUNI

1. Prin Australia, Malaezia și Madagascar copiii iau ca nume, la naștere, numărul de ordine al nașterii, după cum ne spune TAYLOR. Astfel în Adelaida, MOORHOUSE spune că pe lângă numărul de ordine al nașterii se adaogă cuvântul băiat sau fată; astfel avem tabloul:

Copilul	I	se	numește	Kertamera (băiatul)	și Kertanya (fata).
„	II	„	„	Warrytya	Warriarto.
„	III	„	„	Kudnutya	Kudnarto.
„	IV	„	„	Monaitya	Monarto.
„	V	„	„	Militya	Liarto.
„	VI	„	„	Marrutya	Marrurto.
„	VII	„	„	Wangutya	Wangwarto.
„	IX	„	„	Ngarlaitya	Ngartarto.
„	X	„	„	Pouaina	. . . . .

Locuitorii de acolo nu au *numere cardinale peste trei*; au însă numere *ordinale până la al noulea*. Ei nu *numără*, ci *enumără*.

I. I.

*

2. **Numere rimate.** *2* și *3*. S'a făcut un colac mare | Pe roata morii măsurat | Și l'a rupt în *două* | Și ne-a dat și nouă | Și l'a rupt în *trei* | Și a dat lui Andrei. (Populară).

24. Nici *douăzeci și patru* | Bătrâni cu perii suri | Nici *patru* vii făpturi | Nu-l roagă idolatrul.

1, 100, 1000. Pe mire nu-l încântă nici | Un cor de alăute | Și *unul* întâmpin'*sute* | Și *mii* de îngeri mici. (Din *Scut și Targă* de PERPESSICIUS).

I. ILIUȚĂ DĂBULENI.

*

3. *1½*. In zicători se întâlnește uneori acest *număr fracționar* ca mijloc de a întări o unitate. Astfel printre asemenea zicători avem:

— *A fi un om și jumătate.*
— *A fi un craiu și jumătate.*
— *A trăi un traiu și jumătate.*
— *Per conoscere un furbo, ci vuole un furbo e mezzo.*

I. I.

*

4. $\frac{1}{2}$ din $\frac{1}{3}$. In „*Vis de Iubire*“ de E. ZOLA citim:

„*...O icoană care era de aur montat, mare cât o jumătate dintr'o treime*“.

Nu ni se spune ce reprezintă *treimea*, deci nu ne putem face idee de mărimea icoanei!

D. M. BAIDAC.

*

5. **Curiozităţi numerice.** In *Arithmétique* par F. G. M. găsim:

$12345679 \times 9 = 111\ 111\ 111.$ $\quad 12345679 \times 45 = 555\ 555\ 555.$

$12345679 \times 18 = 222\ 222\ 222.$ $\quad 12345679 \times 54 = 666\ 666\ 666.$

$12345679 \times 27 = 333\ 333\ 333.$ $\quad 12345679 \times 63 = 777\ 777\ 777.$

$12345679 \times 36 = 444\ 444\ 444.$ $\quad 12345679 \times 72 = 888\ 888\ 888.$

$$12345679 \times 81 = 999\ 999\ 999.$$

I. C. BOIAN.

*

6. **Soluţie rapidă.** Se cerea să se dovedească dubla neegalitate:

$$2^{2^6} - 5 < 6!! < 3^{3^6} - 5.$$

Un elev de Clasa VII-a dă soluţia:

„Avem succesiv:

$$2^{12-5} < 6!! < 3^{18-5}$$

$$2^7 < 6!! < 3^{13},$$

$$7 \log 2 < 2 . \log 720 < 13 . \log 3,$$

$$2,\ 10721 < 5,\ 71460 < 6,\ 20256.$$

I. L.

*

7. **Supra aritmetică.** Din „*Timpul*“ 24/3/1939. Ca explicaţie la o fotografie a unei case la care erau puse două bilete „*De Inchiriat*“ se spune:

„*In măsura în care s'a construit chiriaşii s'au înmulţit într'o proporţie supra aritmetică.*

ADOLF O. ŞAICHIN.

*

8. **Epitaf singular.** Pe un mormânt francez era scris:

Ci-gît le fils avec la mère;
Ci-gît la fille avec la père;
Ci-gît la soeur avec le frère;
Ci-gît la femme et le mari;
Et ne sont que trois corps ici.

(Imposibilitate).

I. I.

*

9. **Diametri cu trei capete.** Desprind din Conferința unui Profesor universitar ținută anul acesta la Ateneu:

„Domnilor, — omenirea este guvernată astăzi de trei concepțiuni economice, diametral opuse"!

N. B. GH.

*

10. **Suprafață exprimată în timp.** Din o foaie de adeverință din 4 Martie 1639:

„Loc de zece zile arătură".

I. I.

*

11. **Funcțiune.** BRUNETIÈRE în o conferință ținută la Sorbona în 1893 a dat următoarea definiție artei:

„L'art est **fonction** *de la Société".*

O. BIENȘTOCK.

Citim în *„Sur l'art de la vie"* de KEYSERLING:

„Une compréhension totale de l'Univers est en principe possible en **fonction** *de l'équation personnelle de l'homme".*

ANA C. GRECEANU.

*

12. **Prin erori repetate la adevăr!** La trigonometrie se dă unui elev să afle limita lui $\sin 10x/\sin 4x$ pentru $x = 0$. Elevul simplifică cu *sin*, apoi cu x și în fine cu 2 și găsește limita adevărată 5/2!

S. LEIBOVICI.

*

13. **Sinus de broască.** Un astfel de sinus există, căci așa e denumit un os din capul broaștelor!

M. ȘTEFANOVICI.

*

14. **Matematica și sportul.** Intr'un extemporal, elevul *Șt. Lig.* dela *L. M. S.* scrie:

„Desvolt determinantul după regula lui SAROSI".

SAROSI este un jucător de football dintr'o echipă dela Budapesta!

CONSTANTIN V. PANTELIMON.

*

15. **Clasificarea științelor.** Prin psychografie EUGENIU NUS și colaboratorii săi au primit următorul răspuns în privința clasificării științelor:

„Fizica: Cunoașterea forțelor materiale care produc viața și organismul lumilor.

Chimia: Studiul diverselor proprietăți ale materii la simplu și la compus.

Matematica: Proprietățile forțelor și ale numerelor, decurgând din legile ordinei universale.

Electricitatea: Forţa directă a pământului, emanând din viaţa particulară lumilor.

Magnetismul: Forţa animală, amestecul fiinţelor între ele, locul vieţii universale.

Galvanismul şi Electromagnetismul: Forţa combinată a forţelor terestre şi animale".

I. I.

*

16. **Matematica în literatură.** MARTIN EDEN scrie în *Jack London*, pag. 19:

— *Trigo?* Qu'est ce que c'est?

— Trigonométrie, repondit NORMAN. Une forme supérieure de math.

— Et qu'est ce que c'est math.?

— Les mathématique, — l'Arithmétique, repondit NORMAN en riant.

Iată Trigonometria coprinsă în Aritmetică!

M. A. CERNES.

*

17. **Calculul pietrei de moară.** Un sătean simplu, bogat şi cu bun simţ trimite băiatul la învăţătură în străinătate, după absolvirea Liceului din Capitala Judeţului lui. Munceşte săteanul din greu, adună bucate şi le vinde să-şi înveţe odrasla, care an după an cere tot mai mult şi care întârzie să vie dintre streini. In fine, după 15 ani de învăţătură, şi când greutăţile valutare nu mai îngăduiau să i se trimită bani, se întoarce acasă... dobă de carte şi povesteşte tătânelui său câte a învăţat. *Matematici* şi iar *matematici, analiză, algebră, astronomie, mecanică*...

— Bravo drăguţul tatei, acum sănătate să-ţi dea Domnul. Da ia spune, la ce-ţi folosesc toate... astea?

— Păi cum la ce-mi slujesc. La socoteli. Eu pot acum calcula, pot, ca să vorbesc pe limba matale, să ghicesc orice.

— Aşaa... n! Bravo tată, bravo.

Şi s'apleacă moşul, ia ceva în pumn şi-l întreabă pe copilul învăţat: ... să-mi ghiceşti, ... să-mi calculezi, cum zici tu, ce am eu în mână.

— Imediat, răspunde învăţatul. la un vraf de hârtie şi... calculează. După un răstimp trage o linie şi-şi spune rezultatul... calculul...

— Tată, D-ta ai în pumn... ceva rotund şi găurit la mijloc.

— Mare minune, copilul tatei, cu... socotelile astea de poţi... calcula aşa de bine. Dar ia spune-mi ce este aşa rotund şi găurit la mijloc?

— *Piatră de moară,* ce alt să fie, răspunde învăţatul!

Povestea ne lămureşte însă că învăţatul nu dăduse pe la Facultate în timpul studiilor, după cum nu dăduse nici... pe la moară când era copil în sat!

GH. B.

*

18. **Răbdarea japoneză.** SEKI KOWA, supranumit NEWTON al Japoniei, a deslegat în opera sa *Hatsubi Sampo* o ecuaţie de gradul 1457!

I. I.

COMEMORAREA PROFESORULUI G. ȚIȚEICA

DE CĂTRE

CERCUL MATEMATIC AL SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE DIN CLUJ

(Urmare dela pag. 509)

Să-mi dați voie acum să fac câteva observații asupra operei lui ȚIȚEICA.

Ceea ce domină în toată opera lui este o intuiție geometrică puternică, o adevărată viziune geometrică în toate chestiunile de care s'a ocupat. El singur spune în prefața lucrării sale fundamentale *„Géométrie différentielle projective des réseaux"*:

„Calculele care au câteodată aerul de a încărca expunerea, au la baza lor intuiția geometrică. Fiecare ecuație are aproape întotdeauna o interpretare geometrică.

Am învățat această metodă la cursul și în lucrările lui DARBOUX".

Intr'adevăr, ȚIȚEICA a fost elevul marelui DARBOUX. A fost mare geometru ilustrul DARBOUX, dar a fost strălucit și discipolul său G. ȚIȚEICA. Știința franceză, cu drept cuvânt, se poate mândri cu opera Profesorului ȚIȚEICA făcută în spiritul și cu metodele marelui DARBOUX.

Putem spune însă că ȚIȚEICA s'a născut geometru; lucrările lui dinainte de a merge la Paris, au arătat o înclinare naturală a lui către geometrie. In timpul studiilor lui ȚIȚEICA la Paris, la Sorbona străluciau marii matematicieni DARBOUX, POINCARÉ, E. PICARD, GOURSAT, HADAMARD, BOREL pentru a nu cita decât pe cei mai mari. La cursurile lui DARBOUX, ȚIȚEICA a găsit atmosfera științifică cea mai apropiată de sufletul lui. Cu talentul lui și având ca maestru pe unul din cei mai subtili geometri ai timpului, ȚIȚEICA s'a specializat în geometrie, devenind unul din cei mai apreciați geometri.

O altă caracteristică a operei lui ȚIȚEICA este continuitatea ei. Intr'adevăr, el a fost unul din profesorii noștri care a făcut cercetări continue, timp de patruzeci de ani, publicând în fiecare an lucrări de mare importanță.

Deasemenea în toată opera lui ȚIȚEICA se vede un fir conducător. Mai toate subiectele tratate de el, se leagă între ele

într'un chip armonios. In toată opera lui, teoria reţelelor ocupă locul de frunte. In această teorie el este un creator. Pentru a dovedi această afirmaţie este suficient să citez toate lucrările lui asupra reţelelor din care se vede că marile probleme din teoria reţelelor au fost puse pentru prima dată de ŢIŢEICA şi rezolvate tot de el.

Dar ŢIŢEICA n'a fost numai un mare savant şi un mare cercetător, el a fost şi un mare profesor. Dela întoarcerea sa din Paris, din anul 1900 şi până la moartea lui, el a fost profesor de geometrie analitică şi de geometrie superioară la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti, iar acum în urmă, după retragerea D-lui Profesor DAVID EMMANUEL, a fost şi profesor de analiză la Şcoala Politecnică din Bucureşti.

Lecţiunile lui de o claritate care poate fi comparată cu apa limpede a unui izvor de munte, expuse cu o metodă neîntrecută, cu o adevărată artă de mare pedagog, care se adresau nu numai minţii auditoriului său, dar şi sufletului lui, au rămas ca model pentru toţi foştii lui elevi.

Toţi care am avut fericirea de a fi elevii lui, vom avea deapururea în minte imaginea acestui admirabil profesor. Un om de talie mijlocie, întotdeauna sănătos şi bine dispus, cu o faţă blajină, cu o privire caldă, intra în sala de curs fără nici-o morgă, îşi punea ceasul pe catedră şi când ridica ochii, ochii lui plini de bunătate şi de o putere de mare pătrundere, în sală se stabilea în câteva clipe, o atmosferă de adâncă înţelegere între profesor şi elevi. Lecţiunea începea în mod simplu, vocea lui clară, cu nuanţe variate fermeca auzul şi cu ochii lui cerceta în fiecare elev, efectul produs. Niciodată nu era grăbit, scria frumos pe tablă, îşi aranja calculele cu dibăcie, totul era făcut pentru o cât mai bună reuşită a lecţiunei. Profesorul ŢIŢEICA îşi pregătea întotdeauna lecţiunile lui şi-i plăcea să spună aceasta în conversaţiile lui cu profesorii tineri.

Această preocupare a lui ŢIŢEICA de a face lecţiuni perfecte izvora dintr'o dragoste profundă pentru tineret, din respectul datoriei către Stat, cât şi dintr'o dragoste adâncă pentru ştiinţa lui, pentru geometrie, pe care o servea cu religiozitate, ca un adevărat preot.

Tot din dragostea lui pentru matematică şi pentru tineret, ŢIŢEICA s'a alăturat în 1895 mişcării de ridicare a tineretului pe teren ştiinţific începută de fondatorii *Gazetei Matematice:* D-nii Ing. Inspector general I. IONESCU, Ing. A. IOACHIMESCU şi Ing. V. CRISTESCU. Se va descrie desigur în *Gazeta Matematică* rolul important pe care ŢIŢEICA l-a avut în educarea ştiinţifică a tineretului prin această revistă. El socotea ca un mare noroc al său că a intrat la *Gazeta Matematică,* după cum afirmă el însuşi într'un discurs pronunţat la sărbătorirea lui de către *Gazeta Matematică* cu ocazia intrării sale la Academia Română. Timp de patruzeci şi patru de ani ŢIŢEICA a rămas credincios prieteniilor lui legate la *Gazeta Matematică* în tinereţea lui şi a sprijinit cu toată fiinţa lui spirituală puternică şi pe tinerii membri ai acestei Societăţi, şi pe corespondenţii revistei *Gazeta Matematică.*

Aceeaşi dragoste pentru tineret, precum şi un înalt patriotism l-a făcut să fie unul din conducătorii *„Caselor Naţionale"* şi să se alăture mişcării naţionale întreprinsă de *„Straja Ţării".*

ŢIŢEICA a fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris şi toată viaţa lui a rămas legat de această instituţie de înaltă cultură. In anul 1926, când ŢIŢEICA a fost invitat să facă cursuri la Sorbona, el a ţinut să locuiască la Şcoala Normală. L'am văzut acolo într'o cameră modestă de elev, cu cărţile şi memoriile de care avea nevoie la prepararea cursului, aşezate pe o masă veche, poate de pe vremea lui NAPOLEON, stând însă fericit că retrăeşte vremurile pe când era elev al şcoalei. Şi cu cât interes şi cu câtă vervă discuta cu elevii şcoalei interesându-se de studiile şi lucrările lor. Este vie în memoria mea, amintirea scumpă când într'o seară am adunat în camera mea dela Şcoala Normală pe toţi camarazii promoţiei mele oferind un ceai în onoarea valorosului nostru camarad *„archicube"* ŢIŢEICA.

Importanţa şi unitatea operei lui ŢIŢEICA va fi mărită când toată această operă va fi adunată şi publicată într'un volum. Generaţiile viitoare vor urmări cu mai multă uşurinţă şi înţelegere această operă şi toţi vor aprecia şi admira geniul creator al marelui nostru profesor.

ŢIŢEICA a fost membru activ al Academiei Române încă din 1913 şi puţin timp după aceasta, pentru calităţile lui excepţionale, a fost ales Secretar general al acestei instituţii. Deaceea Cercul

Matematic al Societăţii de Ştiinte din Cluj, format în majoritate din foşti elevi ai Profesorului ŢIŢEICA, azi profesori la Facultatea de Ştiinţe din Cluj, îşi exprimă dorinţa de a vedea adunată şi tipărită opera lui ŢIŢEICA de către Academia Română.

Profesorului ŢIŢEICA îi plăcea să vină la Cluj şi să se întreţină cu colegii lui dela Secţia de matematici, mai toţi foştii săi elevi. L'am văzut la Cluj cu ocazia primului Congres al matematicienilor, l'am văzut cu ocazia tricentenarului lui DESCARTES, când a venit şi a făcut o conferinţă admirabilă, dar l'am văzut şi într'o vară, făcând un ocol dela Sovata în drum spre Bucureşti spunându-ne că vine să ne vadă şi să discutăm matematică. Intr'o după amiază călduroasă, în această sală, într'o atmosferă de prietenie, ne-a făcut cu darul lui fermecător o expunere, în faţa unui auditoriu format din trei profesori, despre o metodă în geometrie a matematicianului KUBOTTA. Noi toţi am văzut în această vizită o manifestare de prietenie pentru care i-am fost adânc recunoscători. Şi în multe alte ocaziuni am văzut dragostea pe care profesorul ŢIŢEICA o avea pentru profesorii dela Facultatea de Ştiinţe din Cluj.

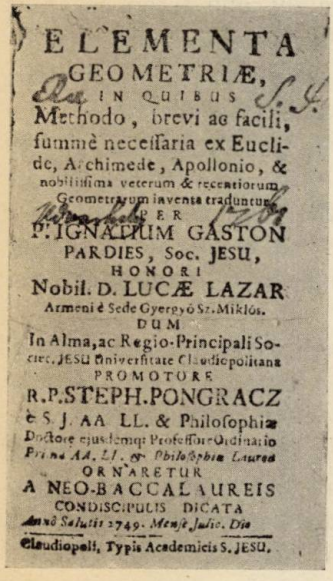
Cercul matematic al Societăţii de Ştiinţe din Cluj, va păstra deapururea amintirea lui GHEORGHE ŢIŢEICA, care a fost un mare savant şi mare cercetător, iar pentru noi toţi un mare profesor şi prieten.

EDIŢIA DELA CLUJ A ELEMENTELOR LUI I. G. PARDIES

In anul 1749 s'a tipărit la Cluj în limba latină un mic manual universitar de matematici — al treilea de acest gen în Ardeal — având titlul „*Elementa Geometriae,...* per P. IGNATIUM GASTON PARDIES, Soc. JESU... Claudiopoli, Typis Academicis S. JESU".

După cum se vede din reproducerea alăturată a foii de titlu, cărticica are un titlu destul de lung, iar ca dată a apariţiei s'a pus din greşală anul 2749!

Autorul cărţii, iezuitul I. G. PARDIES este bine cunoscut în istoria ştiinţelor atât prin lucrările sale de natură ştiinţifică şi didactică din domeniul matematicilor, cât şi prin o discuţie pe care a avut-o cu NEWTON. Prin ediţia dela Cluj a cărţuliei sale el ne interesează mai îndeaproape şi direct. Voi schiţa deci în cele ce urmează viaţa şi operele matematice ale acestui călugăr francez, insistând în special asupra *Elementelor de Geometrie* şi a ediţiei lor din Cluj.


ELEMENTA
GEOMETRIÆ,
IN QUIBUS
Methodo, brevi ac facili,
ſummè neceſſaria ex Euclide, Archimede, Apollonio, &
nobiliſſima veterum & recentiorum
Geometrarum inventa traduntur.
PER
P. IGNATIUM GASTON
PARDIES, Soc. JESU,
HONORI
Nobil. D. LUCÆ LAZAR
Armeni è Sede Gyereyó Sz. Miklós.
DUM
In Alma, ac Regio-Principali Societ. JESU Universitate Claudiopolitana
PROMOTORE
R. P. STEPH. PONGRACZ
è S. J. AA LL. & Philoſophiæ
Doctore ejusdemque Professore Ordinario
Primo AA. LL. & Philoſophiæ Laureâ
ORNARETUR
A NEO-BACCALAUREIS
CONDISCIPULIS DICATA
Anno Salutis 1749. Menſe Julio. Die
Claudiopoli, Typis Academicis S. JESU.

IGNACE GASTON PARDIES s'a născut în 1636 (după o altă versiune în 1638) la Pau. A intrat în ordinul iezuiţilor şi a predat matematica şi fizica, precum şi limbile clasice mai întâi în oraşul său natal, apoi la Clermont, iar pe urmă la Colegiul LOUIS-LE-GRAND din Paris. PARDIES a fost un adept al filozofiei lui DESCARTES. A murit la 1673.

In anul 1672 când NEWTON şi-a publicat cercetările asupra luminei în revista „*Philosophical Transactions*“ din Londra PARDIES a fost primul care a atacat în coloanele aceleiaşi reviste, teoria dispersiei încercând să explice spectrul luminei prin variaţia unghiului de incidenţă a razelor. NEWTON nu a întârziat cu răspunsul şi l-a convins pe PARDIES de eroarea afirmaţiilor sale, ceea ce acesta a avut cavalerismul să recunoască [1]).

Lucrările mai importante ale lui PARDIES sunt următoarele:

— *Dissertatio de motu et natura cometarum,* 8°, Bordeaux, 1665.

— *Discours du mouvement local,* 12°, Paris 1670.

— *Les Elemens de Géométrie,* 12°, Paris, 1671.

— *La Statique ou la Science des forces mouvantes,* 12°, Paris, 1673.

— *Tabulae uranographicae,* Paris 1673 — 74.

1) A. HELLER. Geschichte der Physik, Stuttgart, 1882 — 84, Vol. II, pag. 304 — 5.

După moartea lui PARDIES o parte din operele acestuia s'au retipărit sub titlul „*Oeuvres* du R. P. IGNACE GASTON PARDIES de la Compagnie de JESUS", care au ajuns mai multe ediţii (ed. 4, Hagae Comitum, 1680).

EUCLID a pus în *Elemente* pentru totdeauna bazele geometriei sub o formă care prin orânduirea logică şi rigoarea demonstraţiei a rămas neîntrecută. Dar tocmai din cauza acestei stricteţe exagerate *Elementele* nu sunt uşor de studiat. Deaceea unii autori au ajuns la ideea să modifice atât aranjamentul *Elementelor,* cât şi demonstraţiile unor propoziţii, înlocuindu-le cu altele mai puţin riguroase, dar mai uşoare, pentru a le face mai accesibile studenţilor.

Primul care a modificat în acest fel *Elementele* a fost cunoscutul filozof PIERRE DE LA RAMÉE (1515—1572). El a grupat în aşa fel materialul că în locul celor XIII Cărţi ale lui EUCLID a scos XVII Cărţi. Incercarea lui RAMÉE nu a avut mare succes, totuşi curentul pornit de el a avut continuatori. Unul dintre cei dintâi este tocmai PARDIES.

Titlul cărţii lui PARDIES e următorul: „*Élémens de Géométrie, où par une méthode courte et aisé l'on peut apprendre ce qu'il faut savoir* D'EUCLIDE, D'ARCHIMEDE, D'APPOLLONIUS, & *les plus belles inventions des anciennes et nouveaux Géomètres*". Paris 1671.

Acest titlu însuşi autorului i se pare prea lung pentru o carte atât de mică, deaceea îl justifică în termenii următori: „*Ceux qui compareront la petitesse de cet Ouvrage, avec la grandeur de son titre, seront peut-être d'abord rebutez par la disproportion qui paroît entre l'un & l'autre; et il y a sujet de craindre qu'ils en prennent toutes ces promesses si extraordinaires, que pour des expressions trop hardies d'une personne qui s'engage aisément à faire ce qu'elle ne sçauroit executer: mais je les supplie de vouloir un peu leur jugement, & de considerer qu'on ne donne que la moitié de ces Éléments, & que de seize livrez qu'ils doivent contenir, on n'en publie maintenant que neuf, parce que les autres expliquant ce qu'il y a de plus profond & de plus relevé dans les inventions extraordinaire de la Géométrie, ne sont pas nécessaires à ceux qui veulent commencer à apprendre cette Science*"...

Faţă de mărimea cărţii prefaţa lui PARDIES este tot atât de lungă ca şi titlul, are însă unele părţi interesante, în care se oglindeşte

felul de a vedea al matematicienilor din veacul al XVII-lea, preferinţele lor în acest domeniu şi încrederea ce o aveau în puterea acestei discipline. Desprind din ea următoarea apreciere asupra mărimilor incomensurabile: „*On y apprendra la démonstration des Grandeurs immensurables qui est peut-être l'effort le plus grand dont l'esprit humain soit capable, puisqu'il allant fouiller jusques dans la possibilité des choses, il decouvre avec tant de clarté ce qui est & ce qui n'est pas; et que dans la multitude infinie des comparaisons qu'il regarde toutes comme possibles entre deux grandeurs, il demontre avec une assurance inebranlable, que Dieu même n'en voit pas une capable de fournir une comme mesure de ces deux grandeurs*".

Vorbind de spaţiile asimptotice autorul deduce existenţa sufletului, apoi demonstrează în mod geometric existenţa lui Dumnezeu, ceea ce matematicienii acelor vremuri credeau că e posibil cu ajutorul acestei ştiinţe.

Prefaţa se sfârşeşte astfel: „*Que si par hasard il y rencontre quelque chose qui ne se trouve point ailleurs, et qu'il veuille me l'atribuer, alors je le reconaitrai pour mien, de peur qu'il ne soit a personne*".

Prefaţa lui PARDIES nu e reprodusă în ediţia dela Cluj.

CH. WOLFF [1]) aminteşte că *Elementele* lui PARDIES au fost traduse în limba latină de abatele SCHMIDT, profesor în Helmstadt, în timpul când preda matematicele şi filozofia la Jena.

(Va urma) VICTOR MARIAN.

PROBLEMA 1379

1. In această problemă se cere să se desvolte în serie după puterile crescătoare ale lui x, expresia

$$(1+ax)^{\frac{1}{x}},$$

1) *Elementa Matheseos Universae*, Tomus V, Halae Magdeburgicae, 1745, pag. 35.

şi să se arate că dacă notează cu $A_p(a)$ coeficientul lui x^p din desvoltare, atunci avem relaţia

$$(1) \quad A_p(a) = -aA_{p-1}(a) + e^a \int_0^a (1-u)\, e^{-u} A_{p-1}(u)\, du.$$

Enunţul problemei, propusă de D-l N. DIACONESCU la 15 Ianuarie 1909, în Vol. 14, conţine greşeli în compunerea relaţiei de recurenţă (1) ce leagă între ei doi coeficienţi consecutivi ai desvoltărei cerute.

Un caz particular, şi anume cazul $a = 1$, este considerat ca exerciţiu în „*Cours d'Analyse Mathématique*" de GOURSAT, Vol. I, ediţia V, pag. 452, relativ la substituirea unei serii într'altă serie. Metoda dată acolo se poate aplica cuvânt cu cuvânt şi în cazul expresiunei din enunţul problemei noastre.

Anume, notând pentru prescurtare pe $A_p(a)$ cu A_p, avem:

$$(2) \quad (1+ax)^{\frac{1}{x}} = A_0 + A_1 x + \ldots + A_p x^p + \ldots,$$

şi punând

$$(3) \quad y = \frac{1}{x}\log(1+ax) = \frac{a}{1} - \frac{a^2x}{2} + \frac{a^3x^2}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{a^{n+1}x^n}{n+1} + \ldots,$$

avem mai departe

$$(2') \quad (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^m}{m!} + \ldots$$

Deoarece seria din dreapta lui (2') este convergentă oricare ar fi y, desvoltarea (2), adică rezultatul obţinut din substituirea seriei (3) în (2'), şi seria dublă astfel obţinută ordonată după puterile lui x, va fi convergentă în aceleaşi condiţiuni ca şi seria (3); cu alte cuvinte atunci când: $|ax| < 1$ (vezi *loc. cit., caz particular No. 1*). In particular, această condiţie este satisfăcută dacă luăm: $|x| < 1$, $|a| < 1$.

2. Partea dificilă a problemei este calculul coeficienţilor A_p. Metoda dată în GOURSAT, cu ajutorul substituirei, este foarte greoaie. De aceea acolo, nu se găsesc calculaţi decât A_0 şi A_1. Cu ajutorul relaţiei de recurenţă (1) acest calcul este mult uşurat.

Să demonstrăm deci mai întâi această relaţie. Pentru aceasta derivăm pe (2), parte cu parte, în raport cu a. Obţinem:

$$(1+ax)^{\frac{1}{x}-1} = \Sigma x^p A'_p(a),$$

rezultat care comparat cu (2) ne dă identitatea

$$\Sigma x^p A_p(a) = (1+ax)\Sigma x^p A'_p(a),$$

şi identificând aci coeficienţii lui x^p din ambele părţi, găsim:

$$A_p(a) = A'_p(a) + aA'_{p-1}(a). \tag{4}$$

Considerând această relaţie ca o ecuaţie diferenţială, funcţiunea necunoscută fiind $A_p(a)$, şi integrând-o căpătăm:

$$A_p(a) = e^a\left[C - \int_0^a ue^{-u} A'_{p-1}(u)\,du\right],$$

unde C este o constantă ce urmează s'o determinăm. Luând $a=0$,

$$A_p(0) = C.$$

Dar, din (2) se vede că făcând $a=0$, obţinem:

$$A_0(0) = 1\ ,\ A_p(0) = 0 \qquad (p \geqslant 1),$$

aşa încât, presupunând $p > 0$, inegalitate ce se citeşte de pe forma lui (1) că trebue să fie îndeplinită, avem:

$$A_p(a) = -e^a \int_0^a ue^{-u} A'_{p-1}(u)\,du.$$

Pentru a ajunge la forma relaţiei din enunţ, integrăm prin părţi. Avem:

$$A_p(a) = e^a\left[ue^{-u} A_{p-1}(u)\right]_0^a + e^a\int_0^a (1-u)\,e^{-u} A_{p-1}(u)\,du;$$

$$A_p(a) = -aA_{p-1}(a) + e^a\int_0^a (1-u)\,e^{-u} A_{p-1}(u)\,du,$$

adică tocmai relaţia din enunţ.

Această relaţie de recurenţă este foarte interesantă deoarece permite calcularea coeficienţilor A_p din aproape în aproape când cunoaştem pe primul. Pentru A_0 se vede din (2) că avem:

$$A_0 = \lim_{x=0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$$

Găsim pe această cale pentru următorii patru coeficienți:

$$A_1 = -\frac{a^2}{2}e^a,$$

$$A_2 = a^3 e^a\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}a\right),$$

$$A_3 = -a^4 e^a\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}a+\frac{1}{48}a^2\right)$$

$$A_4 = a^5 e^a\left(\frac{1}{5}+\frac{13}{72}a+\frac{1}{24}a^2+\frac{1}{348}a^3\right).$$

3. Imi propun să dau acum o altă formulă care să permit calculul coeficienților A_p din aproape în aproape. Pentru aceasta derivăm desvoltarea (2), parte cu parte, în raport cu x. Aplicând formula derivării funcțiunilor compuse, găsim:

$$\frac{a}{x}(1+ax)^{\frac{1}{x}-1} - \frac{1}{x^2}(1+ax)^{\frac{1}{x}}\log(1+ax) = \Sigma\, px^{p-1}A_p,$$

formulă care comparată cu (2) ne dă

$$ax\,\Sigma\, x^p A_p - (1+ax)\log(1+ax)\,\Sigma\, x^p A_p = (1+ax)\,\Sigma\, px^{p+1}A_p.$$

Aci, ținând seama de desvoltarea în serie a lui $\log(1+ax)$, scrisă chiar mai sus, și identificând coeficienții lui x^{p+1} din ambele părți, găsim formula

$$(5)\quad pA_p = -(p-1)aA_{p-1} - \frac{a^2}{1.2}A_{p-1} + \frac{a^3}{2.3}A_{p-2} - \ldots + (-1)^p\frac{a^{p+1}}{p(p+1)}A_0.$$

Această formulă poate fi folosită cu succes în calculul coeficienților A_p. Are desavantajul față de (1) că folosește toți coeficienții desvoltării dinaintea celui pe care vrem să-l calculăm, pe când (1) numai coeficientul dinaintea lui. Dar are avantajul că nu folosește operația integrării.

4. *Observări. a)* Cu ajutorul formulei (5), stabilită la No. precedent, exercițiul din GOURSAT poate fi complectat cu o metodă simplă pentru calculul coeficienților desvoltării

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \Sigma\, x^p A_p.$$

Anume, avem:

$$(5') \quad pA_p = -(p-1)A_{p-1} - \frac{A_{p-1}}{1.2} + \frac{A_{p-2}}{2.3} - \ldots$$

$$+(-1)^p \frac{A_0}{p(p+1)}.$$

In particular, pentru primii cinci coeficienți găsim valorile

$$A_0 = e\ ,\ A_1 = -\frac{e}{2}\ ,\ A_2 = \frac{11e}{24}\ ,\ A_3 = -\frac{7e}{16}\ ,\ A_4 = \frac{2447e}{5760},$$

deduse din valorile date mai sus pentru coeficienții desvoltării (2), făcând $a = 1$.

b) Ar fi interesant dacă cineva ar găsi expresia explicită a coeficienților A_p.

GH. TH. GHEORGHIU.

ASUPRA UNEI PROBLEME A LUI GOURSAT

O problemă foarte importantă în teoria ecuațiilor lineare cu derivate parțiale de ordinul II și de tip iperbolic este aceea studiată de GOURSAT [1]).

Se cunosc puține ecuații particulare din clasa menționată pentru care s'a putut rezolva problema lui GOURSAT cu ajutorul transcendentelor elementare cunoscute, cu ajutorul unor integrale definite mai simple, sau prin serii. In acest articol, vom căuta să determinăm cu ajutorul seriilor soluțiunea $z(x, y)$ a ecuației

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z$$

care corespunde unui caz particular a problemei lui GOURSAT și anume: soluțiunea $z(x, y)$ căutată să se reducă dealungul dreptelor $x = x_0$ și $y = y_0$ la funcțiile date $Z_1(y)$ și $Z_2(x)$ [2]).

1) Annales de Toulouse T. VI. 3e Série.

2) In problema generală, în loc de drepte, se consideră două curbe continue ce nu au decât un singur punct comun și care mai satisfac și la alte condițiuni, verificate în cazul nostru. Aici, cele două drepte sunt tocmai *caracteristicile* ecuației (1).

Ecuaţia considerată se întâlneşte des în studiul ecuaţiilor de tip iperbolic. Astfel, ecuaţia celebră a telegrafiştilor

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

se reduce la ecuaţia (1) prin schimbarea $z = u \cdot e^{-t}$, şi luând ca variabile independente pe X şi Y definite prin relaţiile

$$X \cdot \sqrt{2} = x - t \quad , \quad Y \cdot \sqrt{2} = x + t.$$

La fel şi ecuaţia

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

unde a, b, c, sunt coeficienţi constanţi, se reduce la (1) prin schimbarea

$$z = u \cdot e^{ay - bx}$$

şi înlocuind pe x prin x/c.

După condiţiile puse asupra soluţiunei $z(x, y)$ a ecuaţiei (1), trebue să avem:

$$(2) \qquad z(x_0, y) = Z_1(y) \quad , \quad z(x, y_0) = Z_2(x)$$

cu condiţia de continuitate

$$Z_1(y_0) = Z_2(x_0)$$

adică funcţia $z(x, y)$ să ia pe dreptele menţionate un şir de valori date dinainte, valori care să coincidă respectiv cu cele corespunzătoare funcţiunilor $Z_1(y)$ şi $Z_2(x)$. Pentru moment, vom presupune aceste două funcţiuni dezvălibile în seria TAYLOR în jurul valorilor respective y_0 şi x_0, şi vom căuta soluţiunile ecuaţiei (1) care să fie de forma [1])

$$(3) \qquad z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y - y_0)^n}{n!} R_n(x).$$

Prin derivare, găsim:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{dR_n(x)}{dx}$$

1) Vom vedea la sfârşitul articolului condiţiile pe care trebue să le verifice funcţiunile necunoscute $R_n(x)$.

aşa că o identificare a acestor două serii după puterile lui $(y - y_0)$ ne va conduce la sistemul infinit de ecuaţii cu diferenţe amestecate

$$\frac{dR_n(x)}{dx} = R_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dacă integrăm prima relaţie $(n = 1)$ dela x_0 la x, obţinem:

$$R_1(x) = \int_{x_0}^{x} R_0(x)\,dx + R_1(x_0).$$

Procedând la fel cu a doua relaţie $(n = 2)$, găsim:

$$R_2(x) = \int_{x_0}^{x} R_1(x_1)\,dx_1 + R_1(x_0)\,(x - x_0) + R_2(x_0)$$

sau, ţinând seamă de expresia lui $R_1(x)$,

$$R_2(x) = \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} R_0(x_2)\,dx_2 + R_1(x_0)\,(x - x_0) + R_2(x_0).$$

Din aproape în aproape se ajunge la expresia generală a funcţiei $R_n(x)$

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \int_{x_0}^{x_2} dx_3 \ldots \int_{x_0}^{x_{n-1}} R_0(x_n)\,dx_n + R_1(x_0)\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{R_2(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + \ldots + R_n(x_0).$$

Ori, dacă ţinem seamă de formula generală [1])

$$\int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \ldots \int_{x_0}^{x_{n-1}} R_0(x_n)\,dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} \cdot R_0(t)\,dt$$

această expresie se poate pune sub forma

$$(4) \qquad R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} \cdot R_0(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} R_i(x_0)\frac{(x - x_0)^{n-i}}{(n-i)!}.$$

---

1) A se vedea GOURSAT. *Analyse.* T. II. Ediţia IV-a, pag. 520.

Soluțiunea (3) va fi deci reprezentată prin

$$(5)\quad z(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y-y_0)^n}{(n!)^2} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} R_0(t)\, dt + R_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y-y_0)^n}{n!} \sum_{i=1}^{n} R_i(x_0) \frac{(x-x_0)^{n-i}}{(n-i)!}.$$

Fără a ne preocupa pentru moment de convergența acestor serii, să intervertim semnul $\int_{x_0}^{x}$ cu semnul $\sum_{n=1}^{\infty}$. Soluțiunea $z(x, y)$ se va prezenta atunci sub forma unei sume de doi termeni

$$z(x,\ y) = z'(x,\ y) + z''(x,\ y)$$

unde am pus

$$z'(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y-y_0)^n (x-t)^{n-1}}{n!\ (n-1)!} R_0(t)\, d + R_0(x),$$

iar $z''(x, y)$ fiind a doua serie din relația (5).

Să punem acum condițiile (2). Pentru $x = x_0$, funcția z' este egală cu $R_0(x_0)$, așa că ne rămâne

$$z(x_0,\ y) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x_0) \frac{(y-y_0)^n}{n!} \equiv Z_1(y)$$

relație care ne arată că toți coeficienții $R_n(x_0)$ sunt respectiv coeficienții puterilor diferenței $(y - y_0)$ în seria TAYLOR care reprezintă funcția dată $Z_1(y)$ în vecinătatea valorii y_0:

$$R_n(x_0) = \left[\frac{d^n Z_1(y)}{dy^n} \right]_{y=y_0} = Z_1^{(n)}(y_0).$$

Apoi, pentru $y = y_0$, funcția $z''(x, y)$ este identic nulă, iar $z'(x, y)$ se reduce la termenul $R_0(x)$, așa că obținem

$$z(x,\ y_0) = R_0(x) \equiv Z_2(x).$$

Soluțiunea care corespunde problemei lui GOURSAT va fi deci:

$$(6)\quad z(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1} (y-y_0)^n}{(n-1)!\ n!} Z_2(t)\, dt + Z_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y-y_0)^n}{n!} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x-x_0)^{n-i}}{(n-i)!} Z_1^{(i)}(y_0).$$

In ecuația (1) însă, variabilele x și y joacă același rol, dacă ne mărginim la determinarea soluțiunilor $z(x, y)$ pentru care ordinea derivărilor este indiferentă, adică pentru care

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Putem atunci spune că și funcțiunea

$$(7)\quad z(x, y) = \int_{y_0}^{y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y-t)^{n-1}(x-x_0)^n}{(n-1)!\, n!} Z_1(t)\, dt + Z_1(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \sum_{i=1}^{n} \frac{(y-y_0)^{n-i}}{(n-1)!} Z_2^{(i)}(y_0)$$

este o soluțiune a ecuației (1) care satisface și ea condițiunilor (2). Știind că problema lui GOURSAT are o soluțiune unică [1]), rezultă că soluțiunile (6) și (7) sunt identice; avem două reprezentări diferite pentru aceeași funcțiune. Se poate observa în ambele formule că funcțiunile $Z_1(y)$ și $Z_2(x)$ sunt complect separate, așa că putem scrie soluțiunea ecuației (1) sub forma unei sume de două integrale

$$(8)\quad z(x, y) = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1}(y-y_0)^n}{(n-1)!\, n!} Z_2(t)\, dt + Z_2(x) + \int_{y_0}^{y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y-t)^{n-1}(x-x_0)^n}{(n-1)!\, n!} Z_1(t)\, dt + Z_1(y)$$

la care se adaugă cele două funcțiuni cunoscute $Z_1(y)$ și $Z_2(x)$. Această soluțiune însă nu verifică condițiile (2) căci

$$(2')\quad \begin{cases} \text{pentru } x = x_0 & z(x_0, y) = Z_2(x_0) + Z_1(y), \\ \text{iar pentru } y = y_0 & z(x, y_0) = Z_2(x) + Z_1(y_0) = Z_2(x) + Z_2(x_0) \end{cases}$$

ultima egalitate fiind o consecință a continuității funcției căutate $z(x, y)$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$, condiție care se traduce prin relația $Z_1(y_0) = Z_2(x_0)$. Comparând atunci condițiile (2) și (2') se observă că, pentru a găsi soluțiunea $z(x, y)$ a ecuației (1) care să verifice condițiile (2), e suficient să adăugăm soluțiunei (8) o soluție particulară a acestei ecuații care să ia pe ambele drepte $x = x_0$ și $y = y_0$ valoarea constantă $-Z_2(x_0)$. Această soluție particulară se

1) A se vedea memoriul citat al lui GOURSAT.

obţine imediat din (6) înlocuind pe $Z_2(x)$ [şi deci şi pe $Z_2(t)$] prin $-Z_2(x_0)$, şi făcând $Z_1^{(i)}(y_0) = 0$, pentru $i = 1, 2, \ldots$ Seria a doua va fi identic nulă, aşa că ne va rămâne

$$-Z_2(x_0)\int_{x_0}^{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-t)^{n-1}(y-y_0)^n}{(n-1)!\,n!}dt - Z_2(x_0)$$

soluţiune care se mai scrie, integrând seria termen cu termen,

$$(9)\qquad -Z_2(x_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n(y-y_0)^n}{(n!)^2}\ .$$

Seria aceasta, foarte convergentă de altfel ca şi celelalte serii introduse în tot articolul, este identică cu funcţiunea $J_0(z)$ a lui BESSEL în care s'a înlocuit variabila z prin $2i\sqrt{(x-x_0)(y-y_0)}$.

Să considerăm acum funcţiunea $z(x, y)$ definită de relaţia (8) la care s'a adăugat seria (9). Se vede imediat că ea verifică ecuaţia (1) şi că îndeplineşte şi condiţiile (2). Este deci soluţiunea căutată care răspunde problemei lui GOURSAT puse, ca şi funcţiile (6) şi (7) de altfel.

Dacă funcţia $Z_1(y)$ admite o derivată integrabilă într'un interval ce conţine pe y_0, o integrare prin părţi a celei de-a doua integrală care figurează în relaţia (9) ne permite să înglobăm termenul (9) în suma care e sub semnul $\int_{y_0}^{y}$

$$W(x, y) = Z_2(x) + \int_{x_0}^{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-t)^{n-1}(y-y_0)^n}{(n-1)!\,n!}Z_2(t)\,.\,dt$$

$$(10)\qquad +\int_{y_0}^{y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y-t)^n(x-x_0)^n}{(n!)^2}\,\frac{dZ_1(t)}{dt}\,dt.$$

Se poate face aceeaşi operaţie în caz când $Z_2(x)$ admite o derivată integrabilă.

Soluţia problemei lui GOURSAT pusă sub forma (8 + 9) sau (10) corespunde cazurilor următoare:

1. Funcţiunile date $Z_1(y)$ şi $Z_2(x)$ sunt dezvălibile în seria TAYLOR în orice punct al intervalelor respective:

$$a \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant b \quad \text{şi} \quad c \leqslant y_0 \leqslant y \leqslant d.$$

In această ipoteză, soluțiunea $W(x, y)$ este definită în dreptunghiul corespunzător acestor intervale în planul xOy. Ea poate fi însă definită și prin serii analoage cu cele din relațiile (6) și (7). Se poate lua mai sus și $x < x_0$ și $y < y_0$.

2. Funcțiunile $Z_1(y)$ și $Z_2(x)$ sunt finite și integrabile în intervalele menționate. Astfel este exemplul următor:

$$Z_1(y) = \sqrt{y - y_0} \quad , \quad Z_2(x) = \sqrt{x - x_0}$$

pentru care $Z_1(y_0) = Z_2(x_0) = 0$. Aceste funcțiuni nu sunt desfășurabile în seria TAYLOR în vecinătatea valorilor y_0 și x_0.

3. Funcțiunile $Z_1(y)$ și $Z_2(x)$ sunt numai integrabile, *însă ele admit valori finite în punctul* $M_0(x_0, y_0)$. Acesta e cazul funcțiunilor

$$Z_1(y) = \frac{A(y)}{\sqrt[3]{(y - y_1)^2}} \quad , \quad Z_2(x) = \frac{B(x)}{\sqrt[3]{(x - x_1)^2}} \qquad \begin{matrix} a \leqslant x_1 \leqslant b \\ c \leqslant y_1 \leqslant d \end{matrix}$$ [1]

$A(y)$ și $B(x)$ fiind două funcțiuni finite și integrabile în intervalele de mai sus, ele trebuind să fie alese astfel ca $Z_1(y_0) = Z_2(x_0)$. In acest caz, soluțiunea $W(x, y)$ devine infinită pe caracteristicile $x = x_0$ și $y = y_0$ la fel ca și funcțiile respective $Z_1(y)$ și $Z_2(x)$.

RADU BĂDESCU.

RAPORTUL COMISIUNEI

PENTRU

ACORDAREA PREMIULUI DE GEOMETRIE ELEMENTARĂ

Subsemnații, membri ai Comisiunei pentru acordarea premiului de Geometrie elementară pe anul 1938, am cercetat în Volumul XLIII, al *Gazetei Matematice* activitatea corespondenților, elevi de liceu.

In acest volum n'a fost publicat nici un articol, nu a apărut nici o notă care să aibă conținut de Geometrie elementară și să poarte semnătura unui corespondent elev de liceu.

---

1) Trebuind ca $x_1 \neq x_0$ și $y_1 \neq y_0$ ca valorile acestor funcțiuni să fie finite în punctul $M_0(x_0, y_0)$.

Insă examinând problemele rezolvate de Geometrie elementară, am apreciat că soluţiile date de D-l MIRCEA AL. VASILESCU-STABU sunt ilustrarea unui spirit geometric; dintre soluţii menţionăm:

a) Soluţia problemei 4619, urmată de 9 note în care sunt prezentate şi alte proprietăţi ale figurii problemei;

b) La problema 4691, redijorul, D-l ADR. GHEORGHIU, îi publică prima soluţie, urmată de observări;

c) La problema 4824, D-l N. MIHĂILEANU scrie: „soluţie directă foarte bună dată de D-l M. AL. VASILESCU-STABU;

d) Soluţia problemei 4762 este însoţită de observări.

Adăugând la acestea: activitatea bogată şi de foarte bună calitate desfăşurată de D-l M. AL. VASILESCU-STABU la *Suplimentul cu exerciţii al Gazetei Matematice*, conciziunea şi claritatea cu care sunt prezentate de D-sa soluţiile, calităţi cunoscute de redacţia *Gazetei Matematice*, propunem pentru a fi distins cu premiul de Geometrie elementară pentru 1938 pe D-l MIRCEA AL. VASILESCU-STABU, elev în clasa VII-a a Liceului „Gh. Lazăr" din Bucureşti.

MEMBRII COMISIUNEI PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE GEOMETRIE ELEMENTARĂ

C. IONESCU-BUJOR, AL. BUNESCU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în şedinţa Adunării generale din 23 Februarie 1939.

NOTE MATEMATICE

44. *Patru egalităţi multigrade.*

Ca continuare la nota dela pag. 244 din acest an, dau următoarele 4 exemple interesante de egalităţi multigrade:

1) $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Egalitate de 15 termeni:

$$(2, 4, 6, 23, 24, 27, 29, 35, 37, 45, 52, 55, 58, 65, 66)^{2p}$$
$$= (7, 10, 11, 13, 20, 30, 33, 36, 39, 40, 53, 54, 61, 62, 67).$$

2) $p = 1, 2, 3, \ldots, 7$. Egalitate de 15 termeni,

$$(3, 5, 47, 53, 57, 59, 61, 89, 103, 111, 111, 115, 139, 143, 153)^{2p}$$

$= (1, 23, 41, 43, 51, 65, 73, 93, 95, 99, 123, 123, 127, 149, 151).$

3) $p = 1, 2, \ldots, 7, 8$. Egalitate de 24 termeni:

$(5, 25, 37, 39, 49, 63, 67, 91, 97, 101, 111, 121, 121, 125,$
$125, 129, 149, 153, 163, 163, 167, 191, 195, 205)^{2p}$
$= (11, 13, 29, 51, 55, 61, 71, 75, 103, 109, 113, 113, 117,$
$117, 137, 141, 145, 145, 151, 175, 175, 179, 201, 203)$

cu $S_2 = 374952, \ldots$

4) $p = 1, 2, \ldots, 8, 9$. Egalitate de 29 de termeni.

$(3, 11, 13, 21, 45, 45, 69, 69, 71, 73, 77, 97, 103, 119, 127, 141,$
$143, 147, 155, 177, 185, 191, 211, 213, 215, 219, 243, 247, 257)^{2p}$
$= (5, 9, 23, 29, 35, 53, 57, 63, 65, 81, 87, 93, 111, 121, 123, 131,$
$139, 157, 159, 169, 195, 197, 197, 203, 227, 227, 231, 253, 255)$

cu $S_2 = 639101$, etc.

A. GLODEN
(Luxemburg).

45. *Problemă diofantiană.* 1°. Forma [1])

$$2(i^2 + 3k^3)^n = (2ik + 3k^2 - i^2)^n + (2ik + i^2 - 3k^2)^n + (4ik)^n$$

adevărată pentru $n = 2$ şi 4, dă identităţi de forma

$$2A^n = B^n + C^n + D^n; \qquad [n = 2, 4] \tag{1}$$

unde

$$D = B + C.$$

2°. In loc de (1) se poate scrie şi:

$$2(A^2)^n = (B^2)^n + (C^2)^n + (D^2)^n: \qquad [n = 1, 2]$$

sau încă

$$(O^2)^n + (A^2)^n + (A^2)^n = (B^2)^n + (C^2)^n + (D^2)^n; \qquad [n = 1, 2].$$

Se notează

$$s = \frac{2}{3}(A^2 + A^2) = \frac{2}{3}(B^2 + C^2 + D^2)$$

---

1) *The Mathematics Student* (Vol. 3, 1936). A. MOESSNER: *«General formule for constructing and solving certain simultaneous equations».*

şi se obţine

$$(s-O^2)^n + (s-A^2)^n + (s-A^2)^n = (s-B^2)^n + (s-C^2)^n + (s-D^2)^n ;$$

$$[n = 1, 2].$$

Dacă se pune

$$s - O^2 = 3b^2 \quad , \quad s - A^2 = 3a^2 \ ;$$

$$s - B^2 = 3x^2 \quad , \quad s - C^2 = 3y^2 \ , \quad s - D^2 = 3z^2$$

avem

$$(a^2)^n + (a^2)^n + (b^2)^n = (x^2)^n + (y^2)^n + (z^2)^n ; \qquad [n = 1, 2].$$

Avem deasemeni

$$a^n + a^n + b^n = x^n + y^n + z^n ; \qquad [n = 2, 4].$$

3⁰. Dacă

$$G_1^n + G_2^n + G_3^n = H_1^n + H_2^n + H_3^n$$

este adevărată pentru $[n = 1, 2]$, atunci avem şi

$$G_1^n + G_2^n + G_3^n + (s - G_1)^n + (s - G_2)^n + (s - G_3^n)$$

$$= H_1^n + H_2^n + H_3^n + (s - H_1)^n + (s - H_2)^n + (s - H_3)^n$$

$$[n = 1, 2, 3, 4, 5]$$

unde

$$s = \frac{2}{3}(G_1 + G_2 + G_3) = \frac{2}{3}(H_1 + H_2 + H_3).$$

Trebuie să avem deci şi

$$2(A^2)^n + 3^n[(a^2)^n + (a^2)^n + (b^2)^n] = (B^2)^n + (C^2)^n + (D^2)^n$$

$$+ 3^n[(x^2)^n + (y^2)^n + (z^2)^n] \qquad [n = 1, 2, 3, 4, 5].$$

Vom avea deci

$$2A^2 = B^2 + C^2 + D^2 \qquad a^2 + a^2 + b^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$2A^4 = B^4 + C^4 + D^4 \quad \text{şi} \quad a^4 + a^4 + b^4 = x^4 + y^4 + z^4$$

$$B + C = D \qquad a + a = b \ , \ x + y = z,$$

iar mai departe

$$2A^2 + 3(a^2 + a^2 + b^2) = B^2 + C^2 + D^2 + 3(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$2A^4 + 3(a^4 + a^4 + b^4) = B^4 + C^4 + D^4 + 3^2(x^4 + y^4 + z^4)$$
$$2A^6 + 3(a^6 + a^6 + b^6) = B^6 + C^6 + D^6 + 3^3(x^6 + y^6 + z^6)$$
$$2A^8 + 3(a^8 + a^8 + b^8) = B^8 + C^8 + D^8 + 3^4(x^8 + y^8 + z^8)$$
$$2A^{10} + 3(a^{10} + a^{10} + b^{10}) = B^{10} + C^{10} + D^{10} + 3^5(x^{10} + y^{10} + z^{10}).$$

4°. *Exemple numerice.* Dacă la 1° se face

$$i = 2 \quad \text{şi} \quad k = 1$$

se obţine $2.7^n = 3^n + 5^n + 8^n, \qquad [n = 2, 4].$

După înmulţirea bazei cu 3 se obţine:

$$2.21^n = 9^n + 15^n + 24^n, \qquad [n = 2, 4].$$

Ultima relaţiune este identică cu

$$2.441^n = 81^n + 225^n + 576^n, \qquad [n = 1, 2]$$

şi fiindcă

$$s = \frac{2}{3}(441 + 441) = \frac{2}{3}(81 + 225 + 576) = 588$$

avem şi identităţile:

$$2.21^2 + 3(7^2 + 7^2 + 14^2) = 9^2 + 15^2 + 24^2 + 3(2^2 + 11^2 + 13^2) = 42^2$$
$$2.21^4 + 3^2(7^4 + 7^4 + 14^4) = 9^4 + 15^4 + 24^4 + 3^2(2^4 + 11^4 + 13^4) = 882^2$$
$$2.21^6 + 3^3(7^6 + 7^6 + 14^6) = 9^6 + 15^6 + 24^6 + 3^3(2^6 + 11^6 + 13^6) = 381182760$$
$$2.21^8 + 3^4(7^8 + 7^8 + 14^8) = 9^8 + 15^8 + 24^8 + 3^4(2^8 + 11^8 + 13^8) = 196118530020$$
$$2.21^{10} + 3^5(7^{10} + 7^{10} + 14^{10}) = 9^{10} + 15^{10} + 24^{10} + 3^5(2^{10} + 11^{10} + 13^{10}) = 103785926086584$$

$$2.21^2 = 9^2 + 15^2 + 24^2 = 882$$
$$2.21^4 = 9^4 + 15^4 + 24^4 = 388962$$
$$9 + 15 = 24$$
$$7^2 + 7^2 + 14^2 = 2^2 + 11^2 + 13^2 = \frac{s}{2} = 490$$
$$7^4 + 7^4 + 14^4 = 2^4 + 11^4 + 13^4 = \frac{s}{2}(3.7^2) = 43218$$
$$7 + 7 = 14 \quad \text{şi} \quad 2 + 11 = 13.$$

A. MOESSNER
(Nürenberg).

46. *Asupra problemei 4648.*

Se observă că:

1) Dacă $b \leqslant c$ atunci:

$$\frac{b^{2n}}{\operatorname{ch}^{2n} x} - \frac{c^{2n}}{\operatorname{sh}^{2n} x} < 0$$

n fiind un întreg pozitiv.

2) Dacă $x \geqslant 0$ atunci:

$$\frac{b^{n}}{\operatorname{ch}^{n} x} - \frac{c^{n}}{\operatorname{sh}^{n} x} \leqslant 0.$$

3) Dacă $b^n - c^n \leqslant a^n$ atunci:

$$\frac{b^{2n}}{\operatorname{ch}^{2n} x} - \frac{c^{2n}}{\operatorname{sh}^{2} x} \leqslant a^{2n}.$$

I. L.

47. *Asupra problemei 1271.* Soluţia care s'a dat acestei probleme, la pag. 310 a acestui volum, este parţial eronată. In adevăr, neţinându-se seama de anumite fenomene fizice ce se petrec în circuitele electrice, rezultatele obţinute sunt altele decât cele reale, după cum se va vedea în cele ce urmează.

Să notăm cu:

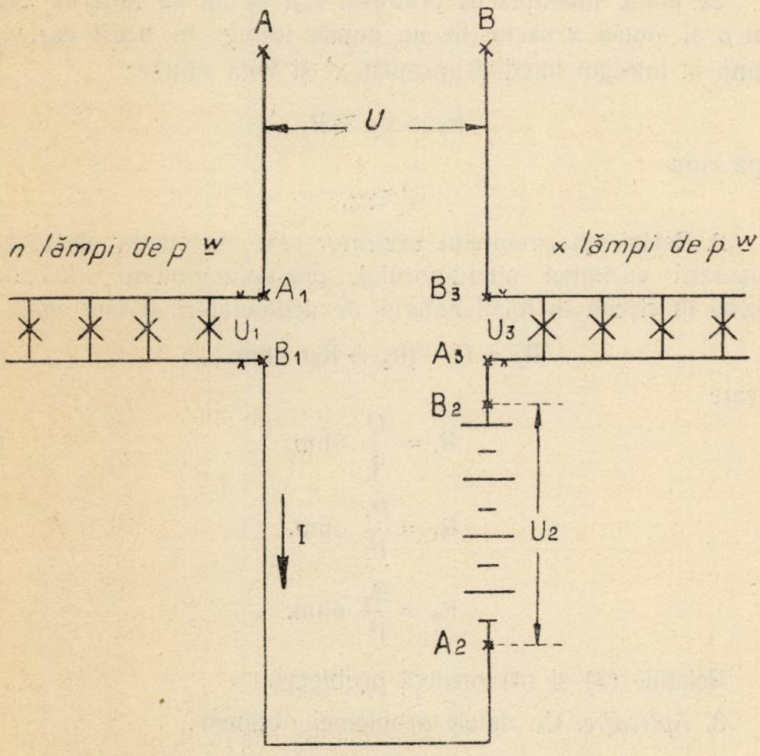
U volt, tensiunea la bornele AB a circuitului general.
U_1 „ „ „ „ A_1B_1 a circuitului de lămpi din locuinţă.
U_2 „ „ „ „ A_2B_2 a bateriei de acumulatori sau a circuitului de excitaţie.
U_3 „ „ „ „ A_3B_3 a circuitului de lămpi din laborator.
I amp., intensitatea curentului ce circulă în circuit.
p watt, puterea absorbită de o lampă.
P_1 „ puterea absorbită de circuitul de lămpi din locuinţă.
P_3 „ „ „ „ „ „ „ „ laborator.
R ohm, rezistenţa electrică a circuitului *exterior.*
R_1 „ „ „ „ „ lămpilor din locuinţă.
R_2 „ „ „ „ „ *excitator.*
R_3 „ „ „ „ „ lămpilor din laborator.

1. Aplicând a doua lege a lui KIRCHOFF, obţinem imediat următoarea relaţie între tensiuni:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \text{ volt}$$

de unde deducem

$$U_3 = U - (U_1 + U_2) \text{ volt.} \qquad (1)$$



Pe de altă parte, cunoscând puterea absorbită de lămpile din locuinţă precum şi tensiunea la bornele acestui circuit, deducem curentul care circulă în întreg circuitul, cele 3 circuite parţiale fiind în serie.

Avem:

$$I = \frac{np}{U_1} = \frac{P_1}{U_1} \text{ amp.} \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) deducem puterea absorbită de circuitul de lămpi din laborator şi deci numărul de lămpi necesare acestui circuit, lămpile folosite fiind identice cu acelea din locuinţă:

$$P_3 = xp = U_3 I \text{ watt}$$

$$\therefore \qquad x = \frac{U_3 I}{p} \cdot \tag{3}$$

Se poate întâmpla ca produsul $U_3 I$ să nu se împartă exact prin p şi atunci x să nu fie un număr întreg. In acest caz vom rotunji la întregul imediat apropiat x' şi vom obţine:

$$P_3' = x'p \gtrless P_3$$

după cum

$$x' \gtrless x.$$

2. Rezistenţa circuitului *excitator* este rezistenţa electrică a înfăşurării excitaţiei alternatorului, presupunându-se intercalată aceasta în circuit în locul bateriei de acumulatori, şi este egală cu

$$R_2 = R - (R_1 + R_3) \text{ ohm}, \tag{4}$$

în care

$$R = \frac{U}{I} \text{ ohm}, \tag{5}$$

$$R_1 = \frac{P_1}{I^2} \text{ ohm},$$

$$R_3 = \frac{P_3}{I^2} \text{ ohm}.$$

Relaţiile (3) şi (4) rezolvă problema.

3. *Aplicaţie.* Cu datele problemei obţinem:

$$U_3 = 220 - (110 + 10) = 100 \text{ volt}$$

$$p = 16 \times 3,\ 4375 = 55 \text{ watt}$$

$$P_1 = 20 \times 55 = 1100 \text{ watt}$$

$$I = \frac{1100}{110} = 10 \text{ amp.}$$

$$x = \frac{100 \times 10}{55} = 18,\ 18$$

vom lua

$$x' = 18$$

şi rezultă

$$P_3' = 18 \times 55 = 990 \text{ watt.}$$

Rezistenţa circuitului *exterior* este:

$$R = \frac{220}{10} = 22 \text{ ohm.}$$

Avem apoi

$$R_1 = \frac{1100}{10^2} = 11 \text{ ohm} \qquad (6)$$

şi

$$R_3 = \frac{990}{10^2} = 9{,}9 \text{ ohm;} \qquad (7)$$

rezultă dar că rezistenţa circuitului *excitator* este

$$R_2 = 22 - (11 + 9{,}9) = 1{,}1 \text{ ohm.}$$

4. *Observaţiuni.* 1°. Putem verifica valorile obţinute în (6) şi (7). Curentul absorbit de o lampă din locuinţă este

$$i_1 = \frac{10}{20} = 0{,}5 \text{ amp.}$$

rezistenţa proprie a unei lămpi din locuinţă este

$$r_1 = \frac{p}{i_1^2} = \frac{55}{0{,}5^2} = 220 \text{ ohm.}$$

Rezistenţa circuitului de lămpi din locuinţă va fi (lămpile fiind aşezate în paralel):

$$R_1 = \frac{220}{20} = 11 \text{ ohm.}$$

Curentul absorbit de o lampă din laborator este

$$i_3 = \frac{10}{18} = 0{,}55\ldots \text{ amp.}$$

rezistenţa proprie a unei lămpi din laborator este

$$r_3 = \frac{55}{\left(\frac{10}{18}\right)^2} = 178{,}2 \text{ ohm.}$$

Rezistența circuitului de lămpi din laborator va fi deci

$$R_3 = \frac{178,2}{18} = 9,9 \text{ ohm.}$$

2°. Deși lămpile folosite atât în locuință cât și în laborator sunt identice, totuși rezistența interioară a acestora din urmă e mai mică. Acesta este un fenomen fizic ce se petrece la lămpile cu filament de carbon, la care rezistența electrică scade când crește intensitatea curentului. Lămpile considerate de autorul problemei nu pot fi decât lămpi cu filament de carbon, mai întâiu din cauza rezistenței interioare (în jurul a 200 ohm) și apoi, pentru că, în anii 1908—9, când s'a propus problema, nu existau astfel de lămpi, lămpile cu filament metalic descoperindu-se abia mai târziu.

3°. In tot calculul nu s'a ținut seama deloc de rezistența electrică a conductorilor care leagă diferitele aparate sau instalații între ele. Credem că din aceste motive autorul a cerut determinarea mărimii rezistenței circuitului exterior ; redijorul problemei a interpretat enunțul în același sens.

4°. Expresiunea *„antecalat"* nu se mai întrebuințează astăzi în electrotechnică. Dealtfel, din punct de vedere technic, este indiferent dacă se leagă lămpile înainte sau după bateria de acumulatori.

I. S. ANTONIU.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tom. CXXVII. Fascicola III. Martie 1939. Buenos-Aires.

Extensiuni ale teoremei ABEL-STOLZ și asupra unor transformări funcționale lineare, de JUAN C. VIGNAUX.

Idem. Asupra funcțiunilor poligene de variabilă complexă și bicomplexe hiperbolice, de J. C. VIGNAUX, Fundamente ale calculului vectorial de A. E. SAGASTUME BERRA și AUGUSTIN DURANONA-VEDIA.

Boletin Matematico. Anul XII. Nr. 5. Mai 1939. Buenos-Aires. Asupra geometriei analitice complexe, de B. I. BAIDAFF.

Idem. Anul XII. Nr. 6. Mai 1939. Buenos-Aires. Asupra proprietăţilor determinanţilor de A. CALDERON.

Buletinul Institutului Român pentru Betoane, Construcţii şi Drumuri. Anul IV. Nr. 1—3. Ianuarie-Martie 1939. Bucureşti. Retragerea din învăţământul technic superior a Domnului Profesor Inginer ION IONESCU (articol omagial).

Bulletin of the American Mathematical Society. Volumul 45. Nr. 5. Mai 1939. Menasha, Wis., & New-York.

Journal de Mathématiques élémentaires, publicat de H. VUIBERT. Anul 63. Nr. 17. 1 Iunie 1939. Paris.

Idem. Anul 63. Nr. 18. 15 Iunie 1939. Paris.

Mathesis, publicată de AD. MINEUR. Tom. LIII. Nr. 4. Aprilie-Mai 1939. Bruxelles. Note de aritmetică de V. THÉBAULT, Proprietăţi ale cuarticei piriforme deduse ca loc al centrului instantaneu de mişcare al unei figuri plane variabile cu conservarea similitudinei de N. ABRAMESCU, Colineaţiunea punctelor infinit vecine de R. DEPAU, O proprietate a sistemelor lineare de ordin minimum a curbelor algebrice plane, de P. DEFRISE. Asupra formulei generale de adunare a tangentelor de R. GOORMAGHTIGH, Geometria triunghiului (revederea proprietăţilor cunoscute) de AD. MINEUR, Asupra triunghiului special la care distanţa punctelor lui BROCARD este maximă de V. CAVALLARO.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Vol. XX. Fascicola 1. Groningen 1939.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIX. Nr. 4. 15 Iunie 1939. Trigonometria patratică (urmare) de V. ALACI.

Revista Matematică a Societăţii „Traian Lalescu". Intre ocupaţiunile pe care le-a avut matematicianul român TRAIAN LALESCU a fost şi aceea de Profesor la Gimnaziul din Giurgiu. In amintirea faptului că TRAIAN LALESCU a ilustrat catedra de matematici a acelui Gimnaziu, — azi transformat în Liceul „ION MAIORESCU", — profesori şi elevi ai Liceului au constituit o Societate în „scopul de a ridica nivelul matematic al elevilor".

Această Societate şi-a propus să scoată o revistă matematică. Din lipsă de mijloace, s'a scos No. 1 în Decemvrie 1937 şi No. 2 în Ianuarie 1938 după care a încetat. Aceste numere sunt şapilografiate pe câte 12 pagini de hârtie albă. In primul Număr, D-l BEŞLEAGĂ FLOREA publică un scurt articol intitulat: „TRAIAN LALESCU, *Viaţa şi Opera*". D-l RĂDULESCU MIHALACHE scrie o pagină despre „*Cum a luat fiinţă Societatea* TRAIAN LALESCU". Revista conţine apoi probleme propuse, rezolvate şi ca model de redijare; rebusuri matematice, bibliografie.

Aceste două numere ne-a fost trimise de abia anul acesta de către corespondentul nostru D-l CHERŢMAN S. MOZES fost „*Redactor al Revistei*". D-sa ne comunică că „*Iniţiativa merită să fie lăudabilă numai pentru însemnătatea ei istorică*".

O asemenea inițiativă de a comemora în o Școală pe foștii ei profesori merituoși este în adevăr lăudabilă; ea însă când se ia, trebue făcută cu toată seriozitatea căci nu este permis de a se ataşa numele unui om, care a lăsat urme în această țară, unei reviste efemere! In timpurile de azi, când tinerii se ocupă mai mult de sporturile fizice decât de cele matematice, viața unei Reviste Matematice se duce greu. Tiparul este scump şi cititorii puțini. Cred că s'ar da mai multă atenție memoriei lui TRAIAN LALESCU, fost profesor al liceului lor, lucrând intens la *Revista Matematică din Timişoara*, creiată de dânsul pentru liceeni, decât punându-i numele pe opere nedurabile.

I. IONESCU.

Sphinx, revue mensuelle des questions récréatives. Anul IX. Nr. 7. Iulie 1939. Bruxelles.

CERERI

Răspuns la Cererea No. 281.

Am găsit această lucrare în Biblioteca Universității din Cluj şi cred important de adăugat că ea a apărut ulterior şi în limba română.

La 1879 ION CAVALER DE PUŞCARIU, cu ocazia decernării premiului „LAZĂR în valoare de 5000 Lei, a prezentat Academiei Române în 12 exemplare manuscrisul întitulat:

„*Stereometru* | *Instrumentŭ pentru mĕsurarea corpurilorŭ* | *inventatŭ* | *de* | IOAN I. PUŞCARIU | *Inginieru, şeful secțiunii V de controlă peste* | *căile ferate la Craiova* | ".

Desigur că premiul i-a fost acordat pentrucă la 1887 apare aceeaşi lucrare sub titlul:

„*Stereometrul* | *Instrument brevetat şi premiat* | *pentru măsurătoarea corpurilor* | *de* | ION JOE PUŞCARIU | *Inginer* | *cu 14 figuri şi 2 tabele.* | *Bucureşti* | *Tipo-Litografia Eduard Weigand, Str. Covaci No. 14* | *Succesorul. Firmei Ştefan Mihăilescu* | *1887* | ".

Lucrarea e împărțită în următoarele capitole: Introducere asupra întrebuințării Stereometrului, Descriere, Maniera d'a se servi de Stereometru, Tabela I (Formule Stereometrice), Tabela II (Greutatea materialelor solide şi liquide mai usitate).

Tot aici se menționează că aparatul a fost construit şi pus în vânzare de fabrica de instrumente geodezice HENRI CERF din Bruxelles.

Ediția germană a acestei lucrări se deosebeşte de cea dela Bucureşti prin faptul că aceasta din urmă este mult mai concisă, neconținând însă nici o inovație.

Cred important să mai adaug că PUŞCARIU a mai publicat şi următoarele lucrări cu caracter ştiințific:

Considerațiuni asupra timpului și spaciului Budapesta 1878.
Curs elementar despre electricitate cu aplicațiuni la aparatele C. F. R. și despre instalațiunile de centralizare a acelor și semnalelor. București 1897.

VICTOR HERMAN
(Student, Cluj).

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

EMILE VIGARIÉ. La Bibliographie de la Géométrie du Triangle. Paris 1895.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. GEORGE BRUCE HALSTED. Tempio 1903.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1379. *Să se dezvolte în serie după puterile crescătoare ale lui* x *expresiunea:*

$$(1 + ax)^{\frac{1}{x}},$$

și să se arate că coeficienții a doi termeni consecutivi satisfac ecuația:

$$A_p = -aA_{p-1} + e^a \int_0^a A_{p-1}\,(a-1)\,e^{-a}\,da\ ^1).$$

N. DIACONESCU.

Soluția acestei probleme este conținută în articolul „*Problema 1379*“ publicat în numărul de față.

GH. TH. GH.

1) Enunț corectat.

PROBLEMA 3404. *Insemnând cu* $\left[\frac{n}{2}\right]$ *cel mai mare întreg cuprins în* $\frac{n}{2}$, *să se demonstreze identitatea :*

$$5(-1)^n u^2_{\left[\frac{n}{2}\right]-1} + 5\frac{1-(-1)^n}{2} u^2_{\left[\frac{n}{2}\right]} + [3(-1)^n - 1](-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} = u_n + u_{n-2}$$

u_n *fiind termenul de rangul n din şirul lui* FIBONNACCI

$$(u_1 = 1 \quad , \quad u_2 = 2).$$

N. KAUFMANN.

Soluţia I. Se cunosc următoarele relaţii, între termenii lui FIBONNACCI

(1) $u_n^2 + u_{n-1}^2 = u_{2n}$ (G. M. Vol. XXI pag. 129)

(2) $u_{m+n} = u_m u_n + u_{m-1} u_{n-1}$ („ „ „ „ „ 249)

(3) $u_n u_{n-2} - u_{n-1}^2 = (-1)^n$ („ „ „ XXIX „ 214).

După enunţ trebue să deosebim două cazuri.

Cazul 1) : $n = 2p$. Relaţia din enunţ se reduce la

(4) $$5u_{p-1}^2 + 2(-1)^p = u_{2p} + u_{2p-2}.$$

Pentru membrul întâi al lui (4), avem succesiv, dacă ţinem seamă de (1), (2) şi (3):

$$5u_{p-1}^2 + 2(-1)^p = 3u_{p-1}^2 + 2[u_{p-1}^2 + (-1)^p] = 3u_{p-1}^2 + 2u_p u_{p-2}$$

$$= 3u_{p-1}^2 + 2(u_{p-1} + u_{p-2}) u_{p-2} = 3u_{p-1}^2 + 2u_{p-1} u_{p-2} + 2u_{p-2}^2$$

$$= 2u_{p-1}^2 + (u_{p-1} + u_{p-2})^2 + u_{p-2}^2 = 2u_{p-1}^2 + u_p^2 + u_{p-2}^2$$

$$= (u_p^2 + u_{p-1}^2) + (u_{p-1}^2 + u_{p-2}^2) = u_{2p} + u_{2p-2}$$

care este tocmai membrul al doilea al lui (4).

Cazul 2) : $n = 2p + 1$. Relaţia din enunţ devine :

(5) $$-5u_{p-1}^2 + 5u_p^2 - 4(-1)^p = u_{2p+1} + u_{2p-1}.$$

Pentru membrul întâi al acestei relaţii avem succesiv:

$$-5u_{p-1}^2+5u_p^2-4(-1)^p=-u_{p-1}^2+5u_p^2-4[u_{p-1}^2+(-1)^p]$$

$$=-u_{p-1}^2+5u_p^2-4u_p u_{p-2}=u_p^2-u_{p-1}^2+4u_p(u_p-u_{p-2})$$

$$=u_p^2-u_{p-1}^2+4u_p u_{p-1}=u_p^2+u_p u_{p-1}-u_{p-1}^2+u_p u_{p-1}+2u_p u_{p-1}$$

$$=u_p(u_p+u_{p-1})+u_{p-1}(u_p-u_{p-1})+2u_p u_{p-1}$$

$$=u_{p+1}u_p+u_{p-1}u_{p-2}+2u_p u_{p-1}$$

$$=(u_{p+1}u_p+u_p u_{p-1})+(u_p u_{p-1}+u_{p-1}u_{p-2})=u_{2p+1}+u_{2p-1}$$

adică tocmai membrul doi al relaţiei (5).

Această soluţie a fost dată, la epoca la care a fost propusă problema, de D-nii: T. V. DIACONESCU, U. M. FLORESCU, B. V. GATAIANŢU, GH. TH. GHEORGHIU şi G. TAILER.

Soluţia II. Pentru $n=1$ şi $n=2$ se verifică uşor identitatea. Să arătăm că dacă ea este adevărată pentru n va fi adevărată şi pentru $n+1$. Considerăm pe rând cele două cazuri dela soluţia I.

1. $n=2p$. Inlocuind în (4) pe p prin $p+1$ obţinem:

$$5u_p^2+2(-1)^p=u_{2p+2}+u_{2p}$$

care adunată cu (4) dă:

$$5(u_p^2+u_{p-1}^2)=u_{2p+2}+2u_{2p}+u_{2p-2}$$

sau ţinând seamă de (1):

$$5u_{2p}=u_{2p+2}+2u_{2p}+u_{2p-2}$$

$$\therefore\quad 3u_{2p}=u_{2p+2}+u_{2p}-2.$$

Dar

$$u_{2p+2}=u_{2p+1}+u_{2p}=2u_{2p}+u_{2p-1}$$

$$u_{2p-2}=u_{2p}-u_{2p-1}$$

$$\therefore\quad u_{2p+2}+u_{2p-2}=3u_{2p}$$

şi deci identitatea este adevărată.

2. $n=2p+1$. Trebue arătat că (5) este adevărată şi cum din (1), (2), (3) se scoate

$$u_p^2-u_{p-1}^2=u_p^2-(u_{p+1}-u_p)u_{p-1}=u_p^2-u_{p+1}u_{p-1}+u_p u_{p-1}$$

$$=(-1)^p+u_p u_{p-1}$$

rezultă că trebue demonstrat că:

$$(6) \qquad 5u_p u_{p-1} + (-1)^p = u_{2p+1} + u_{2p-1}.$$

Inlocuim în (6) pe p prin $p+1$ şi obţinem:

$$5u_{p+1} u_p + (-1)^{p+1} = u_{2p+3} + u_{2p+1}$$

care adunată cu (6) dă:

$$(7) \qquad 5(u_{p+1} u_p + u_p u_{p-1}) = u_{2p+3} + 2u_{2p+1} + u_{2p-1}.$$

In virtutea identităţii (2) membrul întâi al lui (7) devine:

$$5(u_{p+1} u_p + u_p u_{p-1}) = 5u_{p+1},$$

iar membrul al doilea, succesiv:

$$u_{2p+3} + 2u_{2p+1} + u_{2p-1} = (u_{2p+2} + u_{2p+1}) + 2u_{2p+1} + (u_{2p+1} - u_{2p})$$

$$= u_{2p+2} + 4u_{2p+1} - u_{2p} = (u_{2p+1} + u_{2p}) + 4u_{2p+1} - u_{2p} = 5u_{2p+1}$$

ceea ce arată că (7) este adevărată, deci şi identitatea din enunţ este adevărată.

Această soluţie a fost dată de D-l I. C. VASILIU.

Notă. Dacă a şi b sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 - x - 1 = 0$$

avem:

$$u_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

Intre a şi b avem relaţiile:

$$a + b = 1 \quad ; \quad ab = -1 \quad ; \quad (a-b)^2 = 5$$

$$a = a^2 - 1 \quad ; \quad b = b^2 - 1.$$

Să considerăm suma $a^n + b^n$ în care înlocuim pe n prin $2p$. Avem succesiv:

$$a^{2p} + b^{2p} = (a^p - b^p)^2 + 2a^p b^p = (a-b)^2 \left(\frac{a^p - b^p}{a - a}\right)^2 + 2(ab)^p$$

$$= 5u_{p-1}^2 + 2(-1)^p.$$

Dacă $n = 2p + 1$ avem:

$$a^{2p+1} + b^{2p+1} = (a^2 - 1)\, a^{2p} + (b^2 - 1)\, b^{2p} = a^{2p+2} + b^{2p+2} - (a^{2p} + b^{2p})$$

sau, în virtutea rezultatului precedent

$$a^{2p+1} + b^{2p+1} = 5u_p + 2(-1)^{p+1} - 5u_{p-1}^2 - 2(-1)^p = 5u_p^2 - 5u_{p-1}^2 - 4(-1)^p.$$

Aceste rezultate se pot concentra în formula

$$a^n + b^n = (-1)^n 5u^{2\left[\frac{n}{2}\right]-1} + 5\frac{1-(-1)^n}{2}u^{2\left[\frac{n}{2}\right]} + [3(-1)^n - 1](-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

valabilă, oricare ar fi paritatea lui n.

Pe de altă parte se vede că:

$$a^n + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} + \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b} = u_n + u_{n-2}.$$

Comparând aceste două valori ale lui $a^n + b^n$ se ajunge la identitatea din enunț.

N. K.

PROBLEMA 3565. *Care sunt patratele de cinci cifre, care rămân tot patrate dacă mutăm prima cifră dela stânga la dreapta?*

EM. GH. GAIN.

Soluție dată de D-l N. O. ZAHARIA (când era în clasa VI-a la Lic. „Mircea cel Bătrân", Constanța).

Conform enunțului, trebue căutate patratele

$$N^2 = abcde \quad \text{și} \quad M^2 = bcdea.$$

Cifra a cu care începe N^2 fiind terminațiunea lui M^2 va fi una din cifrele

(1) 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Sunt deci de examinat 6 cazuri, după valorile lui a.

Cazul I, $a = 0$. Evident că $e = 0$, dar atunci $d = 0$ și din aproape în aproape examinând pe N^2 și M^2 se găsește că toate cifrele sunt nule. Deci nu avem soluție în acest caz.

Cazul II, $a = 1$. M^2 se termină în $e1$. Examinând tabloul terminațiunilor unui patrat perfect:

(2) 00; 01; 04; 09; 16; 21; 24; 25; 29; 36; 41;
44; 49; 56; 61; 64; 69; 76; 81; 84; 89; 96

și ținând seamă că e fiind unimile lui N^2, face parte din șirul (1), urmează că $e1$ poate fi 01, 41 sau 61. Pentru fiecare valoare a lui e vom avea din șirul (2), pentru zecile d ale lui N^2 o serie de

valori cu ajutorul cărora formăm următorul tabel corespunzător cazului II:

e	Valorile posibile ale lui N^2 și M^2	
0	N^2	$1bc00$
	M^2	$bc001$
4	N^2	$1bc04$; $1bc24$; $1bc44$; $1bc64$; $1bc84$
	M^2	$bc041$; $bc241$; $bc441$; $bc641$; $bc841$
6	N^2	$1bc16$; $1bc36$; $1bc56$; $1bc76$; $1bc96$
	M^2	$bc161$; $bc361$; $bc561$; $bc761$; $bc961$

Cazul III, $a = 4$. Prin aceeași examinare a terminațiunilor patratelor perfecte construim următorul tabel:

e	Valorile posibile ale lui N^2 și M^2	
0	N^2	$4bc00$
	M^2	$bc004$
4	N^2	$4bc04$; $4bc44$; $4bc64$; $4bc84$
	M^2	$bc044$; $bc444$; $bc644$; $bc844$
6	N^2	$4bc16$; $4bc36$; $4bc56$; $4bc76$; $4bc96$
	M^2	$bc164$; $bc364$; $bc564$; $bc764$; $bc964$

Cazul IV, $a = 5$. M^2 trebue să se termine în 25, deci $e = 2$ ceea ce este imposibil, căci e este unimea lui N^2.

Cazul V, $a = 6$. Găsim:

e	Valorile posibile ale lui N^2 şi M^2	
1	N^2	$6bc01$; $6bc21$; $6bc41$; $6bc61$; $6bc81$
	M^2	$bc016$; $bc216$; $bc416$; $bc616$; $bc816$
5	N^2	$6bc25$
	M^2	$bc256$
9	N^2	$6bc09$; $6bc29$; $6bc49$; $6bc69$; $6bc89$
	M^2	$bc096$; $bc296$; $bc496$; $bc696$; $bc896$

Cazul VI, $a = 9$. Avem tabelul:

e	Valorile posibile ale lui N^2 şi M^2	
0	N^2	$9bc00$
	M^2	$bc009$
4	N^2	$9bc04$; $9bc24$; $9bc44$; $9bc64$; $9bc84$
	M^2	$bc049$; $bc249$; $bc449$; $bc649$; $bc849$
6	N^2	$9bc16$; $9bc36$; $9bc56$; $9bc76$; $9bc96$
	M^2	$bc169$; $bc369$; $bc569$; $bc769$; $bc969$

Acum trebue determinate cifrele b şi c pentru fiecare din numerele N^2 şi M^2 înscrise în tablourile precedente şi apoi examinate acele numere şi reţinute numai patratele perfecte.

Această cercetare este foarte lungă şi migăloasă, ea se reduce la câteva ridicări la patrat întrebuinţând calea ce urmează.

Să examinăm, de exemplu, numerele de forma

$$N^2 = 1bc44 \quad , \quad M^2 = bc441$$

din tabelul dela cazul II. Avem:

$$10044 < N^2 < 19944 \quad \therefore \quad 100 < N < 142$$

şi deoarece N^2 se termină cu 4, N se va termina cu 2 sau 8 şi va fi deci printre numerele

(3) 102, 108, 112, 118, 122, 128, 132, 138.

In articolul *„Asupra ultimului grup de* p *cifre ale patratelor perfecte"* publicat la pag. 366, Vol. XXXVII, *Gazeta Matematică*, s'a stabilit următoarea corespondenţă reciprocă între terminaţiunea *zu* a lui N^2 şi forma parametrică pe care o poate avea N:

zu	00	01	04	09	16	21	24	25	29	36	41
N	$10n$	$50n\pm1$	$50n\pm2$	$50n\pm3$	$50n\pm4$	$50n\pm11$	$50n\pm18$	$10n\pm5$	$50n\pm23$	$50n\pm6$	$50n\pm21$
zu	44	49	56	61	64	69	76	81	84	89	96
N	$50n\pm12$	$50n\pm7$	$50n\pm16$	$50n\pm19$	$50n\pm8$	$50n\pm13$	$50n\pm24$	$50n\pm9$	$50n\pm22$	$50n\pm17$	$50n\pm14$

Pentru exemplul $zu = 44$ ce am considerat, N din şirul (3) trebue să fie de forma $50n \pm 12$. Ori în şirul (3) numai

$$112 = 50n + 12 \quad \text{şi} \quad 138 = 50n - 12.$$

Dar $112^2 = 12544$ iar 25441 nu e patrat perfect. Deasemeni nici 138 nu dă soluţie.

Procedând la fel cu toate numerele cuprinse în cele 3 tablouri am găsit următoarele 8 grupe de soluţii:

N^2	$100^2=10000$	$108^2=11664$	$122^2=14844$	$200^2=40000$
M^2	$1^2=00001$	$129^2=16641$	$221^2=48841$	$2^2=00004$
N^2	$216^2=46656$	$245^2=60025$	$300^2=90000$	$310^2=96100$
M^2	$258^2=66564$	$16^2=00256$	$3^2=00009$	$247^2=61009$

Unele valori ale lui M^2 sunt numai formal de 5 cifre.

Notă. 1°. D-l N. O. ZAHARIA, care a găsit toate soluţiile, a dat şi toate calculele necesare pentru aflarea lor.

2°. Ca mai în toate problemele de natura acesteia, rezolvitorii nu sunt de acord asupra numărului soluţiilor, şi aceasta pentru că nu se examinează cu atenţie toate cazurile posibile. Pentru problema de faţă, corespondenţii care au trimis soluţii, se clasează pe grupe, după cum urmează din punctul de vedere al numărului de soluţii găsite:

8 soluţii, D-nii: GH. M. CĂLIN, H. P. IONESCU, C. I. ISTINIE-BREZUICA, I. Z. PANŢU şi N. O. ZAHARIA.

7 soluţii, D-l P. I. GHIŞOIU.

6 soluţii, D-nii: TH. G. COCEA şi I. C. VOICU.

4 soluţii, D-nii: I. N. CONSTANTINESCU, C. I. CRISTESCU-POTLOGI, B. V. GATAIANŢU, GR. I. GRUBERMANN, I. I. ILIUŢĂ-DĂBULENI, N. T. IVANOVICI, M. B. MARINAŞ, GH. M. PĂUN şi D. ŞERBAN-ULMENI.

3 soluţii, D-nii: STELIAN D. POPESCU, V. C. POPESCU şi M. I. UNGHEANU.

2 soluţii, D-nii: I. N. ALIMAN, M. N. CONSTANTINESCU, N. N. COSTACHI, M. I. FLOAREŞ, M. MARGULIUS şi N. G. VOICU.

1 soluţie, D-l: T. G. BACIU.

Majoritatea o formează cei care au dat jumătate din numărul soluţiilor, ceea ce nu înseamnă însă de loc că... *aurea mediocritas.*

3°. Unii corespondenţi au dat şi alte interpretări enunţului, astfel:

a) D-l CR. M. GRECU a căutat numerele

$$N^2 = abcde \quad , \quad M^2 = ebcda$$

găsind 26 soluţii, ca de exemplu:

$$203^2 = 41209 \quad \text{şi} \quad 302^2 = 91204.$$

Patratele de n cifre, care rămân tot patrate când se schimbă între ele cifrele extreme au fost examinate de curând în *Mathesis* Vol. LIII, 1939, pag. 82 la soluţia problemei 2908, propusă de D-l V. THÉBAULT în acea revistă. Iată un exemplu de astfel de patrate de 13 cifre

$$u^2 = 2169242^2 = 4705641224001,$$
$$v^2 = 1306002^2 = 1705641224004.$$

b) D-nii I. N. ALIMAN, D. M. POPESCU şi N. GH. VOICU au căutat şi grupele de patrate de forma

$$N^2 = abcde \quad , \quad M^2 = bacde.$$

c) D-l M. MARGULIUS a examinat patratele de forma *abcde*, care rămân tot patrate când se mută cifra a oarecum la dreapta. Nu a găsit însă decât o parte din soluţii.

4°. D-nii H. P. IONESCU şi V. C. POPESCU observă că în condiţiile problemei 3565 sunt următoarele patrate de 3 cifre:

100, 144, 196, 625, 400, şi 900.

5°. D-l V. C. POPESCU găseşte, că în aceleaşi condiţii este cubul de 3 cifre

$$8^3 = 512 \quad \text{căci} \quad 125 = 5^3.$$

G-L GH. BUICLIU.

PROBLEMA 4740. *Să se arate că expresia:*

$$E = a(x^5 + y^5) + 5bxy(x^3 + y^3) + 10cx^2y^2(x + y)$$

se poate pune sub forma:

$$A(x + y)^5 + B(x + ky)^5 + C(y + kx)^5$$

A, B, C, k *fiind independente de* x *şi* y. *Să se determine* A, B, C, *k.*

C. IONESCU-BUJOR.

Va trebui să avem:

$$E \equiv (A+B+Ck^5)x^5 + 5(A+Bk+Ck^4)x^4y + 10(A+Bk^2+Ck^3)x^3y^2$$
$$+ 10(A+Bk^3+Ck^2)x^2y^3 + 5(A+Bk^4+Ck)xy^4 + (A+Bk^5+C).$$

Identificând, găsim ecuaţiile:

$$\begin{cases} A + B + Ck^5 = A + Bk^5 + C = a \\ A + Bk + Ck^4 = A + Bk^4 + Ck = b \\ A + Bk^2 + Ck^3 = A + Bk^3 + Ck^2 = c \end{cases} \quad (1)$$

de unde:

$$\begin{cases} (B - C)(1 - k^5) = 0 \\ k(B - C)(1 - k^3) = 0 \\ k^2(B - C)(1 - k) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

satisfăcute dacă $B = C$ sau $k = 1$.

I. *Să presupunem* $a \neq b \neq c$.

Nu putem lua $k = 1$ pentrucă ar urma $a = b = c$, nici $B = C = 0$, pentrucă deasemenea $a = b = c$.

Dacă $B = C \neq 0$, din (1) deducem:

$$\begin{cases} B(k - 1)(1 - k^4) = b - a \\ B(k - 1)(k - k^3) = c - b. \end{cases} \quad (3)$$

Presupunând $k \neq -1$, (3) devine:

$$\frac{1 - k^4}{k(1 - k^2)} = \frac{b - a}{c - b}$$

sau:

$$(c - b)k^2 - (b - a)k + c - b = 0,$$

deci:

$$\begin{cases} k = \dfrac{b-a \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4(c-b)^2}}{2(c-b)}, \quad B = \dfrac{b-a}{(k-1)(1-k^4)} \\ A = a - B - Bk^5. \end{cases} \tag{4}$$

Când $k = -1$,

$$E \equiv A(x+y)^5 \quad , \quad A = a = b = c,$$

nepotrivit cu ipoteza făcută.

II. *Să presupunem* $a = b = c$.

Sistemul (2) este satisfăcut de:

a) $k = 1$, când $A + B + C = a = b = c$.

b) $k \neq 1$, $B = C = 0$, $A = a = b = c$.

c) $k \neq 1$, $B = C \neq 0$, (2) conduce la (3) şi urmează $k = -1$.

III. *Să presupunem* $a = b \neq c$.

Dacă sistemul (2) este verificat de $k = 1$, (1) dă $a = b = c$, contrar ipotezei.

Dacă sistemul (2) este verificat de $B = C = 0$, regăsim (II, *b*), deci din nou $a = b = c$.

In fine, dacă $B = C \neq 0$, din (1) deducem (3), deci $k = \pm i$; deasemenea din (1)

$$A + B + Ck^5 = a \quad , \quad A + Bk^2 + Ck^3 = c$$

sau:

$$A + B \pm Bi = a \quad , \quad A - B \mp Bi = c,$$

deci:

$$A = \frac{a+c}{2} \quad , \quad B = \frac{a-c}{2(1 \pm i)}.$$

IV. *Când* $a = c \neq b$. Un mers analog ne dă

$$B = C \neq 0 \quad , \quad k = \pm i \quad , \quad A = \frac{a+b}{2} \quad , \quad B = \frac{a-b}{2(1 \pm i)}.$$

V. *Când* $b = c \neq a$.

Deasemenea se vede că (2) poate fi verificat numai de $B = C \neq 0$, deci se poate scrie (3), de unde $k = 0$,

$$A + B = a \quad , \quad A = b.$$

Concluzie: Oricum ar fi a, b, c, *expresia* E *se poate pune sub forma cerută.*

Problema este o aplicaţie a teoremei lui SYLVESTER:

„*O formă binară de grad impar* $2n-1$ *poate să se reducă la o sumă de* n *puteri de grad* $2n-1$". (SALMON. Leçons d'Algèbre supérieure, p. 220).

In soluţiile primite dela D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU, D. RIPIANU şi M. AL. VASILESCU-STABU se rezolvă sistemul (1).

C. I. B.

PROBLEMA 4957. *Fie* ABC, A'B'C' *două triunghiuri ale căror cercuri circumscrise sunt tangente în* A, Δ *şi* Δ' *două perpendiculare pe* BC, B'C' *întâlnind* AB, AB' *în* P, P' *şi* AC, AC' *în* Q, Q'. *Cercurile* APQ, AP'Q' *sunt tangente între ele şi ortogonale cercurilor* ABC, AB'C'.

C. IONESCU-BUJOR.

Fie AH şi AD înălţimea triunghiului ABC şi diametrul cercului circumscris, drepte izogonale în unghiul BAC. Deci:

$$\sphericalangle PQC = \sphericalangle HAC = \sphericalangle PAD.$$

Rezultă că dreapta AD este tangentă cercului PQA. Dar când tangenta, dusă unui cerc printr'unul din punctele comune cu un cerc secant, trece prin centrul acestui cerc — cele două cercuri sunt ortogonale. Deci cercurile APQ, ABC sunt ortogonale.

La fel se arată că AD este tangentă şi cercului AP'Q' — de unde rezultă tangenţa cercurilor APQ, AP'Q' şi ortogonalitatea cercurilor AP'Q', AB'C'.

Alte soluţii au dat D-nii: H. M. BODNĂRESCU (Lic. „Titu Maiorescu", Bucureşti), N. D. ŞTEFĂNESCU (bacalaureat, Bucureşti), SLT. M. GRUMĂZESCU şi A. O. ŞAICHIN (bacalaureat, Bucureşti).

Observare. Problema se poate enunţa astfel:

Fie ω *un cerc de rază variabilă tangent unei drepte* Δ *în punctul* A *şi* M, N *două puncte pe cerc. O dreaptă perpendiculară pe* MN *taie* AM, AN *în* P, Q. *Locul geometric al centrelor cercurilor* APQ *este dreapta* Δ, *cercurile* APQ *fiind tangente între ele.*

C. I. B.

PROBLEMA 4972. *Se dau în plan patrupunctele* P_1 *şi* P_2 *şi o conică* (C). *Să se arate că există nouă perechi de puncte* A, B *pe conica* (C) *astfel că exagoanele* ABP_1 *şi* ABP_2 *sunt înscrise în câte o conică.*

AD. GHEORGHIU.

Soluţie. Secantele comune ale conicelor fascicolului linear punctual, având ca bază patrupunctul P_1, cu conica (C), înfăşoară o curbă (Γ_1) de clasa treia, *cayleyana* reţelei definită de conica (C) şi două oarecari din conicele fascicolului menţionat.

Analog se defineşte curba (Γ_2), *cayleyana* reţelei formată din conica (C) şi două oarecari din conicele fascicolului, având ca bază patrupunctul P_2.

Tangentele comune ale curbelor (Γ_1) şi (Γ_2) dau ca intersecţii pe conica (C) grupe de puncte A, B. Dar (Γ_1) şi (Γ_2) sunt curbe de clasa treia, deci au *nouă* tangente comune, care corespund la tot atâtea perechi de puncte A, B. Bine înţeles soluţiile pot fi reale, imaginare, distincte sau confundate.

Observări. 1°. S'a presupus că fascicolele definite de P_1 şi P_2 nu conţin conica (C).

2°. Prin dualitate obţinem propoziţia:

Fiind date două patrulatere π_1, π_2 şi o conică (C), există nouă grupe de tangente t, t' la (C), astfel ca exagoanele $\pi_1 tt'$, $\pi_2 tt'$ să fie circumscrise la câte o conică.

IOAN ILIE ŢIŢEICA
Student.

PROBLEMA 5014. *O grindă de lemn cu secţiunea drept unghiulară, aşezată orizontal, poate suporta o sarcină proporţională cu lăţimea, proporţională cu patratul înălţimei şi invers proporţională cu lungimea, dacă sarcina se prinde la mijloc sau se răspândeşte uniform pe lungul grinzii. O grindă cu dimensiunile duble, făcută din acelaşi material, are un volum de 8 ori mai mare. Poate suporta ea o încărcare de 8 ori mai mare? Se va neglija greutatea proprie a grinzii.* (Enunţ rectificat).

I. IONESCU.

Dacă P şi P′ sunt încărcările în cele două cazuri, k şi k' două constante, avem:

$$P = kbh^2/l \quad , \quad P' = k'bh^2/l,$$

în care b este lăţimea grinzii şi h înălţimea ei, l lungimea pe care ea este rezemată la capete. Dublând pe b, h şi l, formulele ne arată că P şi P′ devin de 4 ori mai mari, iar nu de 8 ori.

Au rezolvat problema nerectificată (P şi P′ proporţionali cu h, nu cu h^2, în care P şi P′ se dublează numai) D-nii: M. S. CHERŢMAN, E. S. CHRISTEA, M. DIACONESCU, S. D. POPESCU, H. REISCHER, G. WEISSBERGER.

D-l T. AMĂRĂŞTEANU a dat soluţia exactă servindu-se de formulele lui NAVIER din Rezistenţa Materialelor.

PROBLEMA 5029. *Se cer trei numere având codivizorul maxim 12 şi comultiplul minim 6048.*

I. IONESCU.

Fie $A \leqslant B \leqslant C$ cele trei numere căutate, D codivizorul lor maxim, M comultiplul lor minim. Să punem:

$$A = Da \quad , \quad B = Db \quad , \quad C = Dc.$$

Numerele a, b, c sunt prime în totalitatea lor; altfel codivizorul lor d nu ar mai fi 1 şi deci D ar fi mai mare. Comultiplul minim m al lui a, b, c este M/D; în cazul problemei noastre

$$m = 6048/12 = 504 = 2^3 \times 3^2 \times 7.$$

Numerele a, b, c se vor lua printre divizorii lui m cu condiţia $a \leqslant b \leqslant c$, căci am presupus $A \leqslant B \leqslant C$.

Suntem dar conduşi a căuta divizorii lui 504. Iată-i:

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28,

36, 42, 56, 63, 72, 84, 126, 168, 252, 504.

Ei sunt în număr de

$$24 = [(3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1)].$$

Vom deosebi acum mai multe căi pentru găsirea soluţiilor a, b, c.

I. Dacă luăm $a = 1$, atunci avem asigurat $d = 1$, oricum am lua pe b şi c printre divizorii lui m, iar pentru a asigura $m = 504$ este destul a lua $c = 504$. Atunci b poate fi oricare dintre divizorii de mai sus. De aci următoarele *24* soluţii:

$a = 1$; $b = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28,$
$36, 42, 56, 63, 72, 84, 126, 168, 252, 504$; $c = 504$.

II. In cele trei numere a, b, c trebue să se găsească cel puţin câte odată factorii $2^3 = 8$, $3^2 = 9$, 7 căci altfel m nu ar mai putea fi 504. Să punem în evidenţă aceşti factori la divizorii lui 504. Avem:

$7=7$, $8=8$, $9=9$, $14=2\times7$, $18=2\times9$,
$21=3\times7$, $24=3\times8$, $28=4\times7$, $36=4\times9$, $42=2\times3\times7$,
$72=8\times9$, $84=3\times4\times7$, $126=2\times7\times9$, $168=3\times7\times8$, $252=4\times7\times9$.

Am putea găsi soluţii luând $a = 1$, care asigură $d = 1$, iar pentru b şi c doi divizori care să conţină în total pe 7 şi pe 8 şi pe 9. Găsim astfel următoarele *29* soluţii:

$a=1$; $b=7$, $c=72$; $b=8$, $c=63, 126, 252$; $b=9$, $c=56, 168$
$b=14$, $c=72$, $b=18$, $c=56, 168$; $b=21$, $c=72$; $b=24$, $c=63, 126,$
252; $b=28$, $c=72$; $b=36$, $c=56, 168$, $b=42$, $c=72$; $b=56$,
$c=63, 72, 126, 252$; $b=63$, $c=72, 168$; $b=72$, $c=84, 126, 168,$
252; $b=126$, $c=168$; $b=168$, $c=252$.

III. Am putea asigura $m = 504$ luând $c = 504 = 7\times8\times9$, iar pentru b şi c doi divizori coprimi ai lui pentru a asigura $d = 1$. Găsim astfel următoarele *29* soluţii:

$a = 2$, $b = 3, 7, 9, 21, 63$; $a = 3$, $b = 4, 7, 8, 14, 28, 56$; $a = 4$,
$b = 7, 9, 21, 63$; $a = 6$, $b = 7$; $a = 7$, $b = 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72$;
$a = 8$, $b = 9, 21, 63$; $a = 9$, $b = 14, 28, 56$; $c = 504$.

IV. Găsim o nouă serie de soluţii luând pentru c un divizor care să conţină doi din divizorii 7, 8, 9 şi pentru b un divizor care să conţină pe celălalt, urmând ca pentru a să alegem un divizor care să nu aibă factori comuni lui b şi c. E mai uşor a începe alegerea cu c şi b şi apoi pe a. Găsim astfel soluţiile:

$c=56$: $b=9$, $a=2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 56$; $b=18$, $a=3, 7, 21$; $b=36$, $a=3, 7, 21$; $c=63$, $b=8$, $a=2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 56, 63$; $b=24$, $a=2, 4, 7, 14, 28, 56$; $b=56$, $a=2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$; $c=72$, $b=7$, $a=2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 56, 63, 72$; $b=14$, $a=3, 9, 21, 63$; $b=21$, $a=2, 4, 8, 28, 56$; $b=28$, $a=3, 7, 9, 63$; $b=56$, $a=3, 9, 63$; $b=63$, $2, 4, 8$; $c=84$, $b=8$, $a=9$; $b=56$, $a=9$; $b=63$, $a=8$; $b=72$, $a=7$; $c=126$: $b=8$, $a=3, 7, 9, 21, 63$; $b=24$, $a=7$; $b=56$, $a=3, 9$; $b=72$, $a=7$; $c=168$: $b=9$, $a=2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$; $b=18$, $a=7$; $b=36$, $a=7$; $b=63$, $a=2, 4, 8$; $b=72$, $a=7$; $c=252$: $b=8$, $a=3, 7, 9, 21, 63$; $b=24$, $a=7$; $b=56$, $a=3, 9$; $b=72$, $a=7$.

Aceste soluţii trebuesc aranjate aşa ca să avem $b \geqslant a$.
Ele sunt în număr de 124.

V. O altă serie de soluţii se obţine alegând pentru a, b, c divizori aşa ca fiecare să aibă numai câte unul din factorii 7, 8, 9. Găsim astfel următoarele *14* soluţii:

$a=7$, $b=8$, $c=9, 18, 36$; $b=91$, $c=24$; $b=18$, $c=24$; $b=24$, $c=36$; $a=8$: $b=9$, $c=14, 21, 28, 42$; $b=18$, $c=21$; $b=21$, $c=36$: $a=9$, $b=14$, $c=24$; $b=24$, $c=28$.

Dacă înmulţim numerele a, b, c găsite cu $D=12$ găsim soluţiile problemei propuse pe care le-am trecut în ordine în tabloul alăturat. Problema admite în total 220 soluţii.

I. I.

A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
12	12	6048	12	864	6048	48	108	2016	84	432	864	108	108	672
	24			1008				6048			2016		144	
	36			1512	2016		252	864			6048		168	288
	48				6048			6048		504	864			672
	72			2016	3024		288	756		672				864
12	84	864	12	2016	6048	48	672	756	84	756	864	108	168	2016
		6048		3024			756	864		864				6048
	96	756		6048				2016			1008		216	672
		1512	24	36				6048			1512		252	
		3024		84	864	72	84	864			2016		288	336
12	96	6048	24	84	6048	72	84	6048	84	864	3024	108	288	672
	108	672		96	756		96	756			6048		336	
		2016		108	672		108	672	96	96	756			864
		6048			2016		672	756		108	168			2016
	244				6048	84	84	864			252			6048
12	168	864	24	252	864	84	96	108	96	108	336	108	432	672
		6048			6048			216			504		504	
	216	672		288	756			432			672		672	
		2016		672				756			756			756
		6048		756	864			864			1008			864
12	252	864	24	756	2016	84	96	1512	96	108	1512	108	672	1008
		6048			6048			3024			2016			1512
	288	756	36	48				6048			3024			2016
		1512		84	864		108	288			6048			3024
		3024			6048			672		144	756			6048
12	288	6048	36	96	756	84	108	864	96	168	756	144	672	756
	336	864			1512			2016		216		168	252	864
		6048			3024			6048		252	432		288	756
	432	672			6048		144	864			756		756	864
	432	2016		108	672			6048			864	216	252	672
12	432	6048	36	168	864	84	168	864	96	252	1512	216	672	756
	504	864			6048		216	288			3024	252	336	864
		6048		216	672			672			6048		432	672
	672	756		336	864			864		288	756		672	864
		844			6048			2016		336		288	336	756
12	672	1512	36	432	672	84	216	6048	96	432	756	288	672	756
		3024		672	756		252	864		504			756	
		6048			864		288	432		672		336		864
	756	864			1512			756		756		432	672	756
		2016			3024			864			864	672	756	864
12	756	6048	36	672	6048	84	288	1512	96	756	1008			
	864	1008	48	84	864			3024			1512			
		1512			6048			6048			2016			
		2016		96	756		336	864			3024			
		3024		108	672		432	672			6048			

Rândurile albe se vor înlocui cu numerele scrise deasupra lor.

Au rezolvat bine problema, ca procedare de deslegare, D-nii: M. S. CHERŢMAN (Clasa VII-a, Liceul Giurgiu), AL. M. VASILESCU-STABU (Clasa VII-a, Liceul Lazăr, Bucureşti), I. D. DIACONESCU (Clasa VIII-a, Liceul Turnu Severin), FRED. E. ROSENRAUCH.

Cel mai mare număr de soluţii l'a dat D-l M. S. CHERŢMAN, însă nu a dat atenţiune suficientă căci nu a găsit toate soluţiile şi în schimb a dat altele la care nu e $D = 12$ şi $M = 6048$. D-l ROSENRAUCH a dat numai soluţiile cu $C = M$. D-l AL. M. VASILESCU-STABU a indicat numai 4 soluţii. Soluţia dată de D-l GAVRIL G. WEISSBERGER din Clasa VI-a Liceul „Moise Nicoară" din Arad, este următoarea:

$6048 \geqslant 12 = 504$, $504 = 7.8.9$. Numere sunt 82, 96, 108.

Această singură soluţie a fost dată şi de D-l IONEL I. STAMATE (Student, Cluj). D-l GAVRIL G. WEISSBERGER a dat ca soluţie unică numerele 36, 95, 84 care au $M = 2016$, iar nu 6048 !

Mai multă atenţie! Mai multă muncă! Mai multă răbdare!

PROBLEMA 5078. *Pe baza* BC *a unui triunghiu isoscel* ABC *se ia un punct* M. *Să se arate că cercurile* ABM *şi* AMC, *sunt egale.*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţia I-a dată de D-ra LYDIA M. TUDORAN şi D-nii: NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU (Bucureşti), CONST. I. CRISTEA (cl. V lic. mil. Chişinău), M. AL. VASILESCU-STABU şi SERGIU LEIBOVICI.

Fie O_1 şi O_2 centrele celor două cercuri. Deoarece

$$\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$$

rezultă că *măs. arc.* AM (pe cercul O_1) = *măs. arc.* AM (pe cercul O_2) şi deci

$$\sphericalangle AO_1M = \sphericalangle AO_2M.$$

Triunghiurile isocele AO_1M şi AO_2M au baza AM comună şi unghiurile opuse bazei egale, ele sunt deci egale aşa încât

$$\overline{O_1A} = \overline{O_2A} = R. \qquad \text{q. e. d.}$$

Soluţia II-a dată de D-l D. D. MIHĂILESCU (lic. mil. Tg.-Mureş).

Se ştie că locul geometric al punctelor de unde un segment de dreaptă $\overline{PQ}$ este văzut sub un unghiu dat α se compune din două arce de cerc ce trec prin P şi Q şi sunt simetrice în raport

cu PQ. *In afară de punctele acestor arce, nici un alt punct al planului nu se mai bucură de această proprietate.*

a) Să presupunem punctul M aşezat între B şi C. Segmentul $\overline{AM}$ este văzut din B şi C sub acelaşi unghiu şi cum aceste punte sunt aşezate de o parte şi alta a lui AM rezultă că cercurile ABM şi AMC sunt simetrice faţă de AM şi deci egale.

b) Presupunând pe M în afara segmentului $\overline{BC}$ (de ex. către C). Segmentul AM se vede din B sub unghiul α, iar din C sub unghiul $(180^0 - \alpha)$. Rezultă că AM se va vedea din punctele cercului ACM, *diferite de arcul* ACM, sub unghiul α, adică aceste puncte sunt simetricele punctelor arcului ABM. Cercurile ABM şi AMC sunt deci simetrice şi egale.

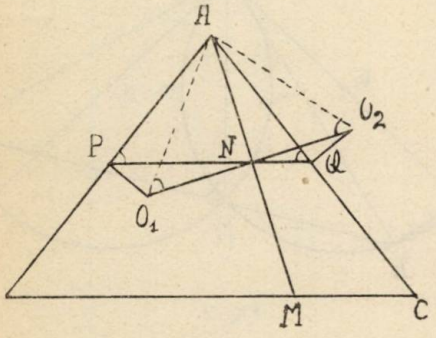


Fig. 1.

Soluţia III-a dată de D-nii : HORIA M. BODNĂRESCU (cl. VIII lic. T. Maiorescu), DAN BĂDULESCU şi VASILE S. NICOLAESCU.

Să notăm cu P, Q şi N respectiv mijloacele segmentelor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ şi $\overline{AM}$. Mediatoarea lui AM este întâlnită de mediatoarele aturilor AB şi AC respectiv în O_1 şi O_2, centrele cercurilor ABM şi AMC.

Deoarece

$$\sphericalangle APO_1 = \sphericalangle ANO_1 = 90^0$$

patrulaterul APO_1N este inscriptibil şi atunci:

$$\sphericalangle AO_1N = \sphericalangle APN = \sphericalangle B$$

dreapta PN fiind paralelă cu BC.

Deasemeni

$$\sphericalangle ANO_2 = \sphericalangle AQO_2 = 90^0$$

şi patrulaterul $ANQO_2$ este inscriptibil, deci :

$$\sphericalangle AO_2N = \sphericalangle AQN = \sphericalangle C$$

QN fiind paralelă la BC.

Cum $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ rezultă că $\sphericalangle AO_1N = \sphericalangle AO_2N$, adică triunghiul AO_1O_2 este isocel şi $\overline{AO_1} = \overline{AO_2} = R$. q. e. d.

Soluţia IV-a dată de D-nii : MIRCEA I. GHEORGHE şi CONST. V. DIACONESCU (elevi lic. mil. Cernăuţi).

Ducând diametrele AD şi AE în cercurile AMB şi AMC se formează triunghiurile dreptunghice ADB şi AEC.

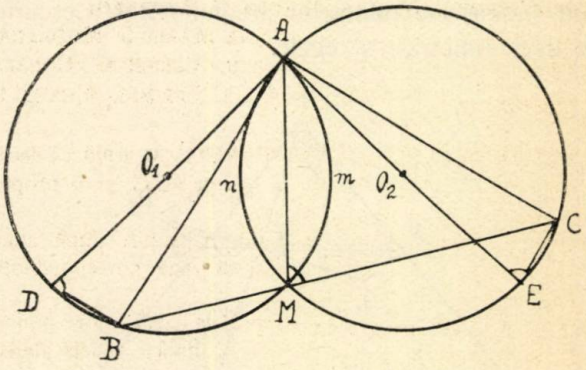


Fig. 2.

Se observă pe figură că:

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle AMC = \frac{măs.\ \overset{\frown}{AMB}}{2} \text{ şi } \sphericalangle AMC = \sphericalangle AEC = \frac{măs.\ \overset{\frown}{AC}}{2}$$

$$\therefore \quad \sphericalangle ADB = \sphericalangle AEC.$$

Cum $\overline{AB} = \overline{AC}$ prin ipoteză triunghiurile dreptunghice sunt egale, deci $\overline{AD} = \overline{AE}$. q. e. d.

Soluţia V-a dată de D-l N. D. ŞTEFĂNESCU (Bucureşti).

Se ştie că într'un triunghiu există relaţia :

$$bc = 2Rha.$$

Triunghiurile ABM şi AMC au o înălţime comună ce porneşte din A, pe care să o notăm cu *h*. Din relaţia de mai sus deducem pentru cele două cercuri :

$$R_1 = \frac{\overline{AB} \times \overline{AM}}{2h} \quad ; \quad R_2 = \frac{\overline{AC} \times \overline{AM}}{2h} \therefore \quad R_1 = R_2 = R.$$

Soluție trigonometrică dată de D-nii: ADOLF O. ȘAICHIN (elev inginer, București), AL. I. ROHR, CONST. PANTELIMON (cl. VII lic mil. Iași), MIRCEA D. POPA, CONST. I. PASCARU, IOAN V. JAREGHIE și MIRCEA V. POPISCA.

Notând cu R_1 și R_2 razele celor două cercuri avem:

$$2R_1 = \frac{\overline{AM}}{\sin B} \; ; \; 2R_2 = \frac{\overline{AM}}{\sin C} \text{ însă } \hat{B} = \hat{C} \text{ deci } R_1 = R_2 .$$

Au mai dat soluții geometrice D-nii: MIRCEA STĂNCULESCU, (cl. VIII lic. Sp. Haret) VLAD A. CANARI, ILIE POP (lic. mil. Tg.-Mureș), HERMAN REISCHER (cl. VIII lic. Internat Iași) și BARBU I. FRIEDMAN.

Soluțiuni analitice au dat D-nii: TRAIAN I. CHIȚULESCU (Fac. de Arhitectură), D-TRU D. ENESCU, CONST. PÂNTESCU (cl. VIII lic. mil. Chișinău), D-TRU RIPIANU, CERCHEZ MIHU și MIRCEA C. BEDREAG.

Au mai rezolvat problema D-ra ANA MARIA S. MODÂLCĂ și D-nii: SLT. M. GRUMĂZESCU, DUMITRU C. VASILIU, VASILE C. CONSTANTINESCU, EMIL S. MODÂLCĂ, ISAC I. SOLOMON, C. D. EFTIMIE, MOZES CHERȚMAN, GH. D. CÂRDEIU.

Observațiuni. 1°. D-l HORIA M. BODNĂRESCU arată că dacă triunghiul ABC ar fi oarecare, razele cercurilor AMB și AMC ar fi proporționale cu laturile AB și AC.

2°. Problema aceasta extrem de simplă a primit, după cum se vede, multe soluțiuni. Le-am publicat pentru ca să vadă corespondenții noștri pe câte fețe se poate privi o problemă.

Am primit și câteva soluțiuni — unele dela harnici corespondenți — având un raționament fals pe care țiu să-l semnalez, fiindcă se face deseori confuzia pe care o voi arăta mai jos. Iată una din soluțiuni:

$$\sphericalangle ABC = \frac{\overset{\frown}{AmM}}{2} \qquad \sphericalangle ACB = \frac{\overset{\frown}{AnM}}{2}$$

dar

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB \quad \text{deci} \quad \overset{\frown}{AmM} = \overset{\frown}{AnM}.$$

Coarda $\overline{AM}$ este comună celor două cercuri. Deci coarda AM întinzând *arce egale* în cercuri diferite rezultă că cele două cercuri din care fac parte arcele, sunt egale ».

Se confundă în această soluție *măsura unui arc de cerc* cu *lungimea arcului.*

Teorema la care se referă autorul soluției privește *lungimea arcului,* iar

$$\sphericalangle ABC = \frac{\text{măs. } \overset{\frown}{ADM}}{2} .$$

Lungimea arcului se exprimă în unități de lungime (cm, dm, etc.), iar *măsura arcului* se face cu arcul de un grad al *cercului respectiv* și se exprimă în grade.

G. D. S.

PROBLEMA 5082. *Scriind unul după altul doi* $\mathcal{M}3$, *când numărul format este* $\mathcal{M}9$?

I. IONESCU.

Fie $a = \mathcal{M}3$, $b = \mathcal{M}3$. Suma cifrelor lui a ca şi a lui b vor fi $\mathcal{M}3$. Faţă de divizorul 9 nu putem lua decât $a = \mathcal{M}9$, $a = \mathcal{M}9 \pm 3$ şi $b = \mathcal{M}9$, $b = \mathcal{M}9 \pm 3$. Numerele formate ab sau ba din scrierea alături a lui a şi b au ca sumă a cifrelor un $\mathcal{M}3$, căci şi a şi b sunt $\mathcal{M}3$. Ca acele numere să fie $\mathcal{M}9$ trebue să avem unul din cazurile:

$$\begin{cases} a = \mathcal{M}9 \ , & a = \mathcal{M}9 + 3 \ , & a = \mathcal{M}9 - 3, \\ b = \mathcal{M}9 \ , & b = \mathcal{M}9 - 3 \ , & b = \mathcal{M}9 + 3. \end{cases}$$

I. I.

Au dat soluţii parţiale D-nii: IONEL I. STAMATE, N. VASILESCU-STABU, P. P. DRĂGHICESCU.

PROBLEMA 5083. *Fie dat triunghiul* APQ, Δ *şi* Δ' *perpendicularele ridicate în* P, Q *pe dreptele* AP, AQ *şi* L *un punct variabil pe dreapta* PQ. *Perpendiculara ridicată în* L *pe* AL *taie* Δ *şi* Δ' *în* M *şi* N.

Să se arate că proiecţia segmentului $\overline{MN}$ *pe dreapta* PQ *este constantă.*

C. IONESCU-BUJOR.

Soluţie dată de D-nii: M. AL. VASILESCU-STABU (Liceul G. Lazăr, Bucureşti) şi PAUL P. DRĂGHICESCU (Liceul militar, Iaşi). Notăm S punctul de întâlnire al dreptelor Δ, Δ'. Patrulaterul APSQ este inscriptibil, deci

$$\sphericalangle P\ Q + \sphericalangle PSQ = 180^0.$$

Deasemenea sunt inscriptibile patrulaterele

APNL şi ALQM,

de unde rezultă:

$$\sphericalangle PAN = \sphericalangle PLN = \sphericalangle MLQ = \sphericalangle MAQ.$$

Rezultă:

$$\sphericalangle PAQ = \sphericalangle NAM,$$

deci:

$$\sphericalangle NAM + \sphericalangle NSM = 180^0,$$

adică patrulaterul ANSM este inscriptibil.

Şi astfel, A este un punct al cercului NSM, iar P, L, Q proiecţiile lui A pe laturile triunghiului NSM, formează dreapta lui SIMSON-WALLACE.

S'a dovedit că [1]: *„Proiecţia unei laturi a triunghiului fundamental pe dreapta lui* SIMSON-WALLACE *a unui punct al cercului circumscris este egală cu segmentul acestei drepte cuprins între celelalte două laturi ale triunghiului"*.

Rezultă că:

$$pr_{PLQ}\,\overline{MN} = \overline{PQ} = \text{constant}$$

când L se deplasează pe dreapta PQ.

Alte soluţii date de D-nii: H. M. BODNĂRESCU (Liceul Titu Maiorescu, Bucureşti) — D. I. MIRONESCU, G. V. ZAHARIA, AL. D. IONESCU, D. D. MIHĂILESCU (Liceul militar, Tg.-Mureş) — G. D. CÂRDEIU, MIRCEA D. POPA, CONST. PANTELIMON şi A. I. ROHR (Liceul militar, Iaşi).

Soluţii analitice dela D-nii: C. D. EFTIMIE (Liceul G. Lazăr, Bucureşti), I. SOLOMON (Liceul Internat, Iaşi), D. RIPIANU, M. CERCHEZ, M. C. BEDREAG — CONST. PÂNTESCU şi D. D. ENESCU (Liceul militar, Chişinău).

C. I. B.

PROBLEMA 5088. *Tangenta în* M(x, y) *la o curbă* C *intersectează axa* OX *în* T *şi* OY *în* T'. *Paralelele cu* OY *şi* OX *respectiv din* T *şi* T' *întâlnesc normala curbei* (C) *în* N *şi* N'. *Se cere curba* (C), *ştiind că aria triunghiului* T'NN' *este necontenit zero.*

I. V. MĂTIEŞ.

---

1) C. IONESCU-BUJOR: Asupra dreptei lui SIMSON-WALLACE, *Gazeta Matematică*. Vol. XLIV, pag. 238.

Soluţie dată de D-nii: E. VIŞA (Prof. secundar), M. D. POPA (Lic. militar, Iaşi), M. A. NEGREA (Brăila), C. SĂNDULESCU (Profesor), M. CERCHEZ, C. I. C. DIMITRIU (Elev inginer, Bucureşti), S-LT. GR. MARTEŞ şi D. RIPIANU.

Tangenta şi normala în $M(x, y)$ sunt

$$Y - y = y'(X - x) \quad \text{şi} \quad Y - y = \frac{1}{y'}(X - x)$$

de unde rezultă imediat

$$T\left[x - \frac{y}{y'}, 0\right] \quad , \quad T'\left[0, y - xy'\right]$$

$$N\left[x - \frac{y}{y'}, y + \frac{y}{y'^2}\right] \quad , \quad N'\left[x + xy'^2, y - xy'\right].$$

Egalând cu zero expresia suprafeţei triunghiului T'NN' avem:

$$\frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 0 & y - xy' & 1 \\ x - \frac{y}{y'} & y + \frac{y}{y'^2} & 1 \\ x + xy'^2 & y - xy' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{x(1 + y'^2)(xy'^3 + y)}{y'^2} = 0. \qquad (1)$$

Soluţiile problemei sunt deci:

1) Dreapta $x = 0.$

2) Dreptele imaginare

$$1 + y'^2 = 0 \quad \therefore \quad y = \pm ix + c^t.$$

3) Curbele

$$xy'^3 + y = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} + \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

$$\therefore \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

adică astroidele.

D-l D. D. ENESCU (cl. VIII-a Lic. militar, Chişinău rezolvă foarte bine problema până la determinarea ecuaţiei (1) apoi găseşte dreptele 1) şi 2), stabileşte ecuaţia dela 3) şi scrie cavalereşte: „aceasta este o ecuaţie diferenţială pe care nu am învăţat-o".

Suntem siguri că dacă trimetea soluţia cu o lună mai târziu ar fi putut integra şi ecuaţia dela 3).

EXERCIȚII

28. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater circumscris unui cerc și C_1, C_2, C_3, C_4 cercuri cu centrele în A_1, A_2, A_3, A_4. C_2 fiind tangent exterior cercurilor C_1, C_3, iar C_4 tangent exterior cu C_3, să se arate despre cercurile C_1, C_4 că sunt tangente exterioare.

C. IONESCU-BUJOR.

R. Notând r_1, r_2, r_3, r_4 razele cercurilor, avem:

$$r_1 + r_2 = \overline{A_1A_2} \quad , \quad r_2 + r_3 = \overline{A_2A_3} \quad , \quad r_3 + r_4 = \overline{A_3A_4}.$$

De unde,

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4}.$$

Dar $A_1A_2A_3A_4$ fiind circumscris unui cerc, rezultă

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_1}.$$

Deci:

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_1}.$$

Și cum:

$$r_2 + r_3 = \overline{A_2A_3},$$

rezultă:

$$r_1 + r_4 = \overline{A_4A_1},$$

ceea ce arată tangența exterioară a cercurilor C_1, C_4.

29. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$a^2x^2y^2 + b(ax + ay + b)xy + c^2 = c[x(ax + b) - y(ay + b)]$$
$$a(x^2 + y^2) + b(x + y) = -c.$$

PAUL P. DRĂGHICESCU.

R. Prima ecuație se mai scrie:

$$ay^2(ax^2+bx+c) + by(ax^2+bx+c) - c(ax^2+bx+c) + 2c^2 = 0.$$

Sau:

$$(ax^2 + bx + c)(ay^2 + by - c) = -2c^2. \qquad (1)$$

Ecuația a doua,

$$(ax^2 + bx + c) + (ay^2 + by - c) = -c. \qquad (2)$$

Se consideră

$$ax^2 + bx + c \quad , \quad ay^2 + by - c$$

rădăcini ale ecuației

$$z^2 + cz - 2c^2 = 0 \quad ; \quad z' = -2c \quad , \quad z'' = c.$$

Deci:

$$ax^2 + bx + c = -2c \quad \text{și} \quad ay^2 + by - c = c$$

sau:

$$ax^2 + bx + c = c \quad \text{și} \quad ay^2 + by - c = -2c.$$

PROBLEME PROPUSE

5148. Din un punct în spaţiu se duc n drepte numai de o parte a punctului. Să se arate că nu se poate ca toate unghiurile formate de câte două drepte să fie peste 120^0.

I. IONESCU.

5149. Să se determine $(n+1)$ numere întregi, a căror sumă este a, astfel ca primele n să fie *cele mai mici posibile*, dar mai mari decât cel din urmă, care să fie cel mai mare posibil.

N. V. K.

5150. Să se afle cea mai mică valoare pozitivă a lui k, astfel ca numărul:

$$N = 2^{11n+12} + k3^{2n+3}$$

să fie $\not\equiv 11$, oricare ar fi n întreg pozitiv.

STELIAN CETĂŢEANU.

5151. Să se găsească patratul perfect de *nouă* cifre *abcdefghk* ştiind că:

$$abc + ghk = def + 1.$$

V. THÉBAULT.

5152. Să se arate că produsul primelor *100* numere întregi se împarte exact cu produsul primelor *11* numere întregi ridicat la puterea a *noua*.

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

5153. Să se demonstreze că raportul distanţelor centrului cercului înscris şi a centrului unui cerc exînscris unui triunghiu la o mediană a triunghiului este egal cu raportul razelor acelor două cercuri.

G-L GH. BUICLIU.

5154. Se consideră un triunghiu ABC înscris în cercul O. Se descrie cercurile cu centrele în B şi C şi cu razele cât laturile opuse care se intersectează în A', A" — A' fiind pe cercul O. Fie M un punct oarecare pe cercul O; MB, MC taie cercurile (B), (C) în B', B" şi C', C". Dacă notaţiile sunt convenabil făcute, dreptele B'C', B"C" se întâlnesc în A".

N. N. MIHĂILEANU.

5155. Ce condiţie, trebue să îndeplinească două triunghiuri ABC şi A'B'C', pentru ca patrulaterele ABA'B', BCB'C', CAC'A' să fie inscriptibile?

2°. Fiind dat un triunghiu ABC, să se arate cum poate fi construit un triunghiu A'B'C' îndeplinind condiţiunile de mai sus.

GH. D. SIMIONESCU.

5156. Fiind date în plan: un cerc (O) şi punctele A, B, C, D; să se determine două cercuri trecând respectiv prin A, B şi C, D astfel ca intersecţiile lor să fie două puncte M, N pe cercul O.

ADRIAN GHEORGHIU.

5157. Se consideră cercul O tangent la laturile BC şi AC ale triunghiului ABC, punctul de tangenţă cu BC fiind mijlocul M al lui $\overline{BC}$. Fie N punctul de tangenţă al cercului O cu AC. Dreptele ce unesc punctul N cu două puncte isotomice M_1 şi M_2 de pe BC intersectează a doua oară cercul O în punctele B' şi C'. Să se arate că toate dreptele analoage cu B'C' trec printr'un punct fix.

THEODOR GH. COCEA.

5158. Fie două plane perpendiculare P, Q şi xy linia lor de intersecţie. In planul P se construieşte triunghiul echilateral ABC, astfel că $AB \parallel xy$ şi vârful C nu este aşezat între xy şi AB. In planul Q se construieşte triunghiul echilateral A'B'C', egal cu ABC, şi astfel că $A'B' \parallel xy$, iar vârful C' este situat între xy şi A'B'. Ştiind că vârfurile C, C' se proiectează în acelaşi punct pe dreapta xy şi că fiecare dintre ele se află, faţă de xy, la o distanţă egală cu dublul înălţimii triunghiului echilateral, se cere să se demonstreze că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

GH. DUMITRESCU.

5159. Să se rezolve ecuaţia:

$$f(x) \equiv Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

ştiind că ecuaţia $f(x-1)=0$ este bipătrată, iar $f(x+1)=0$ este reciprocă. Să se arate că, în general, înlocuind pe 1 cu α (număr oarecare), $f(x)$ are întotdeauna două rădăcini duble. Să se determine valorile acestor rădăcini în funcţie de α.

VIRGIL GHIŢESCU.

5160. Să se stabilească relaţiunea:

$$\frac{1}{4Rr} \Sigma a^2 (p-a) = \Sigma \frac{r_a r_b \sin C}{h_c}.$$

MARIN I. POPA.

5161. Să se găsească maximul suprafeţei dreptunghiului format de două perechi de normale la o elipsă, paralele şi perpendiculare între ele.

ION C. VASILIU.

5162. Să se arate că ecuaţia diferenţială

$$axy'' + (b+4a)\, y' + (c+2b)\, y = 0$$

se transformă într'una cu coeficienţii constanţi, dacă trinomul $ar^2 + br + c$ este un patrat perfect.

G. G. CONSTANTINESCU.

5163. Să se demonstreze că nu există nici o funcţiune, propriu zisă, care să satisfacă ecuaţia funcţională

$$f(x, y) = f^n(y, x),$$

unde n este un număr raţional.

M. GHERMĂNESCU.

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bogdan Gr. Gh. (5134, 36); *Boiangiu D. D.* (5002, E); *Cerchez M.* (5143); *Cocea Gh. Th.* (P); *Dobrescu A.* (A); *Drăghicescu P. Paul* (5107, 16, 33, 34, 35, 36, 43); *Friedman I. Barbu* (5110, 24, 31); *Georgescu Răducan* (P); *Gligor N. Ioan* (5120); *Mangeron I. D.* (A); *Marteş Gr.* Subloc. (4934, 68, 5088, 112, 42, 43, 45); *Moessner A.* (R); *Niculescu C. Mircea* (5038, 55); *Pantelimon V. Const.* (5042, 116); *Papadopol D. Elena* (5131); *Petrescu Achile* (5145); *Petrescu Iulian* (5026, 85, 134, P); *Popa D. Mircea* (5042, 111, 45); *Popa N. Aurel* (5134, 35, 36); *Postolache I. V.* (N); *Ripianu D.* (5066, 88, 116, 31); *Romanescu C.* (5134); *Şaichin O. A.* (5134, 45); *Vasilescu-Stabu Al. M.* (5114, 20, 22, 24, 34, 35); *Vişa E.* (5087, 88, A, P); *Zaharia L. I. Mircea* (5131).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240.

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — IV de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii

Abonamentul anual (9 numere). Lei 50
Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 56.558.

1938/1939 complet
BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU
C III R 28

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLIV

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1939

SUMARUL

1. † Generalul Scarlat Panaitescu . . *Cpt. C-dor I. Linteș.*
2. Studenți români în matematici la Paris între 1870 și 1877 . . . *Petre Sergescu.*
3. Ediția dela Cluj a elementelor lui I. G. Pardies (urmare și sfârșit). *Victor Marian.*
4. Asupra problemei 4553 . . . . . *G. G. Constantinescu.*
5. Proprietăți în câmpul traectoriilor antiaeriene . . . . . *Maior I. Linteș.*
6. Premiul „Spiru Haret" . . . . . *Comisiunea pentru Premii.*
7. Note Matematice: 48 — 52.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 286.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 4203, 4649, 4831, 4842, 4876, 4963, 4966, 4971, 5007, 5015, 5041.
12. Exerciții 30 — 31.
13. Probleme propuse: 5164 — 5179.
14. Tabla de Materii.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1939

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **D. Stoica,** Inginer; Cpt. Comandor-Inginer **Gr. Zapan; Al. D. Bunescu,** Inginer, Secretarul General al Ministerului Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii, sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate. Problemele propuse până în Septemvrie 1938 şi nerezolvate sunt indicate pe coperta N-rului 1 (15 Septemvrie).

Problemele propuse în anul curent şi nerezolvate sunt următoarele: 5010, 22, 23, 28, 37, 43, 45, 47, 49, 53, 59, 68, 72, 76, 89, 93, 94, 95, 99, 101, 02, 04, 05, 06, 13, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 40, 41, 44, 46, 47, 49, 50, 51, 53, 55, 58, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale,* Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

In Biblioteca «Gazetei Matematice» a apărut:

CULEGERE DE PROBLEME DE ALGEBRĂ

INTOCMITĂ DE

D-l Inginer Profesor A. G. IOACHIMESCU

Licenţiat în Matematici

PARTEA II EDIŢIA IV-a

REVĂZUTĂ ŞI MĂRITĂ

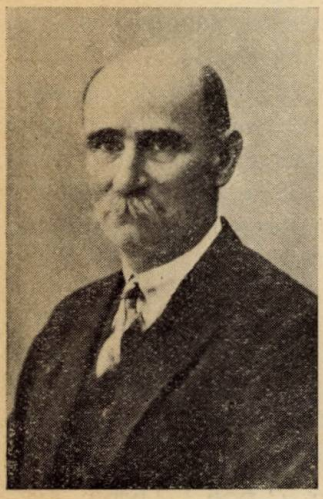
Preţul: 240 lei

DE VÂNZARE LA LIBRĂRII. SE POATE COMANDA ŞI LA «GAZETA MATEMATICĂ», BUCUREŞTI, CALEA GRIVIŢEI Nr. 158

† GENERALUL SCARLAT PANAITESCU [1]

La 22 Martie 1938, după o scurtă şi grea suferinţă, în vârstă de peste 71 ani, a trecut pragul eternităţei Generalul de divizie în retragere SCARLAT PANAITESCU, membru corespondent al Academiei Române, conferenţiar de Cartografie şi Geografie matematică al Facultăţei de Ştiinţe din Iaşi şi membru al Societăţii „*Gazeta Matematică*".

S'a născut la 30 Ianuarie 1867 în Iaşi. A urmat cursurile primare şi liceale la Iaşi, apoi, urmând Şcoala Militară din Bucureşti, şi Şcoala Politechnică din Paris devine ofiţer.



Tot la Paris urmează şi cursurile secţiei de Matematici (Liceul St. Louis), trecându-şi apoi licenţa în matematici la *Sorbona* în 1889.

Revenit în ţară, urcă metodic şi sigur, prin muncă dreaptă, treptele ierarhiei militare, devenind general în 1914.

La 20 Decemvrie 1914, a fost ales membru al Societăţii „*Gazeta Matematică*". Generalul SCARLAT PANAITESCU a activat pe tărâmul matematic cu mult entuziasm. Chiar în primul an de apariţie al „*Gazetei*" Generalul SCARLAT PANAITESCU publică o serie de articole adnotate cu trei stele, pe atunci fiind căpitan.

La banchetul „*Gazetei*" din 1916, ţine o înălţătoare cuvântare, făcând o interesantă legătură între adolescenţa ţărei şi „*Gazeta Matematică*", care, ambele deodată păşesc în domeniul „maturităţei creatoare".

In anii de grea încercare pentru ţara noastră, Generalul SCARLAT PANAITESCU, pe lângă funcţiunile lui, în calitate de ofiţer activ, mai îndeplineşte şi funcţia de membru în delegaţia de conducere a Societăţii „*Gazeta Matematică*", dela 1916 la 1918, alături de D-l Profesor V. TEODOREANU un alt apostol al „*Gazetei*".

1) După „Revista Ştiinţifică" V. ADAMACHI, Vol. XXIV. No. 4. 1938, articolul D-lui Dr. M. BOTEZ şi după câteva indicaţiuni ce mi-au fost date de către D-l Profesor V. TEODOREANU.

Nu trebue să uităm că, în acest interval de timp „*Gazeta*“ deşi era în refugiu la Iaşi, totuşi a continuat să apară, singura făclie a ştiinţelor, care mai rămăsese aprinsă pe acele vremuri. Numai datorită unor *Vestale* de structura Generalului SCARLAT PANAITESCU şi a celorlalţi apostoli, flacăra „*Gazetei*“ a continuat să ardă neîncetat dela apariţie până în zilele noastre. Aşa a trecut prin cea mai crâncenă furtună pe vremea când Generalul SCARLAT PANAITESCU o avea în a lui pază.

In Adunarea generală din August 1917, la Iaşi, Generalul SCARLAT PANAITESCU a propus Societăţii „*Gazeta Matematică*“ să accepte din partea d-sale un premiu viager anual, pentru răsplata lucrărilor de matematici aplicate la nevoile războiului, denumit astăzi „PREMIUL GENERAL SCARLAT PANAITESCU“.

Această donaţie, trecută poate uşor cu vederea de cei mulţi, exprimă cea mai înaltă sinteză a omului de suflet şi de ştiinţă, a patriotului şi a militarului, a idealistului şi a realistului. Intr'o vreme când cea mai năprasnică vijelie distrugea întreaga făptură a omului, Generalul SCARLAT PANAITESCU o înfrunta senin, o sfida aproape, complect încrezător în calităţile românului.

* * *

Şi totuşi, această stâncă de piatră, a avut necazuri în viaţă, necazuri cari i-au grăbit poate trecerea în lumea veşniciei. De aceea, ne vine tare greu să ne stăpânim o biată lacrimă, care ţine cu orice preţ să-i stropească mormântul.

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

STUDENŢI ROMÂNI IN MATEMATICI LA PARIS INTRE 1870 ŞI 1877

In ultimii ani ai imperiului lui NAPOLEON III s'a creat la Paris *Şcoala practică de înalte studii.* Scopul ei a fost să completeze învăţământul teoretic dela Sorbona, Collège de France, etc. prin cercetări practice făcute direct de studenţi. Şcoala, care există şi azi, are mai multe secţii: matematică, fizico-chimică, ştiinţe naturale, ştiinţe istorice şi filologice, ştiinţe religioase. Secţia de ştiinţe

istorice şi filologice publică faimoasa colecţie *Bibliothèque de l'Ecole pratique des Hautes Etudes*, în care au apărut multe teze de diplomă ale şcoalei. Intre altele, teza D-lui N. IORGA despre PHILIPPE DE MÉZIÈRES a apărut aci. Sunt peste 250 de volume.

Secţia de matematică a avut la început două preocupări deosebite:

1°. Publicarea unei reviste de bibliografie matematică.

2°. Organizarea de lucrări practice pentru studenţi.

Incă dela crearea secţiei, în 1868, conducătorii ei au hotărît publicarea unei reviste în care să se analizeze, rezume şi, eventual, traducă în mod parţial toate memoriile de matematici apărute în lumea întreagă. Ideea aceasta nu era nouă. Ea se impunea din cauza imensului material nou matematic pe care l-a produs veacul al XIX-lea. In 1824 baronul de FÉRUSSAC începe publicarea, pe cheltuiala lui, a unui *Bulletin des Sciences Mathématiques*, întreprindere vastă de bibliografie matematică în genul în care avem azi *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* sau *Zentralblatt für Mathematik*. FÉRUSSAC a publicat 16 volume din revista lui, dar sforţarea era prea mare pentru a fi suportată de o singură persoană, aşa că revista dispare în 1831. Secţia matematică a şcoalei practice de înalte studii a reluat tradiţia revistei lui FÉRUSSAC. In 1870 ea publică primul volum din noul *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, cu scopul de a ţine în curent pe cititori cu toată producţia matematică contimporană. Cam în acelaşi timp apare şi *Jahrbuch*. Amândouă revistele apar şi azi, dar *Buletinul* şi-a schimbat menirea. Nu a avut destule fonduri la dispoziţie şi nici destui colaboratori pentru a face bibliografia completă, aşa că acum se prezintă ca o revistă în care apar şi studii originale şi o parte bibliografică privitoare la câteva publicaţii matematice mai de seamă.

In *rapoartele* asupra *şcoalei practice de înalte studii* se pot urmări fazele prin care a trecut redactarea Buletinului. Primii redactori au fost G. DARBOUX, HOUËL, PAINVIN, CH. ANDRÉ, B. BAILLAUD, etc. In 1874, PAINVIN, redactor asiduu, moare. In 1875 DARBOUX şi J. HOUËL sunt ajutaţi de J. TANNERY, C. A. LAISANT, BROCARD, ZEUTHEN, BELTRAMI; se întâlneşte colaborarea lui F. KLEIN, LAMPE, SOPHUS LIE, etc. Azi, Buletinul, este condus de D-l E. PICARD.

Tot din *rapoartele* şcoalei, se pot afla unele informaţii despre unii Români cari au studiat matematicele la Paris între 1870 şi 1877. Aceasta e în legătură cu a doua preocupare a secţiei matematice: organizarea de lucrări practice. Azi, această parte din programul Şcoalii practice de înalte studii a fost suprimată şi înlocuită cu „*Conferinţe*“ de matematici, care se fac la Universitate.

Rapoartele pe 1870 — 1877 arată că preşedintele secţiei de matematici în acest timp a fost M. CHASLES. In 1870 erau doi directori de studii: HERMITE şi SERRET. Repetitorul lui HERMITE a fost MAILLARD. El făcea câte două şedinţe săptămânale de câte o oră şi jumătate cu interogaţii şi probleme din calculul diferenţial şi integral. Raportul arată că nouă studenţi au urmat în mod regulat aceste lucrări. Intre ei se află CYRILLON, ISWORAN, CANTACUZÈNE. Primul e, desigur, viitorul profesor dela Şcoala de poduri şi şosele din Bucureşti KIRILOV, pe care-l regăsim în anuarele următoare. Al doilea e, evident, un Român. N'am putut însă să urmăresc dacă şi-a luat licenţa. Cât despre CANTACUZÈNE, nu pot afirma cu siguranţă dacă era Român [1]). Ar trebui o cercetare mai amănunţită în Arhivele facultăţii de ştiinţe din Paris.

SERRET a avut ca repetitor, în 1870, pe TISSERAND, care făcea aplicaţii asupra părţilor mai delicate ale calculului infinitezimal şi mecanică. Şapte studenţi sunt citaţi ca foarte asidui. In fruntea lor se află CANTACUZÈNE şi ISWORAN.

Incepând cu 1872, comitetul de patronaj al secţiei matematice se compune din M. CHASLES ca Preşedinte, J. BERTRAND, PUISEUX, SERRET membri. Din 1874, PUISEUX e secretar, iar în 1875 comitetul se completează cu CH. HERMITE.

Conferinţa de calcul infinitezimal în 1872 — 73 a fost făcută de A. DE SAINT GERMAIN, iar cea de mecanică de către B. BAILLAUD. Se citează 15 studenţi cu frecvenţa regulată. Intre ei: CANTACUZÈNE şi MIRONESCU. Nu-mi pot da seama dacă acesta din urmă e

---

1) Acesta este probabil GHEORGHE C. CANTACUZINO. fost Director general al Căilor ferate Române şi Ministru de Finanţe în Guvernele prezidate de DIMITRIE STURZA. In Societatea Politecnică a fost admis ca *Licenţiat în Stiinţe*. Se afirmă că acea Licenţă era în Ştiinţele matematice.

I. I.

același cu viitorul Director al Școalei Naționale de Poduri și Șosele, sau nu [1]).

In 1873 — 74, din 15 studenți citați ca asidui, șase și-au luat licența în August sau Noemvrie 1874. Intre acești șase găsim pe CANTACUZÈNE, MIRONESCU, KIRILLOW. De data aceasta, numele lui KIRILOV e ortografiat mai aproape de scrierea românească. E curios că din șase licențiați în matematici în 1874, trei au fost străini și posibil că toți trei — în orice caz doi — erau Români.

Raportul pe 1874 — 5 semnalează șase auditori regulați la conferințele de mecanică (ST. GERMAIN) și opt la calcul (BAILLAUD).

Dar nu se dă numele nici unuia dintre ei.

In schimb, în 1875 — 6 întâlnim pe D-l D. EMMANUEL între cei 7 studenți care au urmat *„foarte regulat“* conferințele de mecanică a lui CHARVES și de calcul infinitezimal ale lui B. BAILLAUD și P. APPELL.

In 1878, SPIRU HARET susținea, cel dintâi Român, teza de doctorat în matematici la Sorbona, urmat de D-l D. EMMANUEL în 1879 și de CONST. GOGU în 1882.

PETRE SERGESCU.

EDIȚIA DELA CLUJ A ELEMENTELOR LUI I. G. PARDIES

(Urmare dela pagina 567)

Ediția dela Cluj a acestor *Elemente* este traducerea fidelă a originalului francez. Nu am putut vedea traducerea lui SCHMIDT, astfel că nu pot afirma dacă cea dela Cluj este identică cu aceea sau este independentă de ea. Ea are formatul 12⁰ și cuprinde 146 pagini, plus o Anexă de 4 pagini.

1) Acesta este Inginerul Inspector General CONSTANTIN M. MIRONESCU, fost Profesor de Geometria de Poziționi și de Statica grafică și în urmă Directorul Școalei Naționale de Poduri și Șosele din București. In *Buletinul* său de înscriere în Societatea Politecnică e scris chiar de mâna lui:

1⁰. Inginer (Diplôme) dela Școala de Poduri și Șosele din Paris.

2⁰. Licențiat în matematici dela facultatea din Paris.

3⁰. Licențiat în drept dela facultatea din Paris.

I. I.

Cărticica are la început o dedicație a laureaților în filozofie din anul 1749 adresată colegului lor LUCA LAZĂR șeful promoției din acel an al Universității din Cluj. După ea urmează îndrumările autorului despre felul cum să se citească *Elementele.*

Cele nouă Cărți ale *Elementelor* au următorul cuprins: Cartea I. Despre linii și unghiuri. II. Despre triunghiuri. III. Despre patrulatere și poligoane. IV. Despre cerc. V. Despre solide. VI. Despre proporții. VII. Despre incomensurabile. VIII. Despre progresii și logaritmi. IX. Probleme, sau geometria practică.

După cum se vede și din titlu, cărticica lui PARDIES este o compilație după EUCLID, ARHIMEDE, APOLLONIUS, etc. Cele mai multe propoziții sunt însă din EUCLID.

In ceea ce privește gruparea materialului, PARDIES se ocupă de diferitele mărimi geometrice pe rând și anume: mai întâi studiază liniile și unghiurile, apoi triunghiurile, patruunghiurile, poligoanele, etc. spre deosebire de EUCLID, care le tratează amestecat. Metoda lui PARDIES și a celorlalți autori de *Elemente* scrise în același sens a fost însă aspru criticată de contimporani. Astfel MONTUCLA scrie despre această metodă următoarele: „*Il y à même à mon avis, une sorte de puerilité dans cette affectation, de ne point parler d'une genre de grandeur, des triangles par exemple, avant que d'avoir traité au long des lignes & des angles: car pour peu que, s'astreignant á cette ordre, on veuille observer la rigeur géométrique, il faut faire les mêmes frais de demonstrations, que si l'on eût commencé par ce genre d'étendue plus composé. J'ose aller plus loin, & je ne crains point de dire que cet ordre affecté va à rétrecir l'esprit, & à l'accoutumer à une marche contraire à celle du génie des découvertes. C'est déduire laborieusement plusieurs vérités particulières, tandis qu'il n'étoit pas plus difficile d'embrasser tout d'un coup le tronc, dont elle ne sont que les branches*".

Scopul cărții lui PARDIES fiind să simplifice demonstrațiile lui EUCLID, unele domonstrații sunt mai puțin riguroase, iar altele lipsesc cu totul, îndeosebi acele care sunt evidente prin intuiție. El nu cade însă în greșala unora din reprezentanții curentului antieuclidian, care considerau evidente teoreme ce trebuesc demonstrate.

E interesant că autorul se folosește cu predilecție de demonstrația directă a teoremelor și numai excepțional recurge la metoda

reducerii la absurd, atât de frecventă la EUCLID. El recurge la această metodă abia la sfârşitul Cărţii IV, la demonstraţia teoremei lui ARHIMEDE că *„orice cerc este egal cu un triunghiu dreptunghic, una din laturile căruia (de ex. perpendiculara) este semidiametrul, iar cealaltă (de ex. baza) este linia dreaptă egală cu circonferinţa cercului“*. Asupra metodei reducerii la absurd PARDIES are următoarea apreciere (pag. 44): *„Acest fel de demonstraţie, pe care-l folosim aici şi care se numeşte* **prin imposibilitate** *se numără între cele mai frumoase invenţii acele celor vechi; într'adevăr toată geometria* **indivizibilelor** *se bazează pe ea: astfel că ne mirăm că unii autori mai noi o înlătură ca fiind defectuoasă şi indirectă. Căci, dacă într'adevăr cineva este de un ingeniu atât de delicat încât nu poate suferi o demonstraţie care nu este directă şi pozitivă, atunci îi va fi uşor să o transforme într'una obişnuită şi directă“*. Se vede de aici că pe timpul lui PARDIES metoda reducerii la absurd nu se prea folosea în demonstraţii, de aceea a evitat-o în primele Cărţi. Însăşi teorema lui ARHIMEDE o demonstrează din nou şi în mod direct.

O altă caracteristică a acestei cărţi este, că spre deosebire de *Elementele* lui EUCLID, unde problemele şi teoremele sunt puse amestecat, aici problemele sunt adunate în Cartea ultimă.

PARDIES a ţinut seamă în redactarea manualului şi de progresele matematicii. Astfel el măsoară unghiurile în grade, minute şi secunde, care pe vremea lui EUCLID nu erau încă introduse în Grecia. Deasemenea, în legătură cu studiul proporţiilor autorul introduce pe cititor în studiul logaritmilor, o invenţie a timpurilor mai noi. Mai amintim, în sfârşit, întrebuinţarea liniilor trigonometrice: *sinus, cosinus*, etc.

In ceea ce priveşte terminologia matematică menţionez că pentru rază foloseşte atât termenul de *„radius“*, cât şi, mai ales, cel de *„semidiameter“*, iar în cazul liniilor trigonometrice cel de *„sinus totus“*, azi neuzitat. Deasemenea se foloseşte în acelaşi sens termenul de *„diagonală“* şi cel de *„diametru“*, definit ca *„linia dusă dela un unghiu la unghiul opus“* (pag. 24).

Pentru notaţii este de remarcat că dacă patru numere *a, b, c, d* sunt în proporţie aritmetică, aceasta se scrie astfel: $a.b::c.d$, iar dacă ele formează o proporţie geometrică, astfel: $a.b::c.d$.

Din *anexa* dela sfârşitul cărţii aflăm că în anul 1749 rector al Universităţii iezuite din Cluj a fost IOSIF BOROSS, iar decan STEFAN PONGRACZ. In lista noilor laureaţi în filozofie aflăm şi de astă dată un Român, anume pe „GREGORIUS SZILVASI Nob. Valachus Magyar Szilvasien. e com. Tordensi". Chestiunile de examen au fost următoarele: *a)* „*Pentru explicarea fenomenelor naturii este mai potrivită filozofia lui* ARISTOTEL sau cea a lui DESCARTES?" şi *b)* „*Să se descrie experienţele electrice*". Problemă specială de matematici nu s'a dat.

Din cele expuse mai sus se poate trage următoarea concluzie: *Elementele de Geometrie* ale lui PARDIES sunt un produs al curentului pornit din Franţa de a înlocui în învăţământ *Elementele* lui EUCLID cu un manual mai practic, mai uşor şi care să ţină seama de progresele geometriei. Deşi nu a putut înlocui pe EUCLID, cartea lui PARDIES a fost totuşi destul de răspândită, dovadă tocmai ediţia din Cluj.

Se pare chiar, că în Ardeal curentul antieuclidian a găsit teren favorabil, fiindcă tot la Cluj s'a tipărit în 1773 *Compendiul* lui CHR. WOLFF, care a reprezentat în ţările germane acelaşi curent (*Gazeta Matematică,* Anul XLII, No. 3 — 4). Capitolul de geometrie din acest *Compendiu* este scris cu acelaşi scop şi în acelaşi sens ca Elementele lui PARDIES. Acest capitol a fost tradus în româneşte de GHEORGHE LAZĂR (*Gazeta Matematică,* Anul XLI, No. 8 — 9) care a dus cu el la Bucureşti în acest fel şi curentul împotriva lui EUCLID, întărit mai târziu prin publicarea, în 1837, a traducerii de către P. POENARIU a Elementelor de Geometrie ale lui LEGENDRE.

VICTOR MARIAN.

ASUPRA PROBLEMEI 4553

In cele ce urmează îmi propun să rezolv complet problema 4553 a cărei soluţie publicată în G. M. — XLI — 353 nu este desăvârşită, cum dealtfel s'a şi menţionat la finele ei.

Reamintind că cerinţa acestei probleme se referă la studiul naturii rădăcinilor ecuaţiei

$$(E_1) \qquad x^2 + ax + b = 0$$

în care a şi b sunt rădăcinile ecuaţiei

(E) $$x^2 + px + q = 0$$

voiu observa dela început că în afara ecuaţiei (E_1), soluţionarea completă pretinde considerarea şi unei a doua ecuaţii, anume

(E_2) $$x^2 + bx + a = 0$$

fapt care rezultă imediat şi în mod analitic.

Intr'adevăr, notând cu x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei (E_1) şi scriind relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi, atât pentru această ecuaţie cât şi pentru ecuaţia (E),

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$x_1 x_2 = b$$

$$a + b = -p$$

$$ab = q$$

deduc, după eliminarea parametrilor a şi b, sistemul

(S)
$$x_1 + x_2 - x_1 x_2 = p$$

$$(x_1 + x_2)\, x_1 x_2 = -q$$

care echivalează cu ecuaţia de gradul patru

(1) $$x^4 - px^3 + (q-p)\, x^2 + (p-2q)\, x + q = 0$$

al cărei prim membru este chiar produsul primilor membri ai ecuaţiilor (E_1) şi (E_2).

Acestea fiind, problema 4553 comportă studiul naturii rădăcinilor ecuaţiilor (E_1) şi (E_2), studiu ce se poate face prin mai multe metode, după cum ne referim la ecuaţia (1), la sistemul (S) sau chiar la cele două ecuaţii (E_1) şi (E_2) — aceasta din urmă fiind punctul de pornire al soluţiei conţinute în rândurile de faţă, preferinţa fiind determinată de motivul că metoda ce se poate aplica în acest caz o socot mai elementară.

Cazul coeficienţilor p *şi* q *reali.* Incepând studiul naturii rădăcinilor ecuaţiilor (E_1) şi (E_2) prin considerarea cazului realităţii coeficienţilor p şi q, voiu observa că realizanţii celor două ecuaţii sunt respectiv

(R_1) $$p^2 + 4p - 2q - (p-4)\sqrt{p^2 - 4q}$$

(R_2) $$p^2 + 4p - 2q + (p-4)\sqrt{p^2 - 4q}$$

şi că produsul lor

$$R_1 R_2 = 4p^3 + q^2 - 12pq + 16q$$

îmi permite să fac un prim pas întru separarea rădăcinilor ecuaţiei (1), putând afirma că

dacă
- $R_1R_2 > 0$ am patru rădăcini reale sau imaginare toate.
- $R_1R_2 = 0$ am două rădăcini reale egale şi două imaginare, sau patru rădăcini reale dintre cari una dublă, sau în fine patru rădăcini reale toate egale.
- $R_1R_2 < 0$ am două rădăcini reale şi două imaginare.

Privind acum parametrii p şi q drept coordonatele unui punct oarecare din plan, aceste trei posibilităţi vor fi separate în plan de cubica

$$(\Gamma) \qquad 4x^3 + y^2 - 12xy + 16y = 0$$

a cărei construcţie nu întâmpină dificultăţi, căci scriind-o sub forma

$$y = 2(3x - 4) \pm 2(x - 4)\sqrt{1 - x}$$

se constată că trebue să avem

$$p = x \leqslant 1$$

pentru ca q adică y să fie real şi apoi, după metoda clasică se vede că traectoria cubicei porneşte din punctul $(-\infty, +\infty)$, este bitangentă parabolei

$$(P) \qquad x^2 - 4y = 0$$

în punctele $(-8, 16)$ şi $(0,0)$ — ultimul fiind punct de inflexiune cu tangenta axa absciselor — trece prin punctul $(1, -2)$ pentru ca apoi să se îndrepte spre $(-\infty, +\infty)$ după ce a intersectat direcţia negativă a axei ordonatelor la o distanţă egală cu 16 de origină.

Cele trei posibilităţi indicate de produsul realizanţilor determină respectiv regiunile din dreapta, dealungul şi din stânga cubicei (Γ), iar o precizare nu este necesară decât pentru primele două.

Prima regiune cuprinde trei porţiuni distincte şi anume:

1°. Porţiunea cuprinsă între cubica (Γ) şi parabola (P) când toate rădăcinile sunt reale exceptând suprafaţa închisă de cele două puncte de tangenţă ale curbelor, când cele patru rădăcini sunt imaginare.

2°. Porţiunea din plan interioară parabolei (Γ) cât şi dealungul ei, când cele patru rădăcini sunt imaginare. Dealungul parabolei pentru motivul că atunci rădăcinile ecuaţiei (E) sunt egale, ecuaţiile (E_1) şi (E_2) confundându-se cu o ecuaţie de forma

$$x^2 + mx + m = 0$$

ale cărei rădăcini sunt imaginare, iar în interiorul parabolei pentru motivul că în acest caz ecuaţia (E) are rădăcini imaginare şi deci coeficienţii ecuaţiilor (E_1) şi (E_2) sunt imaginari. In această ultimă posibilitate există o excepţie şi anume pentru punctele situate pe porţiunea din dreapta

$$x - 1 = 0$$

interioară parabolei când cele două ecuaţii (E_1) şi (E_2) admit respectiv o rădăcină reală egală cu unitatea, fapt ce reese imediat din observaţia că în acest caz cele două ecuaţii se scriu

$$2x^2 - px - p + i\,(x-1)\sqrt{4q - p^2}$$

cu $4q - p^2 > 0$

$$2x^2 - px - p - i\,(x-1)\sqrt{4q - p^2}$$

şi care excepţie nu putea fi prevăzută la început.

3°. Restul regiunii când toate rădăcinile sunt reale.

Pentru a doua regiune şi anume dealungul cubicei (Γ) am:

1°. Pentru rădăcini reale şi egale în punctele de tangenţă ale cubicei (Γ) cu parabola (P).

2°. Două rădăcini imaginare şi una dublă reală pentru punctele traectoriei coprinse între cele două puncte de tangenţă.

3°. Patru rădăcini reale dintre cari una dublă pentru toate celelalte puncte ale traectoriei.

Specificând în plus că o rădăcină dublă înseamnă că cele două ecuaţii (E_1) şi (E_2) au o rădăcină comună, afară de cazul când mai există şi rădăcini imaginare, iar coeficienţii lor sunt reali, caz când una din ecuaţii este un patrat perfect, am rezolvat complet problema în ipoteza realităţii coeficienţilor p şi q.

Cazul coeficienţilor p *şi* q *imaginari.* Considerând acum cazul coeficienţilor p şi q imaginari, adică de formele

$$p_1 + ip_2 \qquad q_1 + iq_2 \qquad i = \sqrt{-1}$$

rădăcinile ecuației (E) vor fi în general imaginare, neexistând decât posibilitatea ca cel mult una să fie reală și egală cu

$$-\frac{q_2}{p_2}$$

posibilitate condiționată de existența relațiunii

$$q_2^2 - p_1 p_2 q_2 + q_1 p_2^2 = 0.$$

In acest caz cele două ecuații (E_1) și (E_2) vor fi de formele

$$x^2 + (a_1 + b_1)\, x + i b_2 = 0$$
$$x^2 + b_1 x + a_1 + i b_2 x = 0$$

reeșind evident că numai ecuația (E_2) poate avea o rădăcină reală identic nulă, ceea ce necesită nulitatea parametrului a_1 și deci a rădăcinii reale admise de ecuația (E) care va trebui să fie de forma

$$x^2 + (p_1 + i p_2)\, x = 0.$$

In cazul general, cele două ecuații (E_1) și (E_2) sunt de formele

$$x^2 + a_1 x + b_1 + i\,(a_2 x + b_2) = 0$$
$$x^2 + b_1 x + a_1 + i\,(b_2 x + a_2) = 0$$

și rădăcinile lor vor fi imaginare afară de cazul când existența rădăcinilor reale

$$-\frac{b_2}{a_2} \quad , \quad -\frac{a_2}{b_2}$$

condiționată respectiv de relațiunile

$$(2) \quad b_2^2 - a_1 a_2 b_2 + b_1 a_2^2 = 0 \ , \ a_2^2 - a_2 b_1 b_2 + a_1 b_2^2 = 0$$

este posibilă.

Cum avem

$$p_1 + a_1 + b_1 = 0$$
$$p_2 + a_2 + b_2 = 0$$
$$q_1 = a_1 b_1 - a_2 b_2$$
$$q_2 = a_2 b_1 + a_1 b_2$$

eliminarea parametrilor a_1, a_2, b_1 și b_2 între aceste relațiuni și una din relațiunile (2) îmi dă relațiunea care condiționează existența unei rădăcini reale

$$[q_1 A^3 + q_1 A^2 + (1 - p_1)\, A + 1]^2 + [q_1 A^3 + q_1 A^2 + (1 - p_1)\, A + 1]$$
$$[(3q_1 + p_1^2 - p_2^2)\, A^2 + 2p_1 A - 1] - A[(3q_1 + p_1^2 - p_2^2)\, A^2 + 2p_1 A - 1]^2 = 0$$

în care A are una din valorile

$$\frac{p_2}{q_2} \quad , \quad \frac{p_2}{p_1 p_2 - q_2}$$

după cum rădăcina reală este a ecuației (E_1) sau (E_2).

Această condiție interpretată geometric, conduce la propoziția că *dacă punctul* (a_1, b_1) *nu este situat pe cubica*

$$x^3 + y^3 - 3xy + 1 = 0$$

ecuațiile (E_1) *și* (E_2) *admit o rădăcină reală după cum punctul* (a_2, b_2) *este situat pe unul din sistemul de drepte*

$$b_1 x^2 - a_1 xy + y^2 = 0$$

$$x^2 - b_1 xy + a_1 y^2 = 0.$$

Pentru ca ecuațiile (E_1) și (E_2) să admită în același timp câte o rădăcină reală, este necesar ca relațiunile (2) să fie simultan satisfăcute. Or, scriindu-le sub forma

$$b_2^3 - a_1 a_2 b_2^2 + b_1 b_2 a_2^2 = 0$$

$$a_2^3 - a_2^2 b_1 b_2 + a_1 a_2 b_2^2 = 0$$

obțin relația

$$a_2^3 + b_2^3 = 0$$

care mă conduce la condiția unică

$$a_2 + b_2 = 0$$

căci condițiunea

$$a_2^2 - a_2 b_2 + b_2^2 = 0$$

nu poate fi satisfăcută în cazul realității parametrilor a_2 și b_2.

Relațiunile (2) îmi dau atunci condițiunea

$$a_1 + b_1 + 1 = 0$$

și prin urmare va trebui să am

$$p = 1$$

ecuația (E) fiind de forma

$$x^2 + x + q_1 + iq_2 = 0.$$

Voiu avea deci două rădăcini reale egale cu unitatea *dacă punctele* (a_1, b_1) *și* (a_2, b_2) *vor fi respectiv situate pe dreptele*

$$x + y = 0 \quad \text{și} \quad x + y + 1 = 0.$$

* * *

Cu acestea problema 4553 este complet rezolvată. Voiu observa totuşi pentru încheere, că studiul cazului când coeficienţii p şi q sunt imaginari se mai putea face pornind direct dela ecuaţia (1), care fiind acum

$$x^4 - p_1 x^3 + (q_1 - p_1) x^2 + (p_1 - 2q_1) x + q_1 - i [p_2 x^3 - (q_2 - p_2) x^2 - (p_2 - 2q_2) x - q_2] = 0$$

va trebui pentru obţinerea rezultatului, să scriem condiţiunile pentru cari ecuaţiile

$$x^4 - p_1 x^3 + (q_1 - p_1) x^2 + (p_1 - 2q_1) x + q_1 = 0$$
$$p_2 x^3 + (p_2 - q_2) x^2 + (2q_2 - p_2) x - q_2 = 0$$

admit una sau două rădăcini reale comune, cazul când ele ar admite chiar trei rădăcini comune şi reale trebuind a fi exclus pentru motivul că cerinţa problemei se referă la studiul naturii rădăcinilor a două ecuaţii de gradul doi şi o astfel de ecuaţie nu poate admite de cât cel mult o rădăcină reală atunci când coeficienţii sunt imaginari.

G. G. CONSTANTINESCU.

PROPRIETĂŢI ÎN CÂMPUL TRAECTORIILOR ANTIAERIENE

Tragerile antiaeriene (contra navelor) sunt — se pare — la modă.

Prin traectorie antiaeriană se înţelege *ramura urcătoare* a traectoriei unui proectil tras de un tun antiaerian cu un unghiu de tragere $\alpha \geqslant 45^0$.

Balistica Exterioară studiază proprietăţile unei traectorii, dar nu pomeneşte de o comparaţie între două traectorii.

Fie traectoria antiaeriană 1 având unghiul de tragere α_1 şi traectoria antiaeriană 2, având unghiul de tragere α_2, unde $\alpha_2 > \alpha_1$. Ambele traectorii sunt descrise de un acelaşi proectil (acelaşi coeficient balistic), asvârlit cu aceeaşi viteză iniţială v_0.

Fie acum tunul presupus aşezat în origina axelor de coordonate xOy, şi fie M un punct oarecare pe una din traectorii având datele următoare:

x, y coordonate;
t durata traectului;
θ înclinarea tangentei;
v viteza tangenţială;
l lungimea arcului;
s viteza sunetului corespunzătoare;
Δ densitatea aerului corespunzătoare.

Vom mai presupune că acceleraţia gravitaţiei rămâne constantă în tot câmpul.

Pentru studiul proprietăţilor ce urmează vom utiliza următoarele relaţiuni din Balistica Exterioară:

1) $$x = c' \cdot [D_w - D_{w_0}]$$

2) $$t = \frac{c'}{\cos\alpha} \cdot \frac{s_0}{s} \cdot [T_w - T_{w_0}]$$

3) $$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varkappa - \frac{c'}{2\cos^2\alpha} \cdot \frac{s_0^2}{s^2} \cdot [J_w - J_{w_0}]$$

4) $$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{x \cdot c'}{2\cos^2\alpha} \cdot \frac{s_0^2}{s^2} [\Phi_w - J_{w_0}].$$

Unde avem:

$$c' = \frac{1}{c \cdot \beta}$$

β fiind un parametru, pe care îl vom considera constant şi egal cu 1 în tot câmpul antiaerian, nefăcând astfel decât o eroare cu totul neglijabilă.

Vom lua apoi:

5) $$w = \frac{v \cdot \cos\theta}{\cos\alpha} \cdot \frac{s_0}{s},$$

iar D, T, J sunt funcţiuni cunoscute balistice şi:

$$\Phi = \frac{A - A_0}{D - D_0}$$

unde A este tot o funcţiune balistică.

Menţionăm că primele trei funcţiuni descresc continuu, când w creşte continuu.

Cu aceste date vom stabili proprietăţile ce urmează.

I. *Pentru un acelaşi* x *avem:*

$$y_2 > y_1 \quad \text{căci } \alpha_2 > \alpha_1$$

$$\left.\begin{aligned} t_2 &> t_1 \\ l_2 &> l_1 \\ v_2 &< v_1 \\ \theta_2 &> \theta_1 \end{aligned}\right\} \text{ consecinţe imediate.}$$

De asemenea cum avem $\Delta_2 < \Delta_1$, urmează că $c'_2 > c'_1$ şi prin urmare:

$$D_2 < D_1$$

adică $w_2 > w_1$, ceea ce antrenează:

$$\frac{v_2 \cos\theta_2}{s_2 \cdot \cos\alpha_2} > \frac{v_1 \cdot \cos\theta_1}{s_1 \cdot \cos\alpha_1}$$

$$\frac{s_2 \cdot t_2 \cdot \cos\alpha_2}{c'_2} < \frac{s_1 \cdot t_1 \cdot \cos\alpha_1}{c'_1}$$

$$\frac{s_2^2}{c'_2}(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\theta_2)\cos^2\alpha_2 < \frac{s_1^2}{c'_1}(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\theta_1)\cos^2\alpha_1 .$$

In cazul când avem $c'_1 = c'_2$ atunci neegalităţile de mai sus devin egalităţi.

Prin urmare ele se pot transforma în:

$$1 \leqslant \frac{s_2 \cdot t_2 \cdot \cos\alpha_2}{s_1 \cdot t_1 \cdot \cos\alpha_1} \leqslant \frac{c'_2}{c'_1}$$

$$1 \leqslant \left(\frac{s_2 \cos\alpha_2}{s_1 \cos\alpha_1}\right)^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\theta_2}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\theta_1} \leqslant \frac{c'_2}{c'_1} .$$

Şi cum $s_2 \leqslant s_1$ atunci avem:

$$\frac{s_2}{s_1} \leqslant \frac{v_2 \cdot \cos\theta_2}{v_1 \cdot \cos\theta_1} \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \leqslant 1 .$$

II. *Pentru un acelaşi* y, *avem:*

$$x_2 < x_1 \quad \text{şi} \quad c'_2 = c'_1$$

deci rezultă:

$$\theta_2 > \theta_1$$

$$l_2 < l_1$$

$$D_2 < D_1 \quad \text{şi deci} \quad w_2 > w_1 .$$

Prin urmare cum $s_2 = s_1$, avem:

$$\frac{v_2 \cdot \cos\theta_2}{v_1 \cdot \cos\theta_1} \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \geqslant 1$$

$$t_2 \cos\alpha_2 \leqslant t_1 \cos\alpha_1$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\theta_2}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\theta_1} \leqslant \frac{\cos^2\alpha_1}{\cos^2\alpha_2} .$$

III. *Pentru un acelaşi* t, *avem:*

$$T_2 < T_1 \quad \text{şi} \quad y_2 > y_1$$

prin urmare $w_2 > w_1$.

Rezultă dar proprietăţile dela punctul I), şi în special:

$$\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} < \frac{s_1 \cdot c'_1}{s_2 \cdot c'_1} .$$

IV. *Pentru un acelaşi* θ, *avem:*

$$x_2 < x_1$$

$$y_2 > y_1$$

deci

$$D_2 < D_1 \quad \text{şi} \quad w_2 > w_1 .$$

Aceasta ne conduce la aceleaşi proprietăţi ca la I) şi II), având însă $\theta_2 = \theta_1$; dându-ne în special:

$$\frac{s_2}{s_1} \leqslant \frac{v_2 \cos\alpha_2}{v_1 \cos\alpha_1} \leqslant 1.$$

V. *Pentru puncte de egală viteză tangenţială.*

Plecând dela ecuaţia *odografului*:

5) $$g \cdot d\,(v\cos\theta) = v \cdot c \cdot F(v) \cdot d\theta .$$

Observăm că avem pentru un acelaşi v:

$$\frac{d\theta_2}{d\,(v\cos\theta_2)} = \frac{d\theta_1}{d\,(v\cos\theta_1)} .$$

Cum creşterile $d\theta$ sunt aceleaşi, urmează că:

$$d(v\cos\theta_2) = d(v\cos\theta_1)$$

sau:

$$\cos\theta_2 = \cos\theta_1 - \frac{c}{v}.$$

Dar valoarea constantei este:

$$c = +v_0(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Prin urmare avem:

$$\cos\theta_2 = \cos\theta_1 - \frac{v_0}{v}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

sau:

$$\frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2} = \frac{v_0}{v}.$$

VI. *Pentru punctele de ordonată maximă.*

Avem „à priori".

$$Y_2 > Y_1 \quad \text{şi} \quad X'_2 < X'_1.$$

Prin urmare $W_2 > W_1$, dăm deci peste proprietăţile dela I şi II.

Mai observăm că din relaţiunile 3) şi 4) deducem:

$$\frac{Y}{X'} \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1 - \frac{\Phi_w - J_0}{J_w - J_0}.$$

Ori cum Y este maximum şi θ minimum, urmează că raportul:

$$\frac{\Phi_w - J_0}{J_w - J_0}$$

poate să fie neglijeabil faţă de unitate şi prin urmare vom avea:

$$\frac{Y_2}{X'_2}\operatorname{cotg}\alpha_2 = \frac{Y_1}{X'_1}\operatorname{cot}\alpha_1.$$

Observaţiuni.

1. *Asupra punctului I.*

Dacă traectoriile sunt apropiate una de alta ($\alpha_2 - \alpha_1 \leqslant 5^0$), atunci putem admite:

$$s_2 = s_1 \quad \text{şi} \quad c'_2 = c'_1.$$

Vom avea deci:

$$\frac{v_2 \cos\theta_2}{\cos\alpha_2} = \frac{v_1 . \cos\theta_1}{\cos\alpha_1}$$

$$t_2 . \cos\alpha_2 = t_1 . \cos\alpha_1$$

$$(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\theta_2) \cos^2\alpha_2 = (\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\theta_1) \cos^2\alpha_1 .$$

2. *Asupra punctului III.*

In aceleaşi condiţiuni, avem:

$$\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1 .$$

3. *Asupra punctului IV, avem:*

$$v_2 \cos\alpha_2 = v_1 \cos\alpha_1 .$$

4. *Asupra coeficientului balistic.*

Valoarea coeficientului balistic descreşte direct proporţional cu densitatea aerului, adică se mişorează pe măsură ce y creşte. In realitate însă, din cauza sporirei mişcărilor de „precesie" şi de „nutaţie" ale proectilului, coeficientul balistic creşte pe măsură ce durata traectului creşte (viteza tangenţială scade) prin urmare, în cazul unei traectorii antiaeriene, pe deoparte coeficientul balistic creşte din cauza mişcărei de rotaţie, a proectilului, pe de altă parte scade din cauza altitudinei. In consecinţă, într'o măsură oarecare, există o compensaţie, aşa dar ipoteza admiterei unui coeficient balistic constant, se apropie mai mult de realitate.

MAIOR I. LINTEŞ
(Reşiţa).

PREMIUL „SPIRU HARET"

După cum cunoaşteţi, pentru a cinsti memoria marelui profesor şi reformator al învăţământului, SPIRU HARET, primul român doctor în ştiinţele matematice, Societatea *Gazeta Matematică* acordă în fiecare an un premiu denumit „Premiul SPIRU HARET" în valoare de 5.000 (cinci mii) lei.

Acest premiu, care este indivizibil, se decerne autorului unei lucrări de mecanică sau astronomie, din cele publicate în *Gazeta Matematică* în ultimul volum apărut.

Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de Liceu, de Şcoală Militară, de Şcoală Politechnică sau student la o Facultate de Ştiinţe din ţară.

Subsemnaţii membri în Comisiunea pentru decernarea premiului „SPIRU HARET", în conformitate cu cele arătate mai sus, cercetând Volumul XLIII al *Gazetei Matematice* am constatat, că în acest volum nu se găseşte nici o lucrare de mecanică sau astronomie de vre-un elev de Liceu, Şcoală Militară, Şcoală Politechnică sau student la o Facultate de Ştiinţe din ţară.

Deasemeni nu am găsit nici o notă matematică sau vre-o problemă de mecanică sau astronomie, rezolvată de vre-un elev de Liceu, de Şcoală Militară, de Şcoală Politechnică sau student la o Facultate de Ştiinţe din ţară, care să facă măcar dovada preocupărei matematice în acest domeniu.

Aceasta fiind situaţiunea, subsemnaţii membri în Comisiunea pentru decernarea premiului „SPIRU HARET", nu recomandăm pe nimeni pentru acest premiu.

COMISIUNEA
PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „SPIRU HARET"
Ing. C. ORĂŞANU, Ing. D. STAN.

Acest raport s'a citit şi aprobat în şedinţa Adunării generale din 23 Februarie 1939.

NOTE MATEMATICE

48. *Asupra problemei 3911.* In soluţia dată problemei 3911 la pag. 433 din acest an, s'a impus numerelor u şi v condiţia de a fi prime cu d, ori u şi v sunt prime numai între ele. Unul din numerele u şi v poate fi neprim cu d. Această restricţie a făcut să se piardă unele soluţii ale problemei şi anume acelea corespunzătoare lui d egal cu 3 şi cu 9.

Vom examina în această notă cazurile omise.

1°. *Cazul* $d = 3$. Din (1) dela pag. 433 se scoate:

$$v = 8u + 3. \qquad (\alpha)$$

Cum $9uv$ trebue să fie cub perfect, urmează că unul din numerele u, v trebue să fie neapărat divizibil prin 3, dar atunci după (α) şi celalt se divide prin 3 ceea ce este contra ipotezei, u şi v fiind primi între ei. Deci în acest caz *nu avem soluţii.*

2°. *Cazul* $d=9$. Aceeaşi egalitate (1) dela pag. 433 dă:

$$v = 8u + 1$$

şi cum:

$$9^2 \times u \times v = 3^3 \times 3 \times u(8u + 1)$$

trebue să fie cub perfect iar u şi v sunt prime între ele, avem următoarele posibilităţi:

$$u = 9x^3 \text{ cu } 8u + 1 = y^3 \qquad (\beta)$$

$$u = x^3 \text{ cu } 8u + 1 = 9y^3 \qquad (\gamma)$$

care conduc respectiv la ecuaţiile:

$$y^3 - 72x^3 = 1 \qquad (I)$$

$$9y^3 - 8x^3 = 1 \qquad (II)$$

a căror rezolvare în numere întregi se dă în tratatele de teoria numerelor.

Ecuaţia (II) admite soluţia evidentă

$$x = 1 \quad , \quad y = 1$$

care dă pentru problema 3911 soluţia:

$$n = 10 \quad , \quad E = 9^3.$$

Soluţiile complete ale problemei 3911 se obţin deci rezolvând ecuaţiile (I) şi (II) în numere întregi.

PETRE BOLDESCU.

49. *Asupra notei precedente.* Mulţumesc D-lui P. BOLDESCU că a pus în evidenţă scăparea ce s'a făcut la soluţia dela pag. 433 a problemei 3911. Aşa dar, soluţiile problemei 3911 sunt date de soluţiile întregi ale ecuaţiilor (I) şi (II) precedente, care — după înlocuirea lui $8x$ prin z devin:

$$y^3 - 9z^3 = 1 \quad (I)' \qquad \text{şi} \qquad 9y^3 - z^3 = 1 \quad (II)'$$

care sunt cazuri particulare ale următoarei probleme rezolvată de LEGENDRE:

Cu ajutorul unei soluții întregi particulare a ecuației

$$x^3 + ay^3 = bz^3$$

să se găsească o a doua, o a treia,... soluție.

Cazul general al găsirei soluțiilor *raționale* sau al soluțiilor întregi a ecuațiilor de forma

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = t^3$$

este studiat în diferitele tratate de teoria numerelor sau reviste. Citez de exemplu: R. CARMICHAEL, *Théorie des nombres* sau SCHAEWEN, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Vol. XVIII, etc.

Pentru că D-l P. BOLDESCU prin nota precedentă deși a dat numai o soluție a ecuației (II), a amorsat problema rezolvării în numere întregi a ecuațiilor de gradul III, îi sugerăm să facă o scurtă sinteză a acestei probleme dând și câteva aplicații, între care și ecuațiile (I) și (II), pe care o vom publica cu plăcere sub formă de articol sau notă. Rezolvarea în numere întregi sau în numere raționale a ecuației de gradul III nu a fost tratată până acum în *Gazeta Matematică*.

G-L GH. BUICLIU.

50. *Asupra unei probleme de construcție.* In nota 37, pag. 473, G. M. XLIV, D-l G-L GH. BUICLIU tratează, dându-i o soluție analitică, următoarea problemă:

In unghiul BAC *al triunghiului* ABC *să se înscrie un cerc care să intercepteze pe latura* BC *un segment* FG *de lungime dată.*

In prezenta notă dau o soluție elementară bazată numai pe puterea unui punct față de cerc și pe rezolvarea unui sistem de ecuații de gradul II.

Fie D și E contactele cercului cerut cu laturile AC și AB respectiv și fie GF segmentul interpretat de cerc pe latura BC astfel că:

$$\overline{GF} = 2k. \tag{1}$$

Notăm:

$$\overline{AD} = \overline{AE} = x$$

$$\overline{CF} = \alpha \tag{2}$$

$$\overline{CG} = \beta$$

şi cu notaţiile obişnuite într'un triunghiu, să considerăm problema rezolvată:

I. In cazul când cercul căutat are centrul său I pe bisectoarea interioară a unghiului BAC (cazul figurii dela pag. 473), scrim puterile punctelor B, C faţă de cercul (I):

$$\begin{aligned} \overline{CF} \cdot \overline{CG} &= \overline{CD}^2 \\ \overline{BF} \cdot \overline{BG} &= \overline{BE}^2 \end{aligned} \qquad (3)$$

relaţii la cari alăturând şi relaţia de condiţie (1) şi scriindu-le cu notaţiile introduse (2), avem următorul sistem de ecuaţii ce rezolvă problema:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= (b-x)^2 \\ (a-\alpha)(a-\beta) &= (c-x)^2 \\ \beta - \alpha &= 2k. \end{aligned} \qquad (4)$$

E deajuns însă a-l găsi pe x pentru a construi cercul (I) cerut.

Din prima şi ultima ecuaţie a sistemului (4) rezultă că β şi $-\alpha$ sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$Z^2 - 2kZ - (b-x)^2 = 0 \qquad (5)$$

adică:

$$-\alpha,\ \beta = k \pm \sqrt{k^2 + (b-x)^2}. \qquad (6)$$

Apoi ţinând seama în ecuaţia a doua, de prima, rezultă succesiv:

$$\begin{aligned} (c-x)^2 &= a^2 - (\alpha+\beta)a + (b-x)^2 \\ 2(b-c)x &= a^2 + b^2 - c^2 - (\alpha+\beta)a. \end{aligned} \qquad (7)$$

Dar din (6) rezultă:

$$\alpha + \beta = 2\sqrt{k^2 + (b-x)^2} \qquad (8)$$

care introdusă în (7) dă:

$$2(b-c)x - (a^2 + b^2 - c^2) = -2a\sqrt{k^2 + (b-x)^2} \qquad (9)$$

din care, ridicând la patrat şi făcând calculele, obţinem:

$$\begin{aligned} &4[(b-c)^2 - a^2]x^2 - 4(b+c)[(b-c)^2 - a^2]x \\ &\quad + [(a-b)^2 - c^2][(a+b)^2 - c^2] - 4a^2k^2 = 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

de unde după simplificări, obţinem ecuaţia care dă pe x:

$$4x^2 - 4(b+c)x + [(b+c)^2 - a^2] + \frac{4a^2k^2}{a^2-(b-c)^2} = 0 \quad (11)$$

şi anume:

$$x = \frac{(b+c)\sqrt{a^2-(b-c)^2} \pm a\sqrt{a^2-(b-c)^2-4k^2}}{2}. \quad (12)$$

Expresie pe care se vede că x este real pentru:

$$2k \leqslant \sqrt{a^2-(b-c)^2} \quad (13)$$

şi că, deoarece $a < b+c$ şi $a > b-c$, ambele rădăcini sunt pozitive.

Cu expresia (12) a lui x, dând punctul D sau E conform notaţiilor (2), se construeşte uşor segmentul AD sau AE cu rigla şi compasul ţinând seama de anumite relaţii într'un triunghiu dreptunghiu, (teorema lui PITAGORA, relaţia între înălţime şi proecţiile catetelor pe ipotenuză şi apoi iar teorema lui PITAGORA).

II. In cazul când cercul căutat are centrul său I pe bisectoarea exterioară a unghiului BAC, sistemul (4) devine:

$$\begin{aligned} \alpha.\beta &= (b-x)^2 \\ (a+\alpha)(a+\beta) &= (c+x)^2 \\ \beta-\alpha &= 2k \end{aligned} \quad (14)$$

dacă cercul este tangent exterior laturei AC, sau:

$$\begin{aligned} \alpha.\beta &= (b+x)^2 \\ (\alpha-a)(\beta-a) &= (x-c)^2 \\ \beta-\alpha &= 2k \end{aligned} \quad (15)$$

dacă arcul este tangent exterior laturei AB; dar e uşor de văzut — şi de interpretat — că aceste sisteme dau soluţii egale dar de semne contrarii, restul ca la cazul I.

AD. GHEORGHIU.

51. *Asupra problemei 4385.*

In această problemă se cereau polinoamele *de gradul al doilea* care satisfac ecuaţiei funcţionale:

(1) $\quad P^2(x) - P(x-1)\,P(x+1) = 2P(x).$

Forma particulară a enunțului, ca și soluțiile date în Vol. XLIII, pag. 596 și XLIV, pag. 129 (Nota 8), fac ca această problemă să constitue un simplu exercițiu de *Algebră elementară* pentru începători.

Să considerăm însă un punct de vedere mai general, anume, să determinăm *toate* polinoamele, *de orice grad*, ce satisfac ecuației funcționale (1). Observăm că această ecuație se poate scrie

$$(2) \qquad P(x-1)\,P(x+1) = P(x)\,[P(x)-2],$$

deci $P(x)$ divide produsul $P(x-1)\,P(x+1)$, adică la o rădăcină x_0 a ecuației $P(x) = 0$ se adaugă rădăcinile $x_0 \pm 1$. Aceasta arată că rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sunt în progresie aritmetică, cu rația *unu*, deci

$$P(x) = A_0(x-a)(x-a-1)(x-a-2)\ldots(x-a-n+1),$$

iar ecuația (2), simplificată, devine

$$(3) \quad A_0(x-a+1)(x-a-1)(x-a-2)\ldots$$
$$(x-a-n+2)(x-a-n) = P(x)-2,$$

egalitate imposibilă căci $P(x)$ și $P(x)-2$ n'au nici un divizor comun, polinom. Pentru ca (3) să fie posibilă, trebue ca $P(x)$ să nu conțină divizorii care, după (3) aparține și lui $P(x)-2$, adică să avem

$$P(x) = A_0(x-a)(x-a-n+1),$$

deci $n = 2$, iar din (3) se deduce $A_0 = 1$.

Singurele polinoame care satisfac ecuația funcțională (1) sunt deci

$$P(x) = (x-a)(x-a-1).$$

La o concluzie analoagă se ajunge dacă se caută polinoamele care satisfac ecuației funcționale mai generale

$$P^2(x) - P(x-a)\,P(x+a) = kP(x),$$

a, k fiind constante date.

Propun, ca pe aceeași cale să se găsească polinoamele care satisfac ecuației funcționale mai generale

$$P^2(x) - P(x-a)\,P(x+a) = P(x)\,Q(x),$$

unde $Q(x)$ este un polinom dat, a cărui formă trebue precizată.

M. G.

52. *Asupra diviziunei numerelor.*

In „Théorie des Nombres" par E. LUCAS pag. 374, se arată că:

„Dacă $S(n)$ este suma resturilor numărului întreg n prin fiecare din întregii care îl preced, şi $\sigma(n)$ suma divizorilor lui n, atunci avem:

$$S(n) + \sigma(n) = S(n-1) + 2n - 1.$$

Demonstraţia dată fiind cam prea rezumată, voiu încerca să dau o demonstraţie aşa precum eu o înţeleg mai uşor.

Fie:

$$n = c_i \,.\, i + r_i \quad \text{şi} \quad n - 1 = c'_i \,.\, i + r'_i$$

unde literile înseamnă: câtul, împărţitorul şi restul.

Observăm însă că:

$$n^2 = \sum_1^n (i \,.\, c_i) + S(n)$$

şi

$$(n-1)^2 = \sum_1^{n-1} (i \,.\, c'_i) + S(n-1).$$

Scăzând ambele relaţii, obţinem:

$$2n - 1 = \sum_1^{n-1} (c_i - c'_i) \,.\, i + n + S(n) - S(n-1).$$

Dar de mai sus deducem lesne că:

$$(c_i - c'_i)\, i = 1 + r'_i - r_i.$$

Dar dacă i nu este un divizor a lui n, atunci avem:

$$r'_i = r_i - 1.$$

Dacă i este un divizor a lui n, atunci:

$$r'_i = r_i - 1 + i.$$

Prin urmare $(1 + r'_i - r_i)$ poate fi egal cu O când i nu este divizor a lui n şi egal cu i, când i este divizor a lui n.

Atunci:

$$\sum_1^{n-1} (c_i - c'_i) \,.\, i = \sigma(n) - n.$$

Şi deci:

$$S(n) + \sigma(n) = S(n-1) + 2n - 1.$$

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

BIBLIOGRAFIE

Boletin del Seminario Matemático, publicat de J. REY PASTOR. Vol. V. (1938 — 1940) Nr. 23. Iulie 1938. Buenos-Aires. Asupra inversiunii integralelor lui LAPLACE absolut convergente de A. GONZÁLEZ-DOMINGUEZ, Asupra unei familii de lemniscate de S. RIOS.

Boletin Matematico. An. XII. Nr. 7. Iunie 1939. Buenos-Aires. Asupra geometriei analitice complexe de B. I. BAIDAFF. Asupra unor drepte într'un triunghiu de VIRGIL CLAUDIAN.

Idem. An. XII. Nr. 8. Iunie 1939. Buenos-Aires.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 45. Nr. 6. Iunie 1939. Menasha, Wis., & New-York.

Journal de Mathématique Élémentaires, publicat de H. VUIBERT. An. 63. Nr. 19. 1 Iulie 1939. Paris.

Idem. An. 63. Nr. 20. 15 Iulie 1939. Paris.

Revista. Serie Segunda Nr. 1. Publicaţiile facultăţii de ştiinţe fizico-matematice. Nr. 121. Mai 1939. La Plata (Rep. Argentina).

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIX. Nr. 5—6. Iulie-August 1939. Trigonometria patratică (urmare) de V. ALACI.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXV. Nr. 2. Aprilie-Iunie 1939. Iaşi.

Sphinx, revue mensuelle des questions récréatives. An. IX. Nr. 8. August 1939. Bruxelles.

Ştiinţă şi Progres. Revista ştiinţifică a Liceelor-Militare. An. V. Nr. 9—10. Mai-Iunie 1939. Liceul Militar Tg.-Mureş.

The Mathematical Gazette. Vol. XXIII. Nr. 255. Iulie 1939. London.

FL. CÂMPAN. *Contribuţia lui* BACALOGLU *la studiul podarelor curbelor plane.* (Extras din „Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi", Vol. XII. 1938).

J. REI PASTOR. *Funciones de variable compleja binaria.* (Publicat în Nr. 19 din Boletin del Seminario Matematico). Buenos-Aires. 1936.

NICÉPHORE GRÉGORAS. *Un échantillon D'«Aritmetica Geometrica»,* text şi traducere de ST. BEZDECHI. Cluj. 1938.

CĂPITAN COMANDOR I. LINTEŞ. *Variaţia preciziei percutante şi calculul abaterilor probabile.* (Extras din Revista Artileriei No. 5. 1939).

EMILE BOREL. *Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications.* Tome IV. *Applications diverses et conclusion.* Fascicule III. *Valeur pratique et philosophie des probabilités.* Paris. Gauthier-Villars, imprimeur-Editeur. 1939.

Sunt 15 ani de când D-l E. BOREL, profesor la Facultatea de ştiinţe din Paris, a început publicarea unei Enciclopedii asupra Calculului Probabilităţilor

şi aplicaţiunilor lui. Volumul acesta încheia seria celor 19 volume apărute în această Enciclopedie. Tratatul acesta este urmat de monografii care vor ţine lumea ştiinţifică în curent cu progresele Calculului Probabilităţilor în diferite domenii.

Autorul arată în Prefaţă că ştiinţa probabilităţilor nu este inferioară altor ştiinţe din punct de vedere practic.

Cap. I se ocupă cu *Valoarea practică şi ştiinţifică a Calculului Probabilităţilor*. Prin discutarea unor chestiuni se arată că acest Calcul are aplicaţiuni practice şi în alte ştiinţe şi că el a permis să se prevază lucruri noi în Fizică şi în Biologie. Dacă s'a abuzat de acest Calcul în unele cazuri, ca în al judecăţilor şi al mărturiilor, este că nu s'a discutat bine dacă cazurile de apariţiune ale unor întâmplări se fac în condiţiuni identice.

Cap. II tratează despre *Calculul Probabilităţilor şi metoda ştiinţifică*. Aci autorul se ocupă de principiul cauzalităţii şi arată prin câteva exemple că, chiar acolo unde pare certitudine perfectă, avem de a face cu o probabilitate. Se analizează metoda inducţii, metoda lui KEYNES şi observaţiile lui NICOD.

Cap. III are ca titlu: *Incomprehensiunea jucătorilor şi a spiritelor superstiţioase*. Aci se caută să se combată aceia care sunt de părere că Teoria Probabilităţior nu este de nici un folos. Contra unor asemenea păreri autorul preconizează introducerea Calculului Probabilităţior în şcolile din tinereţe şi adolescenţă, arătând ce se poate cere şi ce nu acestui calcul. Iluziile jucătorilor, că prin el se poate câştiga, trebuesc spulberate.

Cap IV conţine *Reflexiuni asupra unor erori şi paradoxuri*. Aci se arată discuţiunile la care au dat loc întrebuinţarea neserioasă a Calculului Probabilităţilor la paradoxul de Saint-Petersburg, aplicarea la deciziunile judecătoreşti, problemele de probabilitatea cauzelor, probleme de probabilitate personală.

Cap. V tratează despre *Critica noţiunii de probabilitate*. Aci se discută obiecţiunile aduse de matematicieni, şi ale altor cugetători; chestiunea experienţei în probabilitate, aplicaţii la unele jocuri de noroc.

Cap. VI este intitulat: *Probabilităţile şi Infinitul*.

Introducerea de infinit în Calculul Probabilităţilor nu dă loc la dificultăţi mai mari ca în alte ramuri ale matematicilor; precum şi probabilităţile continui. Aci se ocupă de *numerele normale*, la care frecuenţa fiecăreia din cifre în scrierea zecimală este 0, 1, şi apoi cu probleme asupra acestor numere, din care unele în legătură cu probabilităţile.

Cap. VII *dă Concluziuni*. Aci se dau câteva observaţiuni istorice, probabilităţile ca auxiliare ştiinţei, practicei şi vieţii sociale.

Volumul are la fine mai multe *Note* asupra noţiunii de cauzalitate, asupra tratatului lui KEYNES *(A Treatise on Probability*, Londra 1921). Elogiul jocului sub formă de dialog, (apărut în *Mercure de France* 1937, pag. 75), asupra probabilităţilor universal neglijabile, numerele incomensurabile şi probabilitatea unui caz izolat. Nota VI intitulată: *Adevărul concret şi teoria probabilităţilor* este scrisă de GEORGES DARMOIS.

Broşura conţine lucruri interesante şi este plăcută la citire.

I. I.

JEAN VILLE. *Étude critique de la notion de collectif.* Monographies des probabilités, fascicule III. Paris 1939. Gauthiers-Villars. 75 frs.

După o critică sistematică a definiţiilor, autorul arată dificultăţile provenind din lipsa unei definiţii iniţiale corecte a probabilităţii şi arată că ea se poate obţine ca o limită în sensul analizei, a unei frecvenţe relative, cu ajutorul noţiunii de *colectiv,* care prezintă caracterele unui şir luat la întâmplare, definit şi studiat mai întâi de DE MISÈS şi completat de WALD.

Se aplică aceste noţiuni la studiul jocurilor de hazard, în deosebi consecinţe provenind din formula ruinii jucătorului.

Peste tot se urmăreşte grija autorului în ceea ce priveşte critica noţiunilor.

PAUL APPELL. *Analyse Mathématique à l'usage des candidats au certificat de mathématiques générales et aux grandes écoles. Ed. V.* Paris. Gauthier-Villars. Tome I 1937. Tome II 1938.

Prima ediţie, apărută în 1898, era desvoltarea cursului profesat de PAUL APPELL la „Ecole Centrale des Arts et Manufactures". Ediţia a patra a apărut în 1921.

Prezenta ediţie cuprinde două volume şi este integral refăcută de D-l GEORGES VALIRON, reprezentând cursul făcut candidaţilor la certificatul de matematici generale.

D-sa scrie în prefaţa primului volum:

„On s'est efforcé de faire des modifications en conservant, sinon le plan général de l'ouvrage, tout au moins son esprit. En particulier, ce livre n'est pas un traité, une encyclopédie, mais un cours dans lequel l'ordre des matières est déterminé par le souci d'aller du simple au composé".

Primele trei capitole expun elementele de geometrie analitică în plan şi spaţiu.

Capitolele IV — X se ocupă cu limite, funcţiuni de o variabilă, continuitate, derivate, integrale.

Capitolul X cuprinde funcţiunile de mai multe variabile cu aplicaţii imediate la suprafeţe şi curbe.

In capitolele XI şi XII se continuă aplicaţiile geometrice ale calculului diferenţial, evident dându-se numai elemente.

Capitolul XIII cuprinde integralele curbilinii, calculul ariilor şi volumelor.

Cu capitolul următor începe Volumul II. In acest cap. şi următorul se află ecuaţiile diferenţiale, tipuri simple.

Capitolul XVI dă câteva exemple de ecuaţii cu derivate parţiale. Cu capitolul XVII trecem în domeniul seriilor, iar capitolul XIX introduce numerele complexe. In fine, integralele duble şi triple fac obiectul ultimelor două capitole; iar două note finale se referă la integratoare, integrafe şi regula lui HOSPITAL.

C. IONESCU-BUJOR.

LOUIS BACHELIER. *Les nouvelles méthodes du calcul des probabilités.* Gauthier-Villars, Paris 1939. Este un expozeu, care rezumă în o broşură de 69 de pagini teorii foarte dezvoltate şi foarte subtile asupra probabilităţilor hiperasimptotice, cinematice şi dinamice. Broşura fiind un rezumat, nu mai

poate fi concentrată în spaţiul câtorva rânduri bibliografice fără a risca să i se falşifice sau să i se altereze conţinutul.

Totuşi pentru că autorul tratează problema probabilităţilor pe un plan mai puţin cunoscut, şi în orice caz nu prea accesibil, enumărăm capitolele principale ale broşurei.

Capitolul II. Probabilitatea hiperasimptotică de ordinul întâi. Formulele fundamentale ale acestui capitol conţin funcţii arbitrare de timp în locul funcţiilor Σ ale lui LAPLACE. Introducerea noţiunei de timp, prezintă avantaje pe care le-a dovedit şi experienţa. Formulele lui MOIVRE, POISSON, LAPLACE sunt, prin aproximaţie, cazuri particulare ale formulelor continue, pe când în probabilitatea hiperasimptotică de ordinul întâi aproximaţia consistă în a trece dela continuu la discontinuu, contrar procedeelor clasice. Variabila x, de spaţiu poate lua orice valoare în aceste probabilităţi.

Capitolul IV. Probabilităţile hiperasimptotice de gradul II, studiază cazul când variabila x, de spaţiu, este limitată într'un sens. Problemele care se studiază în acest capitol sunt de natura următoare:

1°. *Care este probabilitatea* $\Pi_{t,\,m}\,dt$ pentru *ca un jucător* A să fie ruinat după timpul t ştiind că ruina lui A se *produce* când a pierdut capitalul m.

2°. *Care-i* probabilitatea $P_{t,\,m}$ pentru ca *ruina să se producă* în t partizi.

Capitolul V. Probabilităţile hiperasimptotice de genul al treilea, tratează problema dela capitolul precedent pentru cazul când x este limitat în două sensuri.

Capitolul VI. Probabilităţile hiperasimptotice de mai multe variabile. Problema fundamentală de rezolvat în acest caz este de *a găsi probabilitatea pentru ca un jucător* A_1 *să piardă suma* x_1, A_2 *suma* x_2,... *jucătorul* A_{n-1} *suma* x_{n-1}, jucătorii trebuind să joace t partide.

Capitolul VII. Probabilităţile cinematice studiază deplasările unui sistem, deplasări care depind în total sau în parte de întâmplare.

Ne oprim aici cu înşirarea capitolelor broşurei, observând că contrar altor lucrări de probabilităţi autorul studiază probabilitatea ruinei, iar nu a câştigului în jocurile de noroc, ceea ce corespunde cu realitatea, numărul celor ce se ruinează copleşind cu mult pe al celor ce câştigă.

Studiul însă este foarte interesant în problemele de fabricaţie şi în problemele sociale şi-l recomandăm cu căldură după cum recomandăm toate lucrările acestui autor asupra calculului probabilităţilor.

Atragem în special atenţia militarilor asupra problemelor probabilităţilor în tragerile artileriei, care prin metodele şi rezultatele obţinute de acest autor se pot trata din puncte de vedere practice mai folositor decât metodele cunoscute.

Ca încheiere informez că lucrările D-lui L. BACHELIER sunt reluarea unor studii publicate de D-sa încă din 1901 prin diferite reviste de specialitate.

G-L GH. BUICLIU.

ST. BEZDECHI. *Un échantillon „d'Arithmetica Geometrica"*. Sub acest titlu D-l ST. BEZDECHI, profesor la Universitatea din Cluj, publică textul grec

şi în traducere franceză, o scrisoare inedită de conţinut matematic a filozofului bizantin NICEFOR GRÉGORAS (sec. XIV) adresată unei persoane necunoscute. Autorul scrisorii, voind să caracterizeze prietenia care-l lega de acest personaj, o aseamănă cu relaţia ce există între două numere consecutive şi patratele lor.

Se ştie, că PITAGORA reprezenta numerele nepereche sub forma unui *gnomon*, adică a unei figuri dreptunghiulare care adăugată la un dreptunghiu nu-i schimbă forma. Un număr nepereche se poate exprima atât ca suma a două numere consecutive cât şi ca diferenţa patratelor acestora. Plecând dela această proprietate, GRÉGORAS face unele consideraţii, — nu lipsite de naivitate, — asupra numerelor nepereche şi a celor patrate. Scrisoarea este un document istoric interesant, fiindcă arată pasiunea cu care căutau unii filosofi, — chiar după 18 veacuri dela PITAGORA, — proprietăţi miraculoase ale numerelor, făcând asupra lor tot felul de speculaţii, dintre care unele dacă ni se par copilăreşti, sunt destul de ingenioase.

Este meritul D-lui BEZDECHI de a fi scos la lumină acest document interesant pentru istoria matematicilor.

VICTOR MARIAN.

CERERI

286. Există termen românesc corespunzător, în afară de echivalentul său *«medie şi extremă raţie»* pentru *sectio aurea* (fr. *section d'or*, germ. *Goldene Schnitt*, engl. *golden section*)? In caz contrar, ar fi oare potrivit să spunem şi noi *«secţiunea de aur»*?

VICTOR MARIAN.

DIVERSE

In ziua de 1 Iulie D-l P. SERGESCU a făcut la *Palais de la Découverte* din Paris o Conferinţă despre *Matematicianii din timpul Revoluţiei Franceze.* (Anul acesta au loc serbări pentru a 150-a aniversare a Revoluţiei franceze).

Sporirea Bibliotecii.

P. PAINLEVÉ. Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

E. LOEFFLER. Ziffern und Ziffernsysteme der Kulturvölker in alter und neuer Zeit. Lipsca, 1912.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4203. *Să se găsească două numere de câte 3 cifre* abc *şi* $\alpha\beta\gamma$ *ştiind că atât patratele acestor numere cât şi acelea ale numerelor* $a\beta c$ *şi* $\alpha b\gamma$ *sunt patrate gemene.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l GH. CONSTANTINESCU.

Patratul unui număr de 3 cifre poate avea 5 sau 6 cifre. Deci soluţiile problemei se găsesc în grupele de patrate gemene de 5 sau de 6 cifre. Aceste patrate sunt date de D-l Prof. I. IONESCU în *Gazeta Matematică* Vol. XX, pag. 244 în articolul întitulat „*Patrate gemene*". Reţinând din acele patrate numai pe cele care rămân tot patrate gemene când se schimbă cifrele b şi β între ele, găsim următoarele 4 grupe de soluţii:

$$abc^2 = 145^2 = 21025 \quad ; \quad abc^2 = 225^2 = 50625$$
$$\alpha\beta\gamma^2 = 105^2 = 11025 \quad ; \quad \alpha\beta\gamma^2 = 175^2 = 30625$$
$$\ldots \quad \ldots \quad ; \quad \ldots$$
$$abc^2 = 275^2 = 75625 \quad ; \quad abc^2 = 825^2 = 680625$$
$$\alpha\beta\gamma^2 = 125^2 = 15625 \quad ; \quad \alpha\beta\gamma^2 = 425^2 = 180625.$$

PROBLEMA 4649. *Se dă o elipsă cu centrul în* O, *de axă mare* AA' *şi de axă mică* BB'. *Din* O *se duce o dreaptă oarecare* OU *care taie elipsa în* M *şi* M'. *In* M *se duce o paralelă* MX *cu* AA' *pe care se ia segmentul* $\overline{MP} = \overline{OM}$. *Să se determine locul geometric al punctului* P.

M. NICOLAU.

Generalizare. Să presupunem, mai general, că punctul $M(\alpha, \beta)$ descrie curba

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

şi se cere locul intersecţiei dreptei

$$y - \beta = 0 \tag{2}$$

cu cercul

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0 \tag{3}$$

cu centrul în M şi trecând prin originea O de coordonate. Eliminând pe α, β între (2), (3) şi

$$F(\alpha, \beta) = 0$$

se găseşte că locul punctelor P este curba de ecuaţie

$$\varphi(x, y) = F\left[\frac{x^2 - y^2}{2x}, y\right] = 0. \tag{4}$$

Cazuri particulare. 1°. M se mişcă pe cercul

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0. \tag{5}$$

Făcând în (5) transformarea (4) şi calculele necesare, se găseşte că P descrie cercurile

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 \pm 2Rx = 0 \tag{6}$$

de rază R şi cu centrele în A şi A', ceea ce se vede geometric imediat pe o figură.

2°. M se mişcă pe elipsa, (cazul problemei),

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{7}$$

Făcând substituţia (4) se obţine cuartica

$$b^2(x^2 - y^2)^2 + 4a^2x^2y^2 - 4a^2b^2x^2 = 0. \tag{8}$$

3°. M se mişcă pe hiperbola

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{9}$$

Ca la cazul precedent, locul este cuartica

$$b^2(x^2 - y^2)^2 - 4a^2x^2y^2 - 4a^2b^2x^2 = 0. \tag{10}$$

4°. M se mişcă pe parabola

$$y^2 - 2px = 0. \tag{11}$$

Locul lui P este în acest caz cubica

$$(x + p)y^2 = px^2. \tag{12}$$

Notă. 1) D-l M. D. Popa (Lic. militar Iaşi) a generalizat problema considerând că M se mişcă pe conica

$$Ax^2 + By^2 - 2Cx = k^2$$

şi a găsit ecuaţiile exacte pentru fiecare din cele 4 cazuri studiate la generalizarea precedentă.

D-sa a studiat foarte bine şi variaţiile funcţiilor y, date de ecuaţiile (8), (10) şi (12) şi a construit foarte exact curbele reprezentate prin aceste ecuaţii. Pentru interesul pe care-l prezintă formele acestor curbe le reproducem după desenele D-lui M. D. POPA.

Figura (1), curba (8):

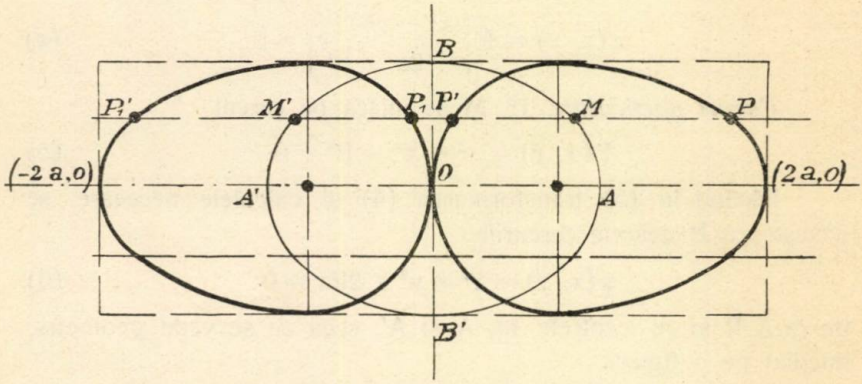


Fig. 1.

Figura (2), curba (10):

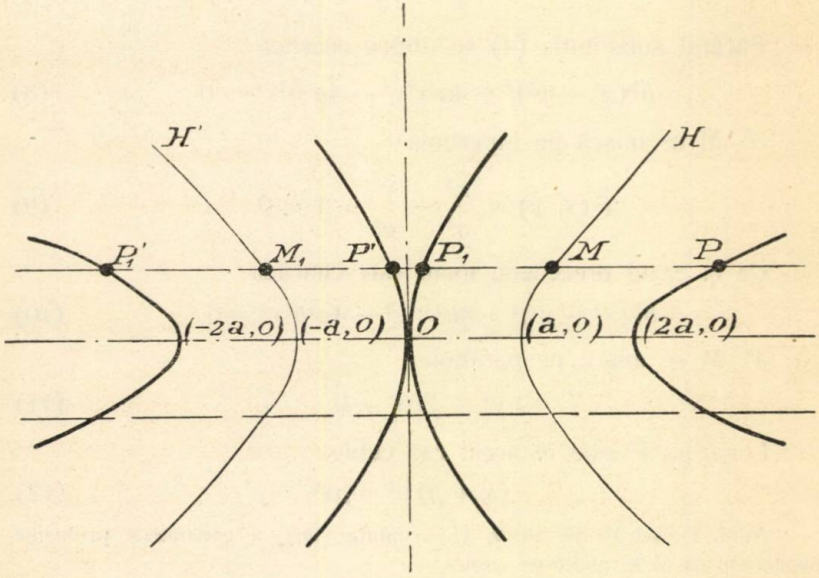


Fig. 2.

Curba este tangentă în origină la bisectoarele axelor.

Figura (3), curba (12):

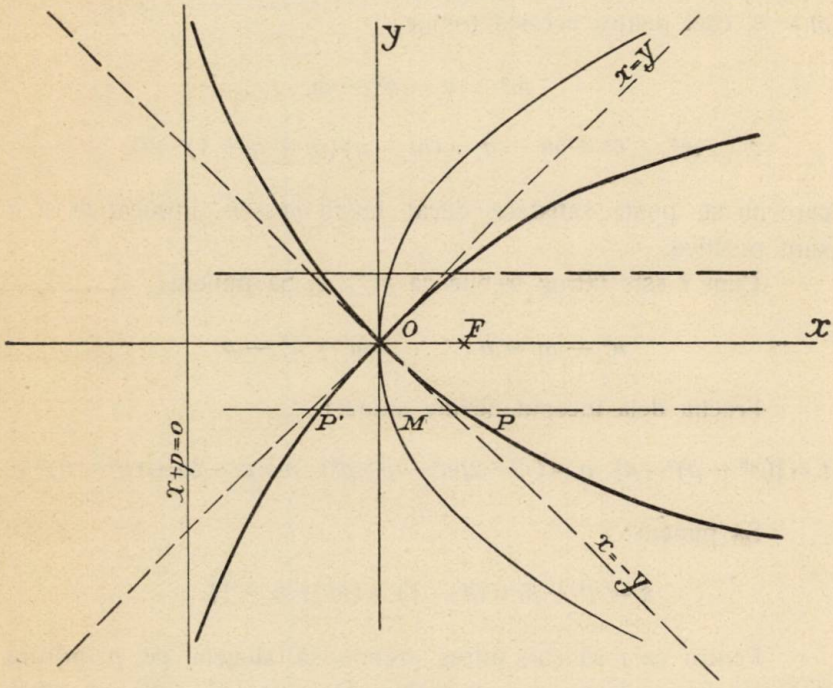


Fig. 3.

Pe fiecare din cele 3 figuri locul lui P este desenat prin linii îngroşate.

2) Au rezolvat bine problema pentru cazul particular al enunţului D-nii: GH. GH. CONSTANTINESCU, N. I. MILU, M. A. L. NEGREA, TR. PREDOESCU-ŢÂNŢĂRENI, J. SEGALL, T. ŞTEFAN şi I. I. ŢIŢEICA.

PROBLEMA 4831. *Fie numerele întregi* m *şi* n. *Când* (m^2-n) *se divide cu* (n^2-m)?

I. IONESCU.

Dacă t este un număr întreg, se cere să avem:

$$(m^2-n)/(n^2-m)=t.$$

Se vede imediat că dacă $m = n$ avem $t = 1$, care constituie o soluţiune a problemei. Reciproc, nu putem avea $t = 1$ decât dacă $m = n$, căci pentru aceasta trebue:

$$m^2 - n = n^2 - m,$$

$$\therefore \quad m^2 - n^2 + m - n = (m - n)(m + n + 1) = 0,$$

care nu se poate satisface decât luând $m = n$, întrucât m şi n sunt pozitive.

Cum t este întreg trebue ca $m > n$. Să punem:

$$n^2 - m = p, \quad \therefore \quad m = n^2 - p.$$

Fracţia dela început devine atunci:

$$t = [(n^2 - p)^2 - n] / p = (n^4 - 2pn^2 - n + p^2) / p = p - 2n + (n^4 - n) / p.$$

Să punem:

$$s = n^4 - n = (n - 1)\ n(n^2 + n + 1).$$

Pentru ca t să iasă întreg trebue să alegem pe p printre divizorii lui s. Cum $m > n$, trebue să avem $(n^2 - p) > n$, adică $p < n(n - 1)$. Deci divizorii de care vorbirăm nu trebue să depăşească această limită.

Calea de urmat este prin urmare următoarea:

Se ia pentru n un număr întreg oarecare. Se face produsul $(n - 1)\ n(n^2 + n + 1)$ care se descompune în factori primi şi îi căutăm divizorii inferiori lui $(n - 1)\ n$. Aceşti divizori îi scădem din n^2 şi găsim pe m. Dividem pe $(m^2 - n)$ prin divizorul corespondent şi găsim întregul t.

Să luăm un exemplu numeric. Fie $n = 8$.

Avem:

$$s = 7 . 8 . 73 = 2^3 . 7 . 73.$$

Putem lua $p = 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28$, la care corespund $m = 63, 62, 60, 57, 56, 50, 36$. Găsim apoi $t = 3961, 1918, 898, 463, 391, 178, 46$.

Dăm aci tabloul soluţiilor pentru $n \leqslant 10$.

n	s	p	m	t
2	2×7.	1	3	7
		2	2	1
3	$2 \times 3 \times 13$.	1	8	61
		2	7	23
		3	6	11
		6	3	1
4	$2^2 \times 3^2 \times 7$.	1	15	221
		2	14	96
		3	13	55
		4	12	35
		6	10	16
		7	9	11
		9	7	5
		12	4	1
5	$2^2 \times 5 \times 31$.	1	24	571
		2	23	262
		4	21	109
		5	20	79
		10	15	22
		20	5	1
6	$2 \times 3 \times 5 \times 43$.	1	35	1219
		2	34	775
		3	33	361
		5	31	191
		6	30	149
		10	26	67
		15	21	29
		30	6	1
7	$2 \times 3^2 \times 7 \times 19$.	1	48	2297
		2	47	1101
		3	46	703
		6	43	307
		7	42	251
		9	40	177
		14	35	87
		18	31	59
		19	30	47
		21	28	37
		38	11	3
		42	7	1
8	$2^3 \times 7 \times 73$.	1	63	3961
		2	62	1918
		4	60	898
		7	57	463
		8	56	391
		14	50	178
		28	36	46
		56	8	1
9	$2^3 \times 3^2 \times 7 \times 13$.	1	80	6391
		2	79	3116
		3	78	2025
		4	77	1480
		6	75	936
		7	74	781
		8	73	665
		9	72	575
		12	69	396
		13	68	355
		14	67	320
		18	63	220
		21	60	171
		24	57	135
		26	55	116
		28	53	100
		36	45	56
		39	42	45
		42	39	36
		52	29	16
		56	25	11
		72	9	1
10	$2 \times 3^2 \times 5 \times 37$	1	99	9791
		2	98	4797
		3	97	3133
		5	95	1803
		6	94	1471
		9	91	919
		10	90	809
		15	85	481
		18	82	373
		27	73	197
		30	70	163
		37	63	107
		45	55	67
		54	46	39
		74	26	9
		90	10	1

Putem da şi câteva formule generale pentru a găsi soluţii. Astfel, din expresiunea lui s se vede că printre divizorii lui putem lua totdeauna pe 1, pe $(n-1)$ şi pe n. Apoi s se divide totdeauna cu 2 căci el conţine doi factori consecutivi $(n-1)$ şi n dintre cari unul este neapărat pereche

De aci ies următoarele soluţii:

$$p = 1 \quad , \quad m = n^2 - 1 \quad , \quad t = m.$$

$$p = 2 \quad , \quad m = n^2 - 2 \quad , \quad t = \tfrac{1}{2}(n^4 - 2n^2 - n + 4).$$

$$p = n-1 \quad , \quad m = n^2 - n + 1 \quad , \quad t = n^3 - n^2 + 2n - 1.$$

$$p = n \quad , \quad m = n^2 - n \quad , \quad t = n^3 - 2n^2 + n - 1.$$

Cum se vede problema are un număr nelimitat de soluţii.

I. I.

La această problemă s'au primit 8 soluţiuni foarte sumare care denotă cunoştinţe foarte slabe de aritmetică teoretică la liceenii noştri şi chiar la studenţi. Astfel, unii au făcut algebriceşte împărţirea lui $(m^2 - n)$ prin $(n^2 - m)$, au pus condiţia ca restul să fie nul şi au găsit că singurele soluţii sunt $n = 0$ şi $n = 1$!! Alţii au dat pentru m şi n expresiuni algebrice fără a se preocupa dacă ele se reduc la numere întregi. Alţii au presupus dela început că trebue ca m să fie multiplu de n, etc., etc. E bine ca aceia care au încercat problema să compare ceea ce au făcut cu soluţia de mai sus, în care se arată că problema are o infinitate de soluţii şi că ele se pot găsi prin cele mai elementare cunoştinţe de aritmetică şi algebră.

I. I.

PROBLEMA 4842. *In plan, fie* O *un punct situat pe dreapta* Δ, M *un punct pe o curbă* (C); *perpendiculara dusă pe* OM *din punctul în care tangenta în* M *taie pe* Δ, *întâlneşte paralela dusă prin* O *normalei în* M *într'un punct* N. *Curbele* (C) *pentru care* $\overline{NM} = k$ *(constant) sunt cercuri având centrul pe perpendiculara ridicată în* O *pe* Δ, *la distanţa* k *de* Δ.

C. IONESCU-BUJOR.

1°. *Soluţie* geometrică dată de D-nii: DIMITRIE MAVRODIN (student), DUMITRU I. CIOC (Lic. Militar Craiova), ADOLF DEUTSCH şi O. SACTER:

Să notăm P punctul unde normala în M la curba (C) taie perpendiculara ridicată în O pe Δ şi T punctul unde tangenta în M întâlneşte Δ. In triunghiul OMT, dreptele TN şi ON sunt înălţimi, deci N este ortocentru. Rezultă că MN este paralelă cu OP, iar patrulaterul ONMP este paralelogram.

Deci:

$$\overline{OP} = \overline{MN} = k$$

adică normalele curbelor (C) trec prin punctul fix P. Curbele (C) sunt cercuri cu centrul în P.

2°. *Soluţie* analitică dată de D-nii: DIMITRIE MAVRODIN (student), DUMITRU I. CIOC (Lic. Militar Craiova), ADOLF DEUTSCH, G. G. CONSTANTINESCU, MIRCEA A. NEGREA (Brăila), DUMITRU RIPIANU, NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU, (Lic. Militar N. Filipescu), ADOLF O. ŞAICHIN (Lic. Matei Basarab), EUGEN MARCOVICI (student Iaşi), IACOB GOLDBERG (Lic. Matei Basarab) şi CONST. SĂNDULACHE (Bacău).

Luăm drept axe Ox, Oy dreapta Δ şi perpendiculara ei ridicată în O. $y = f(x)$ fiind ecuaţia curbei, iar

$$M(x, y) \quad , \quad (ON) \equiv Y = -\frac{1}{y'} X.$$

Dar N fiind ortocentrul triunghiului OMT, are abscisa x, iar ordonata, obţinută din (ON) este $-\frac{x}{y'}$.

Deci:

$$\overline{NM} = y + \frac{x}{y'} = k$$

sau:

$$yy' + x - ky' = 0.$$

Intregând, obţinem:

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - ky + c = 0$$

sau:

$$y^2 + x^2 - 2ky + 2c = 0,$$

Aceasta reprezintă (c fiind parametrul variabil), cercuri cu centrul în punctul $P(o, k)$, adică în punctul P situat pe perpendiculara ridicată în O pe Δ, la distanţa k de Δ.

C. I. B.

PROBLEMA 4876 [1]). *Să se rezolve sistemul de ecuații:*

$$xy + xz + yz = 14$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz = 105$$

$$xy\,(x + y) + yz\,(y + z) + xz\,(z + x) + 3xyz = 98.$$

ION CURCHI.

Soluție dată de D-rele: MIOARA I. CRĂCIUNESCU (studentă), ANA C. GEREANU (studentă), GEORGETA ROMAȘCAN (Lic. Marica Brâncoveanu), VENERA V. TĂNĂSESCU (studentă București) și D-nii: D. BUZNEA (Lic. N. Filipescu), CĂLIN IOAN C. DIMITRIU (elev inginer București), I. D. DIACONESCU (Liceul Traian T.-Severin), S-LT M. GRUMĂZESCU, I. V. JAREGHIE (Liceul militar Iași), O. MĂRCULESCU, EUGEN MARCOVICI (student Iași), D. MAVRODIN, DINU T. MIRONESCU (Liceul militar Iași), EMIL S. MODÂLCĂ (Lic. Traian T.-Severin), MIRCEA A. NEGREA (Brăila), CONSTANTIN V. PANTELIMON (Lic. militar Iași), M. D. POPA (Liceul militar Iași), TR. PREDOIESCU-ȚÂNȚĂRENI, IONEL I. STAMATE (Lic. C. Brediceanu Lugoj), IOAN STREDER (Liceul militar Iași), I. I. ȚIȚEICA (student), SANDU R. TURCU (Liceul militar Iași).

Ecuația a treia se mai scrie:

$$(x + y + z)\,(xy + xz + yz) = 98$$

și cum

$$xy + xz + yz = 14$$

rezultă:

$$x + y + z = 7.$$

Adunând a doua ecuație cu a treia multiplicată cu 3 și restrângând cubul, avem:

$$(x + y + z)^3 + 7xyz = 399$$

de unde,

$$xyz = 8.$$

Sistemul propus este echivalent cu următorul

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ xy + xz + yz = 14 \\ xyz = 8. \end{cases} \qquad (1)$$

---

1) Enunț rectificat.

Considerând pe x, y, z ca rădăcini ale unei ecuaţii de gradul III, putem forma acea ecuaţie

$$u^3 - 7u^2 + 14u - 8 = 0.$$

Membrul I al ecuaţiei se scrie succesiv

$$(u^3 - 8) - 7u(u - 2) = (u - 2)(u^2 + 2u + 4 - 7u)$$

$$= (u - 2)(u - 1)(u - 4).$$

Rădăcinile ecuaţiei sunt deci: 1, 2, 4, iar sistemul propus are soluţia

$$x = 1 \ , \ y = 2 \ , \ z = 4$$

sau orice altă soluţie obţinută permutând x, y, z între ei, deoarece sistemul este simetric faţă cu x, y, z.

Au mai soluţionat problema D-nii: MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU (elev inginer, student), N. G. APOSTOL (Lic. militar Cernăuţi), DAN M. ANASTASIU (Lic. militar N. Filipescu), MIHAIL M. ANASTASIU (Lic. militar N. Filipescu), HORIA ST. CIUPAG (Lic. militar Craiova), MARCEL DIACONESCU (Lic. militar N. Filipescu), GH. M. DUMITRESCU (Lic. Mihai Viteazul Bucureşti), STELIAN D. IONESCU (Lic. milltar Cernăuţi), S-LT. GRIG. MARTEŞ, DORIN OBREJA, C. PASCARU (Lic. militar Iaşi), ION PASCARU (Lic. militar Iaşi), OCTAVIAN G. RĂDULESCU (Lic. N. Filipescu), ADOLF O. ŞAICHIN (Lic. Matei Basarab Bucureşti), NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU (Lic. militar N. Filipescu), ŞTEFAN C. TILICĂ (Lic. Traian T.-Severin), MIREL D. STOENESCU (Lic. militar N. Filipescu), DORIN N. THEODORESCU (Lic. militar N. Filipescu).

Soluţii mai desvoltate dela D-nii: GH. DECIULESCU (Târgovişte), IACOB GOLDBERG (Lic. Matei Basarab), LUPU I. GRUIA (Lic. militar Craiova), N. V. NEDELCU (Lic. militar Cernăuţi), AL. N. POPESCU-ZORICA (Bucureşti).

Observare. Domnul ION STREDER observă că sistemul (1) este rezolvat în G. M. Anul XLI, pag. 310.

C. I. B.

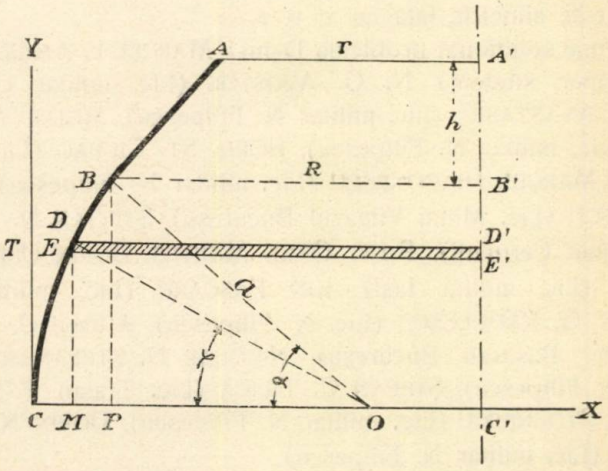
PROBLEMA 4963. *Se cere volumul unui butoiu în care doagele simetrice sunt rectilinii către capete şi racordate către mijloc printr'un arc de cerc sau de parabolă.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l IOAN STREDER (Liceul Militar, Iaşi).

Butoiul este un solid de rotaţie. Să considerăm o jumătate din butoiu până la vrană şi fie ABC o jumătate de meridian. Porţiunea AB este dreaptă şi BC curbă. Fie $2r$ diametrul lui la fund, 2R în dreptul punctului de separaţie B. Perpendicularele duse din A, B, C pe axa butoiului o întâlnesc în A', B', C'. Fie $h = A'B'$. Porţiunea din butoiu AA'BB' este un trunchiu de con al cărui volum V_1 este dat de formula:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi (R^2 + r^2 + Rr)\, h.$$



Pentru găsirea volumului părţii corespunzătoare racordărilor vom deosebi două cazuri.

Cazul I. *Curba* BC *este un arc de cerc.*

Fie O centrul acestui arc, a raza lui, α unghiul BOC. Să tăiem din butoiu o porţiune infinit de subţire DD'EE' prin două plane perpendiculare pe axa butoiului, şi fie φ unghiul DOB. Raza DD' o putem găsi adăogând la BB' proiecţiunea MP a lui BD pe CC' care are ca expresiune $a(\cos\varphi - \cos\alpha)$. Deci:

$$DD' = R + a(\cos\varphi - \cos\alpha) = (R - a\cos\alpha) + a\cos\varphi.$$

Punem pentru prescurtare:

$$b = R - a\cos\alpha,$$

$$\therefore \quad DD' = b + a\cos\varphi.$$

Grosimea stratului DD'EE' se obţine proiectând DE pe axa butoiului. Distanţa dintre plane fiind infinit mică putem confunda coarda cu arcul DE care are lungimea ($a\,d\varphi$). Elementul DE face cu axa unghiul φ şi deci grosimea stratului elementar DD'EE' va fi ($a\cos\varphi\,d\varphi$). Dacă V_2 este volumul porţiunii BB'CC' vom avea:

$$V_2 = \int_0^{\alpha} \pi (b + a\cos\varphi)^2\, a\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$V_2 = \pi a \int_0^{\alpha} (b^2\cos\varphi + 2ab\cos^2\varphi + a^2\cos^3\varphi)\, d\varphi,$$

$$V_2 = \pi a\,(b^2\sin\alpha + ab\alpha + \tfrac{1}{2}\,ab\sin 2\alpha + \tfrac{1}{4}\,3a^2\sin\alpha + \tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{4}\,a^2\sin 3\alpha).$$

Cazul II. *Curba* BC *este un arc de parabolă.*

Fie p parametrul parabolei, CO axa ei, CT tangenta la vârf. Ecuaţia parabolei, raportată la axele COX şi CTY, este:

$$y^2 = 2px.$$

Luăm şi aci stratul infinitezimal DD'EE'. Fie c ordonata BP a lui B. Abscisa CP a lui B va fi $(c^2/2p)$ şi prin urmare

$$DD' = R + (c^2/2p) - x = d - x,$$

unde am pus pentru prescurtare $CC' = d$.

Pentru a găsi grosimea DE a stratului, diferenţiem ecuaţia parabolei şi avem:

$$2y\,dy = 2p\,dx,$$

$$\therefore \quad dy = dx/y = dx/\sqrt{2px}.$$

Avem dar:

$$V_2 = \int_0^{c^2/2p} \pi (d - x)^2 . p\,dx/\sqrt{2px},$$

$$V_2 = (\pi/\sqrt{2p}) \int_0^{c^2/2p} [(d^2/\sqrt{x}) - 2d\sqrt{x} + x\sqrt{x}]\, dx,$$

$$V_2 = (\pi/\sqrt{2p}) \,|\, 2d^2\sqrt{x} - \tfrac{1}{3}.4dx\sqrt{x} + (2x^2\sqrt{x}/5) \,|_0^{c^2/2p}$$

$$V_2 = (\pi/\sqrt{2p})\,[(2d^2c/\sqrt{2p}) - \tfrac{1}{3}.4dc^3/(2p\sqrt{2p}) + \tfrac{1}{3}.2(c^5/4p^2\sqrt{2p})]$$

$$V_2 = (\pi c/2p).[(12d^2p^2 - 4dc^2p + c^4)/6p^2)]$$

$$V_2 = \pi c\,(12d^2p^2 - 4dc^2p + c^4)/12p^3.$$

Dacă acum V este volumul butoiului vom lua

$$V = 2(V_1 + V_2)$$

unde V_2 e valoarea dela cazul I sau II după cum, racordarea este circulară sau parabolică.

Notă. Rezolvitorul încheie astfel soluția:
„E ultima problemă trimisă de pe băncile Liceului Militar!".

PROBLEMA 4966. *In triunghiul* ABC *fie* O *centrul cercului circumscris,* O_9 *centrul cercului celor nouă puncte,* A'B'C' *triunghiul ortic,* $A_1B_1C_1$ *triunghiul complementar și* $A_2B_2C_2$ *triunghiul ortic al triunghiului complementar. Fie* A_3 *intersecția perpendicularei coborîte din* A *pe dreapta* OA_2 *cu perpendiculara coborîtă din* A' *pe dreapta* O_9A_2. *La fel obținem* B_3, C_3. *Să se arate că punctele* A_3, B_3, C_3 *sunt în linie dreaptă.*

TH. G. COCEA.

Soluție dată de D-l VICTOR L. FLORESCU (Liceul militar N. Filipescu):

Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt omotetice. Deorece A', A_2 și O, O_9 sunt perechi de puncte corespunzătoare în omotetie, dreptele A'O și A_2O_9 sunt paralele și deci $A'A_3$ este perpendiculară pe OA'.

„Perpendicularele ridicate din picioarele înălțimilor unui triunghiu pe dreptele care le unesc cu centrul cercului circumscris întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului anticomplementar în trei puncte colineare".

Pentru demonstrare observăm că triunghiurile $A'A_1O$, $AA'A_3$ sunt asemenea. Deci

$$\overline{AA_3} = \frac{\overline{A_1O} \cdot \overline{AA'}}{\overline{A'A_1}}$$

și cum:

$$\overline{A_1O} = R\cos A \quad , \quad \overline{AA'} = \frac{bc\sin A}{a} \quad , \quad \overline{A'A_1} = \frac{a}{2} - c\cos B,$$

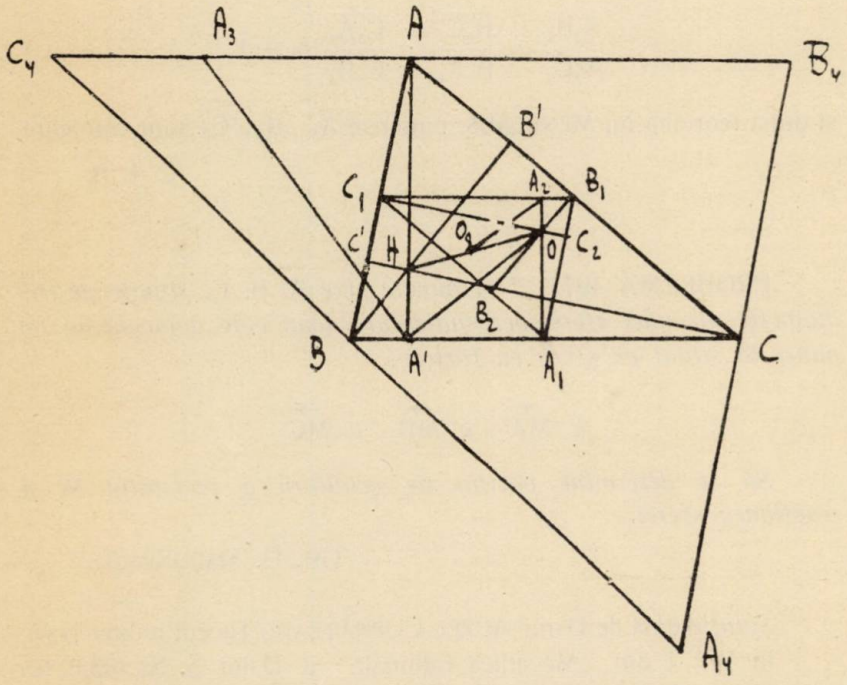
$$\overline{AA_3} = \frac{bc\,R\cos A\sin A}{a\left(\frac{a}{2} - c\cos A\right)}.$$

Dar :

$$R \sin A = \frac{a}{2} \quad \text{şi} \quad 2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2;$$

deci:

$$\overline{AA_3} = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2(b^2 - c^2)}.$$



Cum A_3 se află pe latura B_4C_4 a triunghiului anticomplementar, avem :

$$\frac{\overline{A_3B_4}}{\overline{A_3C_4}} = \frac{a + \overline{AA_3}}{a - \overline{AA_3}} = \frac{3b^2 - a^2 - c^2}{a^2 + b^2 - c^2}$$

sau :

$$\left| \frac{\overline{A_3B_4}}{\overline{A_3C_4}} \right| = \left| \frac{3b^2 - a^2 - c^2}{3c^2 - a^2 - b^2} \right|.$$

Analog se obţine :

$$\left| \frac{\overline{B_3C_4}}{\overline{B_3A_4}} \right| = \left| \frac{3c^2 - b^2 - a^2}{3a^2 - c^2 - b^2} \right|, \quad \left| \frac{\overline{C_3A_4}}{\overline{C_3B_4}} \right| = \left| \frac{3a^2 - c^2 - b^2}{3b^2 - a^2 - c^2} \right|.$$

De unde:

$$\left| \frac{\overline{A_3B_4}}{\overline{A_3C_4}} \cdot \frac{\overline{B_3C_4}}{\overline{B_3A_4}} \cdot \frac{\overline{C_3A_4}}{\overline{C_3B_4}} \right| = 1.$$

Ţinând seamă că A_3 şi B_3 se găsesc pe laturile $\overline{B_4C_4}$, $\overline{A_4C_4}$ şi C_3 pe prelungirea lui $\overline{A_4B_4}$, rezultă:

$$\frac{\overline{A_3B_4}}{\overline{A_3C_4}} \cdot \frac{\overline{B_3C_4}}{\overline{B_3A_4}} \cdot \frac{\overline{C_3A_4}}{\overline{C_3B_4}} = +1$$

şi după teorema lui MENELAUS, punctele A_3, B_3, C_3 sunt colineare.

C. I. B.

PROBLEMA 4971. *Trei puncte fixe* A, B, C, *situate pe trei diametre ale unei sfere, perpendiculare două câte două, atrag un punct* M *situat pe sferă cu forţele:*

$$k \cdot \vec{MA} \ , \ k \cdot \vec{MB} \ , \ k \cdot \vec{MC}.$$

Să se determine poziţia de echilibru a punctului M *şi reacţiunea sferei.*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de D-nul AUREL CORNĂŢEANU (liceul militar Iaşi).

In Vol. I din „Mecanica raţională" a D-lui S. SANIELEVICI se arată că dacă un punct M este acţionat de mai multe puncte fixe A_1, A_2... cu forţele

$$k_1 \cdot \vec{MA_1} \ , \ k_2 \cdot \vec{MA_2} \ldots \text{ etc.}$$

atunci acţiunea rezultantă este ca şi cum punctul M ar fi acţionat de un punct P având coordonatele:

$$x = \frac{\Sigma k_i x_i}{\Sigma k_i}; \text{ etc.}$$

şi cu o forţă:

$$\vec{F} = (k_1 + k_2 + \ldots k_n) \vec{MP}.$$

Pentru cazul a trei puncte A, B, C, punctul P are coordonatele ($k_1 = k_2 = k_3 = k$):

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \; ; \; z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

adică este centrul de greutate al triunghiului ABC, ceea ce se poate demonstra şi elementar.

Pentru ca M să fie în echilibru pe sferă, trebue ca forţa să fie normală sferei, adică punctul să se găsească pe diametrul ce trece prin P. Acesta întâlneşte sfera în două puncte M_1 şi M_2, deci există *totdeauna* două poziţii de echilibru şi anume: în punctul cel mai apropiat de P echilibru *stabil*, în cel diametral opus, echilibru *nestabil*.

Reacţiunea sferei va fi opusă forţei rezultante deci:

$$N_1 = 3k\overrightarrow{M_1P} \quad \text{şi} \quad N_2 = 3k.\overrightarrow{M_2P}.$$

Expunerea de mai sus nu presupune nici o particularizare a punctelor A, B, C, deci ele pot fi aşezate oricum.

In cazul enunţului putem alege diametrii perpendiculari drept axe şi atunci $A(a, o, o)$; $B(o, b, o)$; $C(o, o, c)$, iar raza sferei fiind r avem:

$$M_1\left(\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \text{ etc.}\right); \; M_2\left(\frac{-ar}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \text{etc.}\right)$$

şi

$$R_1 = k\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2} - 3r\right) \quad ; \quad R_2 = k\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2} + 3r\right).$$

PROBLEMA 5007. *Să se arate că dreapta care uneşte ortopolurile a doi diametrii perpendiculari între ei ai cercului circumscris triunghiului în raport cu care luăm aceste ortopoluri trece prin centrul cercului celor nouă puncte al aceluiaşi triunghiu.*

TH. G. COCEA.

Soluţie dată de D-nii: MIRCEA D. POPA (Liceul militar, Iaşi), MARCEL N. ROŞCULEŢ, SERGIU LEIBOVICI (Liceul M. Eminescu, Bucureşti) şi ALEXANDRU I. ROHR (Liceul militar, Iaşi).

Fiind dat un triunghiu ABC şi o dreaptă Δ, dacă se proiectează vârfurile triunghiului ABC în A_1, B_1, C_1 pe Δ, perpendicularele duse din A_1, B_1, C_1 respectiv pe BC, CA, AB concură într'un punct numit ortopolul dreptei Δ în raport cu triunghiul ABC [1]).

Se ştie [2]) că „ortopolul unui diametru al cercului circumscris se găseşte pe cercul lui EULER", deci ortopolurile celor doi diametrii ai problemei se află pe cercul lui EULER. Rămâne să arătăm că sunt două puncte diametral opuse.

Dar dreptele lui SIMSON ale celor două ortopoluri, luate în raport cu triunghiul median sunt paralele cu cei doi diametrii, deci rectangulare [3]) şi cum dreptele lui SIMSON în raport cu triunghiul de referinţă a două puncte M, N fac între ele un unghiu a cărui măsură este jumătatea arcului MN [4]), rezultă că ortopolurile considerate trebue să fie diametral opuse.

Observări. 1°. Cele două drepte ale lui SIMSON considerate se întâlnesc într'un punct P situat pe cercul lui EULER al triunghiului median.

2°. Dacă M şi N sunt punctele în care cele două drepte ale lui SIMSON întâlnesc diametrul determinat de cele două ortopoluri, cercul descris pe MN ca diametru este tangent cercului lui EULER al triunghiului median In punctul P.

3°. Tangenta în punctul P la cercul lui EULER al triunghiului median şi axa ortică a triunghiului median sunt concurente într'un punct a cărui proiecţie pe MN este centrul unui cerc (C) ortogonal cercului lui EULER al triunghiului de referinţă şi cercului de diametru MN.

4°. Cele două ortopoluri şi puncte M, N sunt perechi de puncte corespunzătoare într'o involuţie cu puncte duble punctele (C, MN).

C. I. B.

---

1) G. ŢIŢEICA. Culegere de probleme de Geometrie. Probl. V, 47.

2) TRAJAN LALESCO: La géométrie du triangle 2.28.

3) TR. LALESCO. La géométrie du triangle 2.30.

4) G. ŢIŢEICA. Culegere de probleme de geometrie V, 32 şi TR. LALESCO. La géométrie du triangle 2.6.

PROBLEMA 5015. *Să se găsească un număr prim de patru cifre, căruia adăugându-i o unitate să se obție un alt număr care, considerat în sistemul octoval, să fie patrat perfect.*

VIRGIL GHIȚESCU.

Ecuația problemei este :

$$P + 1 = Q.$$

Considerăm deocamdată în această ecuație și pe Q în sistemul zecimal, vom impune apoi lui Q condițiile de a fi ca formă un număr în sistemul octoval și patrat perfect în acest sistem.

Q are tot patru cifre deoarece $P < 9999$. P se termină în 1, 3, 7 sau 9; deci Q se termină în 2, 4, 8 sau 0. Considerând acum pe Q în sistemul octoval, eliminăm terminațiunea 8. Deasemenea eliminăm și terminațiunea 2 întrucât în sistemul octoval patratele se termină cu 0, 1, 4. Au rămas pentru Q doar terminațiunile 0 și 4.

1°. *Terminațiunea 0.* Q are valorile :

$$1100 = 30^2$$
$$2000 = 40^2$$
$$3100 = 50^2$$
$$4400 = 60^2$$
$$6100 = 70^2.$$

Rezultă că P poate fi 1099, 1199, 3099, 4399, 6099; însă nici unul dintre acestea nu este prim.

2°. *Terminațiunea 4.* $Q_8 = a^2$ se termină cu 4.

Considerând expresiunea

$$P = Q - 1 = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1),$$

valoarea acestei în sistemul zecimal sau octoval este un număr terminat cu 3. Privind pe Q în sistemul octoval conchidem că $a - 1$ se termină cu 1 sau 5 și respectiv, $a + 1$, se termină cu 3 sau 7.

Pe dealtă parte avem :

$$1000 \leqslant a^2 \leqslant 7777$$
$$26 \leqslant a \leqslant 77$$
$$25 \times 27 \leqslant (a - 1)(a + 1) \leqslant 76 \times 100.$$

Avem:

$25 \times 27 = 743$ (cu trei cifre). Efectuăm mai departe produsele:

$$\left.\begin{array}{l} 31 \times 33 = 1243 \\ 35 \times 37 = 1603 \end{array}\right\} \text{dif. } 340$$

$$\left.\begin{array}{l} 41 \times 43 = 2203 \\ 45 \times 47 = 2643 \end{array}\right\} \text{dif. } 400$$

$$\left.\begin{array}{l} 51 \times 53 = 3343 \\ 55 \times 57 = 4103 \\ 61 \times 63 = 4703 \\ 65 \times 67 = 5543 \\ 71 \times 73 = 6443 \\ 75 \times 77 = 7403 \end{array}\right\} \text{dif. } 440$$

$$\text{dif. } 740.$$

Observăm că nu este necesar a calcula în parte valoarea fiecărui produs deoarece diferenţele dintre ele formează o progresie aritmetică cu raţia 40, primul termen fiind 340. Va trebui să efectuăm doar produsul $31 \times 33 = 1243$, iar la acest rezultat vom adăuga succesiv numerele 340, 400, 440, etc.

Dintre cele zece numere, numai 2203, 3343 şi 4703 sunt soluţii ale problemei, fiind numere prime.

Avem deci trei soluţii:

$$P = 2203;\ 3343;\ 4703.$$

A rezolvat foarte bine problema găsind toate trei soluţiile D-l H. REISCHER (Lic. Int. Iaşi).

D-l S-LT. M. GRUMĂZESCU a găsit doar soluţia 4703.

D-l M. VASILESCU-STABU ne-a trimes două rânduri de rezolvări, deducând din ambele că problema nu are nici o soluţie. Greşeala D-sale provine din faptul că consideră egale numerele $P + 1$ şi Q_8. Acestea însă, deşi formal identice, fiind în baze diferite, au şi valori diferite. Propriu-zis, D-sa a rezolvat exerciţiul:

Să se găsească un număr prim căruia adăugându-i o unitate să obţinem ca valoare un patrat perfect, cu soluţia $P = 3$.

Problema 5015 constitue o aplicaţie la efectuări din cele şase operaţiuni în sistemul octoval.

V. GH.

PROBLEMA 5041. *Să se demonstreze că rădăcinile ecuației:*

$$\frac{a\cos 3x+(b-a)\cos 2x+(2a+c)\cos x-(2a+b+c)}{2a\cos 2x+2(a+b)\cos x+3a+2b+c}=\sin^8\frac{x}{2}-\cos^8\frac{x}{2}+1$$

sunt independente de a, b, c. G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-nii: M. GRUMĂZESCU (S-Locot.), M. D. POPA, AL. I. ROHR, V. GH. BÂRZU, I. I. PASCARU, I. V. JAREGHIE (Lic. militar, Iași), M. AL. VASILESCU-STABU (Lic. „Gh. Lazăr", București), I. I. STAMATE (Student, Cluj), H. M. BODNĂRESCU (Lic. „Titu Maiorescu", București), AD. O. ȘAICHIN (Elev inginer, București).

Membrul întâi al ecuației se scrie succesiv, după ce se înlocuește $\cos 3x$ și $\cos 2x$ în funcție de $\cos x$:

$$\frac{a(4\cos^3x-3\cos x)+(b-a)(2\cos^2x-1)+(2a+c)\cos x-2a-b-c}{4a\cos^2x+2(a+b)\cos x+a+2b+c}=$$

$$\frac{4a\cos^3x+2(b-a)\cos^2x+(c-a)\cos x-a-2b-c}{4a\cos^2x+2(a+b)\cos x+a+2b+c}=$$

$$\frac{(\cos x-1)[4a\cos^2x+2(a+b)\cos x+a+2b+c]}{4a\cos^2x+2(a+b)\cos x+a+2b+c}=\cos x-1.$$

Deci ecuația din enunț se reduce la

$$\cos x-1=\sin^8\frac{x}{2}-\cos^8\frac{x}{2}+1 \qquad (1)$$

care este independentă de a, b, c.

Rădăcinile ecuației (1) se găsesc cu ușurință. Se observă că

$$\sin^8\frac{x}{2}-\cos^8\frac{x}{2}=\left(\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}\right)\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)$$

$$\left(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}\right)=\frac{-\cos x(2-\sin^2x)}{2}=\frac{-\cos x(1+\cos^2x)}{2}$$

așa că în definitiv (1) devine

$$\cos^3x+3\cos x-4=0$$

$$\therefore\quad(\cos x-1)(\cos^2x+\cos x+4)=0 \qquad (2)$$

care are o rădăcină reală

$$x=2k\pi$$

și două rădăcini imaginare

D-l D. RIPIANU a rezolvat foarte bine problema căutând derivatele parțiale ale membrului I față de a, b, c și observând că ele sunt indentic nule, deci membrul I variază numai cu x nu și cu a, b, c. Dând lui a, b, c valorile particulare 0, 0, 1 se găsește tocmai ecuația (2).

EXERCIȚII

30. Să se arate că triunghiurile în care există relația:

$$2c \sin^2 \frac{A}{2} = a \sin C$$

sunt triunghiuri dreptunghice.

IULIAN ALEXIU.

R. Se fac înlocuirile:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

Se obține:

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)}$$

$$\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{\sqrt{p(p-a)}} = 1$$

sau:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$$

de unde rezultă:

$$\frac{A}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{sau} \quad A = \frac{\pi}{2}.$$

31. Vârfurile unui triunghiu ABC se proiectează în A_1, B_1, C_1 pe o transversală. Notăm A', B', C' respectiv mijloacele segmentelor B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 și A'', B'', C'' puncte situate respectiv pe AA_1, BB_1, CC_1. Perpendicularele din A', B', C' pe B''C'', C''A'', A''B'' sunt concurente.

C. IONESCU-BUJOR.

R. A', B', C' sunt proiecțiile vârfurilor complementarului triunghiului A''B''C''. Cum laturile acestor două triunghiuri sunt paralele, perpendicularele din A', B', C' pe B C'', C''A'', A''B'' concură în ortopolul transversalei date față de complementarul triunghiului A''B''C''.

PROBLEME PROPUSE

5164. La un număr de două cifre scrim odată o cifră înainte şi apoi a doua oară o cifră în urmă. In ce caz unul din numerele formate este multiplu al celuilalt?

I. IONESCU.

5165. La alegerea pentru Camera Deputaţilor se prezintă c candidaţi, pentru l locuri de deputat. Numărul alegătorile este a. Fiecare alegător votează l candidaţi. Sunt proclamaţi aleşi primii l candidaţi în ordinea numărului de voturi obţinute. Candidaţii care au obţinut acelaşi număr de voturi sunt traşi la sorţi.

Să se găsească cel mai mare număr de voturi pe care-l poate obţine un candidat, fără a putea fi ales nici chiar prin tragere la sorţi.

N. V. K.

5166. Să se examineze dacă numărul

$$N = 4000! + 1$$

este divizibil cu *4001*.

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

5167. Să se găsească două numere N şi N', de două cifre şi inverse, ale căror patrate sau cuburi să fie tot inverse.

OCTAVIAN GH RĂDULESCU.

5168. Se dă un patrulater ABCD, ale cărui diagonale se taie în punctul O. Se prelungeşte diagonala $\overline{AC}$ cu segmentele

$$\overline{AA'} = \overline{OC} \quad \text{şi} \quad \overline{CC'} = \overline{OA},$$

apoi diagonala $\overline{BD}$ cu segmentele

$$\overline{BB'} = \overline{OD} \quad \text{şi} \quad \overline{DD'} = \overline{OB}.$$

Notăm punctele:

M(AB, A'B'), N(BC, B'C'), P(CD, C'D'), Q(DA, D'A').

Să se demonstreze că dreptele MP şi NQ sunt paralele respectiv cu B'C' şi C'D', dreptele MQ şi NP se întâlnesc pe diagonala BD, iar MN şi PQ pe diagonala AC.

GH. D. SIMIONESCU.

5169. Dacă diagonalele unui patrulater, înscris într'un cerc C_1, sunt perpendiculare, se ştie [1]) că proiecţiile punctului lor de intersecţie pe laturi formează un al doilea patrulater, care este înscris într'un cerc C_2 şi circumscris unui cerc C_3.

Să se arate că singurul patrulater, care se bucură de proprietatea că raza cercului C_2 este medie proporţională între razele cercurilor C_1 şi C_3, este patratul.

GH. TH. GHEORGHIU.

5170. Se consideră tetraedrul SABC, astfel ca muchiile SA, SB, SC sunt perpendiculare două câte două. Să se demonstreze, pe cale trigonometrică, proprietatea cunoscută: proiecţia vârfului S pe planul ABC este ortocentrul triunghiului ABC.

GH. DUMITRESCU.

5171. Să se stabilească relaţia:

$$8S^2 \Sigma \frac{1}{a^2 b^2} - 4S \Sigma \frac{a d_a}{b^2 c^2} - 3 = 0.$$

Notaţiile se referă la un triunghiu oarecare, d_a, d_b, d_c fiind distanţele dela centrul cercului circumscris la laturile triunghiului.

LT. C. IONESCU-ŢIU.

5172. Să se arate că în un triunghiu oarecare, avem relaţiile:

$$(I) \qquad \sum \frac{\sin\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{r - p - 2R}{r + p + 2R};$$

---

1) Cours de Géométrie élémentaire, par F. G. M., ed. III, pag. 269.

$$(II)\quad \sum \frac{\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{r+p-2R}{r+p+2R},$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

S-LT. M. GRUMĂZESCU.

5173. Intr'un cerc O se ia o coardă $\overline{MN}$, mai mică decât un diametru; apoi pe arcul cel mic determinat de această coardă, punctele m şi n astfel ca: arc Mm = arc mn = arc nN. Fie D mijlocul coardei mn şi un punct P luat pe prelungirea lui $\overline{DO}$, astfel ca $\overline{OP} = 2\overline{OD}$; fie A şi B punctele unde P_m şi P_n taie pe MN.

Să se arate:

1°. Că $\overline{MA} = \overline{AB} = \overline{BN}$;

2°. Că $\sphericalangle MPN = \frac{1}{3}\sphericalangle MON$.

LT. NEGOIŢĂ M. V. PANAIT.

5174. Să se simplifice expresia:

$$E = \frac{a^{12}+b^{12}+c^{12}-3a^4b^4c^4}{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2} - \frac{a^{15}+b^{15}+c^{15}-3a^5b^5c^5}{a^9+b^9+c^9-3a^3b^3c^3}$$

ştiind că:

$$a+b+c=0.$$

MIRCEA ADAM.

5175. Fie triunghiul ABC înscris în cercul O de rază R. Fie C' proiecţia lui C pe tangenta în A la O şi P intersecţia cu înălţimea din A a perpendicularei din C' pe AB. Să se arate că, dacă A descrie cercul O, punctul P descrie o elipsă de semiaxe R şi 2R.

LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5176. Să se arate că locul polului unei tangente mobile la cercul C_1, față de cercul C_2, situate în același plan, este o conică. Să se cerceteze natura conicei după poziția și mărimea relativă a celor două cercuri.

M. SARIAN.

5177 [1]). Se dau în plan punctele fixe A, B, o dreaptă Δ și un cerc (C). Fie M un punct mobil pe cercul (C) și T intersecția lui Δ cu tangenta în M la (C). Să se găsească locul geometric al intersecției dreptelor AM, BT.

G-L GH. BUICLIU.

5178. Fiind dată seria $\sum_0^\infty a_n x^n$, să se studieze seria $\sum_0^\infty \Delta^p a_n x^n$, unde $\Delta^p a_m$ este diferența de ordinul p a șirului a_m.

M. GHERMĂNESCU.

5179. Să se găsească locul polurilor dreptelor lui SIMSON față de cercul lui EULER.

ION C. VASILIU.

ERATĂ. 1°. La problema 5162 ecuația diferențială este:

$$axy'' + (bx + 4a)\,y' + (cx + 2b)\,y = 0.$$

2°. Problema rezolvată la pag. 610 are N-rul 5089, iar nu 5082, cum din eroare s'a publicat.

---

1) Trimisă la propus la 20 Februarie 1939.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

Pag.

A. Gloden . . . . . O teoremă de scoborîre a ecuaţiilor multigrade 293

2. Geometria

G-l Gh. Buicliu . . . . O problemă de construcţie 402, 457
St. Cetăţeanu . . . . . Proprietăţi ale pseudo-rombului 510
V. L. Florescu . . . . Asupra punctelor lui FEUERBACH 521
M. Ghermănescu . . . O problemă de construcţie 348
C. Ionescu-Bujor . . . Asupra dreptei lui SIMSON-WALLACE 238
V. Thébault . . . . . Din geometria triunghiului 120
O. N. Ţino . . . . . O problemă de construcţie 174

3. Algebra

Th. Angheluţă . . . . Asupra modulelor zerorilor polinoamelor . . . 233
G. G. Constantinescu . . Asupra problemei 4553 624
E. Vişa . . . . . Asupra unor însumări 517

4. Geometria analitică şi infinitezimală

N. Abramescu . . . . . Aplicaţii ale coordonatelor tangenţiale 345
N. Abramescu . . . . . Aplicaţie a punctului lui MIQUEL. Cuartica piriformă 514
D. Barbilian . . . . . Câteva aplicaţii geometrice ale invarianţilor lui BOOLE 283
Căp. M. Focşeneanu . . Asupra contactului conicelor 70
Gh. Th. Gheorghiu . . Asupra suprafeţelor ŢIŢEICA 122
N. O. Zaharia . . . Asupra reprezentării analitice a ariilor şi liniilor poligonale 66, 116

5. Analiza

R. Bădescu . . . . . Asupra unei probleme a lui GOURSAT 571
Gh. Th. Gheorghiu . . Problema 1379 567

6. Fizica Matematică

		Pag.
Ing. T. A. Tănăsescu . .	Metoda electrică pentru rezolvarea ecuaţiilor algebrice	287

7. Balistica

Maior I. Linteş	Proprietăţi în câmpul traectoriilor antiaeriene .	630

8. Filozofia Matematică

Gh. Zapan	Configuraţia numerelor prime	59, 113

9. Istoria Matematicilor

Florica Câmpan	Algebra lui E. BACALOGLU	393, 462
I. Ionescu	GHEORGHE KIRILOV	225
I. Ionescu	Elementele lui EUCLIDE	228
V. Marian	PETRU PIPOŞ	19, 57
V. Marian	I. H. ALSTED la Alba-Iulia	342, 462
V. Marian	Ediţia dela Cluj a elementelor lui I. G. PARDIES	564, 621
P. Sergescu	Studenţi români în matematici la Paris între 1870 şi 1877	618
***	Comemorarea profesorului GH. ŢIŢEICA de către Cercul Matematic al Societăţii de Ştiinţe din Cluj	449, 505, 561

10. Diverse

I. Ionescu	Congresul matematicienilor	230
Cpt. C-dor I. Linteş . .	Sărbătorirea D-lui Prof. I. IONESCU de către corpul profesoral al Şcoalei Politechnice din Bucureşti	169

11. Necrologuri

Cpt. C-dor I. Linteş . .	† Generalul SCARLAT PANAITESCU	617
V. Vâlcovici	† Profesorul GH. ŢIŢEICA	281

B. CHESTIUNI IN LEGATURĂ CU REDACŢIA ŞI SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ“

1. Diverse

***	Lista membrilor Societăţii *«Gazeta Matematică»*	5
***	Membri decedaţi	18
***	Cuvântarea D-lui Ing. D. STAN la Adunarea generală a Societăţii *«Gazeta Matematică»* .	337
Al. Bunescu, Ing. D. Stan, Cpt. C-dor Gr. Zapan	Dare de seamă asupra mersului Societăţii *«Gazeta Matematică»*	338

2. Premii şi concursuri

		Pag.
Delegaţia Societăţii . .	Concursul «*Gazeta Matematică*» din 1939 . .	23
D. A. Stan, D. V. Stoica	Premii, burse şi publicaţii din fondurile speciale ale Societăţii «*Gazeta Matematică*»	25
***	Programa analitică hotărîtă pentru concursul «*Gazeta Matematică*» din anul 1939	73
O. Onicescu, P. Sergescu, Cpt. C-dor Gr. Zapan	Raport asupra premiului „VASILE CONTA" . .	126
Delegaţia Societăţei . .	Concursul «*Gazeta Matematică*»	297
G-l Gh. Buicliu, I. Ionescu	Premiul de aritmetică	357
Cpt. C-dor Gr. Zapan		
Gh. I. Dumitrescu, Al. A. Roşu, Gr. Zapan	Premiul „Inginer AL. ROŞU"	413
Gh. Th. Gheorghiu . .	Rezultatul concursului «*Gazeta Matematică*» din anul 1939	452
Th. Angheluţă, P. Sergescu, D. Stan	Raportul Comisiunei pentru premiul de algebră al Societăţii «*Gazeta Matematică*»	468
Al. Bunescu, Gh. Th. Gheorghiu, M. Niculescu	Raport pentru decernarea premiului „V. CRISTESCU"	522
Al. Bunescu, C. Ionescu-Bujor	Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului de geometrie elementară	577
C. Orăşanu, D. Stan .	Premiul „SPIRU HARET"	635

C. NOTE MATEMATICE

1. Aritmetica şi teoria numerelor

48[1])	*P. Boldescu* . . .	Asupra problemei 3911	636
1.	*G-l Gh. Buicliu* . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	29
4.	*G-l Gh. Buicliu* . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	77
7.	*G-l Gh. Buicliu* . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	127
14.	*G-l Gh. Buicliu* . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	241
38.	*G-l Gh. Buicliu* . .	Nota dela sfârşitul problemei 3911	474
49.	*G-l Gh. Buicliu* . .	Asupra notei 48	637
19.	*St. Cetăţeanu* . . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	300
29.	*St. Cetăţeanu* . . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	414
36.	*St. Cetăţeanu* . . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	472
42.	*St. Cetăţeanu* . . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	524
22.	*V. L. Florescu* . . .	Asupra problemei 2035	305
16.	*A. Gloden*	Formarea câtorva egalităţi multigrade	244
44.	*A. Gloden*	Patru egalităţi multigrade	578
26.	*Cpt. C-dor I. Linteş.*	Asupra problemei 4988	364
43.	*Cpt. C-dor I. Linteş.*	Asupra indicatorilor	525
52.	*Cpt. C-dor I. Linteş*	Asupra diviziunei numerelor	642

1) Numărul din această coloană indică numărul de ordine al notei în Vol. XLIV.

Pag.

3. *A. Moessner* . . . . Identităţi numerice interesante 76
11. *A. Moessner* . . . . Curiozităţi numerice 189
45. *A. Moessner* . . . . Problemă diofantiană 579

2. **Geometria**

24. *G-l Gh. Buicliu* . . O problemă de construcţie 358
37. *G-l Gh. Buicliu* . . O problemă de construcţie 473
50. *Ad. Gheorghiu* . . Asupra unei probleme de construcţie 638
17. *V. Ghiţescu* . . . . Asupra unei teoreme 245
5. *C. Ionescu-Bujor* . . O problemă de geometrie plană propusă la concursul «*Gazeta Matematică*» 78
27. *C. Ionescu-Bujor* . . Asupra problemei 4595 364
6. *N. N. Mihăileanu* . Notă asupra parabolei 80
31. *N. N. Mihăileanu* . Notă asupra teoremei lui SIMSON 417
18. *V. Thébault* . . . . Generalizarea teoremelor lui STEWART şi a lui LUCHTERHAND 299
23. *I. I. Ţiţeica* . . . . Notă de geometrie proiectivă 306
28. *I. I. Ţiţeica* . . . . O proprietate a patrulaterului complet 366

3. **Algebra**

8. *G. G. Constantinescu* Asupra problemei 4385 129
32. *G. G. Constantinescu* Asupra unor serii 418
33. *G. G. Constantinescu* Asupra problemei 3676 418
51. *M. Ghermănescu* . . Asupra problemei 4385 640
12. *Cpt. C-dor I. Linteş* Asupra problemei 2356 190
20. *T. Popoviciu* . . . Asupra notei 16 din «*Gazeta Matematică*», Vol. 40, pag. 117 301
25. *T. Popoviciu* . . . Asupra unei teoreme din teoria ecuaţiilor algebrice 362

4. **Trigonometria**

12. *Cpt. C-dor I. Linteş* Asupra problemei 4379 191
46. *Cpt. C-dor I. Linteş* Asupra problemei 4648 582
21. *N. N. Mihăileanu*. . Identităţi trigonometrice condiţionate 301

5. **Analitica**

9. *E. Arghiriade* . . . Asupra transformărei lui BLASCHKE-GRÜNWALD 130
15. *G-l G. I. Liteanu*. . Asupra problemei 3675 243

6. **Analiza**

13. *M. I. Focşeneanu* . . Punctul 2° al rezolvărei exerciţiului Nr. 34 . . 191

7. **Mecanica**

30. *Cpt. C-dor I. Linteş* Asupra problemei 4230 415

8. Fizica Matematică

Pag.

47. *I. S. Antoniu*. . . . Asupra problemei 1271 582

9. Istoria Matematicilor

34. *I. Ionescu* . . . . . Publicarea operei matematice a lui GH. ŢIŢEICA 470
35. *D. Mangeron* . . . Acum o sută de ani în lumea matematică . . . 470
40. *D. Mangeron* . . . Acum o sută de ani în lumea matematică . . . 522
39. *A. Myller* . . . . . O menţiune a lucrării lui N. ST. BOTEŞU . . . 475
2, 10 *** . . . . . Acum o sută de ani în lumea matematică [1]) 73, 189

10. Diverse

41. *G-l Gh. Buicliu* . . Restabilirea unei priorităţi 524

D. CHESTIUNI DE EXAMEN

Concursul „*Gazeta Matematică*" din anul 1939 419
Şcoala Politechnică „Regele Carol II". Concursul de admitere în ciclul I 132, 246

E. BIBLIOGRAFII

1. Lucrări recenzate [2])

G-l Gh. Buicliu . . . . L. BACHELIER. Les nouvelles méthodes du calcul des probabilités 645
I. Ionescu . . . . . L. BACHELIER. La spéculation et le calcul des probabilités 309
I. Ionescu . . . . . E. BOREL. Traité du calcul du probabilités et de ses applications 367
I. Ionescu . . . . . E. BOREL. Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications Tome IV 643
I. Ionescu . . . . . R. ESTÈVE & H. MITAULT. Arithmétique décimale 427
I. Ionescu . . . . . Mathematica 477
I. Ionescu . . . . . Revista Matematică a Societăţii „TR. LALESCU" 587
I. Ionescu . . . . . AL. I. STOENESCU. Probleme de mecanică statică 31
C. Ionescu-Bujor. . . . P. APPELL. Analyse Mathématique 645
C. Ionescu-Bujor . . . M. A. BUHL. Nouveaux éléments d'Analyse . . 82
C. Ionescu-Bujor . . . G. JULIA. Exercices d'Analyse. 426
V. Marian . . . . . ST. BEZDECHI. Un échantillon d'Arithmetica Geometrica 646
V. Vâlcovici . . . . . H. VILLAT. Mécanique des fluides 81
*** . . . . . J. VILLE. Etude critique de la notion de collectif 645

---

1) Note trimise de Seminarul matematic din Iaşi de sub conducerea D-lui Prof. *A. Myller*.

2) S'au scris recenzorii în ordine alfabetică, iar la fiecare recenzor lucrările recenzate sunt înscrise tot în ordine alfabetică.

2. Lucrări nerecenzate

		Pag.
I. T. Adreian	Coordonări, ecuaţiunea $x^3 + px + q = 0$	426
J. Babini	Series cuyos coefficientes contienen factoriales	32
C. Biggeri	Singularidades de las funciones analiticas	32
A. G. Dominguez	Generalizacion de un teorema de CANTELLI	32
J. Fayet	Sur les équations différentielles linéaires	32
Gh. Th. Gheorghiu	Memoriu de titluri şi lucrări	81
Nicéphore Grégoras	Un échantillon d'Aritmetica Geometrica	643
M. N. Iorga	Tratat de desen geometric	308
M. Manoilescu	Incercări în filozofia ştiinţelor economice	192
J. R. Pastor	Limites de las functiones reales en espacios abstractos	32
J. R. Pastor	Metrica e integracion en los espacios abstractos	32
L. N. de Paula	Teoria racional de los sistemos economicos	529
S. Rios	Hiperconvergencia de los series DIRICHLET	32
J. B. Souto	Interpolacion y ajustamiento de la curva logistic generalizada	529
J. B. Souto	Seguros de vida a capital variable	137
T. Vescan	Mecanica şi teoria realităţii	31
T. Vescan	The cosmogonical problem of the annihilation of the sun's mass and the evolution of the planetary orbits	31

3. Extrase, Suplimente, Teze

E. Abason	Notice sur l'analyse des harmoniques des fonctions périodiques par la méthode des discontinuités	479
E. Abason	Propriétés des triangles au même centre de gravité	479
E. Abason	Sur quelques propriétés des polygones au centre de gravité et leurs application à la Physique	479
E. Abason	Sur une propriété du triangle équilateral	479
E. Abason	Un théorème de géométrie	479
N. Abramescu	Sur les coniques osculatrices à une courbe et sur l'étude de la forme d'une courbe au voisinage d'un de ses points	368
E. Arghiriade	Géométrie axiale différentielle des courbes gauches	31
M. St. Botez	Concepţia idealistă a matematicelor în antichitate	529
M. St. Botez	Su la somma di alcune successioni di numeri	529
F. Câmpan	Contribuţia lui BACALOGLU la studiul podarelor curbelor plane	643
G. G. Constantinescu	Transformations genre LAPLACE	308
A. Gloden	Sur les égalités multigrades	81
A. Gloden et A. Moessner	Diophantische probleme	529
C. Iacob	Conditions d'uniformité ou de multiformité dans le problème plan de DIRICHLET	308

Pag.

C. Iacob . . . . . Sur la formation du potentiel complexe de l'écoulement plan d'un liquide dans un domaine multiplement connexe. 309
C. Iacob . . . . . Sur le coefficient de contraction des jets gazeux 309
C. Iacob . . . . . Sur le problème de DIRICHLET à deux dimensions 309
C. Iacob . . . . . Sur quelques conditions aux limites susceptibles de déterminer une fonction analytique . . . 308
I. Linteş, Cpt. C-dor . . Anularea flacărei şi undei de detonaţie pentru a spori posibilităţile de ascundere 252
I. Linteş, Cpt. C-dor . . Aparatul central VICKERS pentru tragerile contra aeronavelor 81
I. Linteş, Cpt. C-dor . . Asupra unor operaţiuni de poligon 529
I. Linteş, Cpt. C-dor . . Primul tun antiaerian făcut în ţară 81
I. Linteş, Cpt. C-dor . . Viteza avioanelor şi războiul de mâine 192
I. Linteş, Cpt. C-dor . . Variaţia preciziei percutante şi calculul abaterilor probabile 643
Cr. Mateescu . . . . . Calcul des plaques élastiques rectangulaires simplement appuyées sur le pourtour et soumises à la flexion par un moment le long d'un côté 136
Cr. Mateescu . . . . . Contribuţie la rezolvarea sistemelor hiperstatice 136
Cr. Mateescu . . . . . Equilibre d'une membrane au pourtour rectangulaire, soumise à une charge variant suivant la loi des pressions hydrostatiques 136
Cr. Mateescu . . . . Profils longitudinaux d'égale visibilité dans la construction des salles de spectacle 136
Cr. Mateescu . . . . . Thèse 136
I. R. Pastor . . . . . Funciones de variable compleja binaria 643
V. Thébault . . . . . Notes de géométrie 192
V. Vâlcovici . . . . . Sur les théorèmes généraux du mouvement des systèmes 309
I. Zamfirescu, Lt. . . . Asupra autofretajului 252

4. Reviste, periodice

American Mathematical Society. Semicentennial publications 135
Anales de la Sociedad Cientifica Argentina 31, 80, 191, 307, 366, 425, 528, 586
Arta şi technica grafică 476
Boletin del Seminario Matematico 643
Boletin Matematico 135, 192, 307, 476, 528, 586, 587, 643
Buletinul „I. R. E.". 135, 367, 528
Buletinul Institutului Român pentru betoane, construcţii şi drumuri 135, 192, 367, 587
Buletinul Societăţei Politechnice din România. 136, 367, 476
Bulletin de mathématiques et de phisiques pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" de Bucarest 476

Pag.

Bulletin of the American Mathematical Society . 80, 192, 308, 367, 425, 476, 528, 587, 643
Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara 476
Contribucion al estudio de las ciencies fisicas y matematicas 81, 308
Gazeta Matematică, Suplimentul cu exerciţii 136, 192, 252, 425, 529
Journal de Mathématiques élémentaires 136, 192, 251, 367, 425, 477, 528, 587, 643
Mathematica 477, 528
Mathesis 31, 251, 308, 425, 477, 587
New Archief voor Wiskunde 367, 587
Pitagora 136, 192, 308, 425, 478, 529
Revista 643
Revista Matematică din Timişoara . 81, 136, 192, 251, 308, 367, 426, 478, 529, 587, 643
Revista Ştiinţifică „*V. Adamachi*“ 136, 308, 479, 643
Saneamente urbano en la Republica Argentina 308
Segunda reunion anual de caminos 251
Sphinx 31, 81, 136, 192, 308, 367, 426, 529, 588, 643
Ştiinţă şi Progres 136, 252, 367, 479, 643
The Mathematical Gazette 136, 252, 367, 643

F. CERERI *)

Nr. Cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul	*Nr. Cererii*	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
1	24 (XXI)	?	32	277 (XXII)	259 (XXIII) 39, 186 (XXIV)?
4	24 „	?	33	308 „	?
5	24 „	?	34	40 (XXIII)	?
7	59 „	?	35	40 „	?
8	59 „	?	36	65 „	?
10	91 „	?	37	86 „	211 (XXIII) ?
11	144 „	?	38	112 „	?
12	145 „	?	39	137 „	?
13	145 „	219 (XXI) ?	40	157 „	?
14	183 „	?	41	185 „	?
15	219 „	?	42	211 „	?
16	254 „	?	43	235 „	?
17	294 „	264 (XXXVIII) ?	44	259 „	?
20	420 „	?	45	275 „	?
23	17 (XXII)	?	46	13 (XXIV)	?
24	75 „	?	49	57 „	?
26	161 „	?	50	70 „	?
27	187 „	?	51	88 „	?
28	213 „	?	52	103 „	?
29	231 „	?	55	168 „	?
30	258 „	?	56	168 „	?
31	277 „	?	58	16 (XXV)	?

*) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pusă după răspuns.

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
59	36 (XXV)	?
60	58 „	?
61	58 „	?
62	71 „	?
63	71 „	?
64	122 „	?
65	122 „	?
66	155 „	?
67	175 „	?
68	199 „	?
70	223 „	?
71	251 „	?
73	45 (XXVI)	?
74	45 „	?
75	94 „	?
77	198 „	?
78	227 „	?
80	263 „	?
81	27 (XXVII)	?
82	27 „	160 (XXVII)?
83	160 „	?
84	197 „	?
85	197 „	?
86	240 „	?
87	283 „	?
88	329 „	?
89	361 „	?
91	26 (XXVIII)	?
92	57 „	?
93	57 „	?
94	104 „	?
95	136 „	?
96	136 „	?
97	213 „	?
98	213 „	?
99	256 „	?
100	297 „	?
101	342 „	?
102	458 „	?
103	458 „	?
104	24 (XXIX)	?
105	58 „	?
107	145 „	?
108	226 „	?
109	298 „	?
112	419 „	?
113	454 „	?
115	22 (XXX)	?
116	102 „	?
117	102 „	?
118	140 „	?
119	218 (XXX)	?
120	261 „	?
122	306 „	?
123	337 „	?
124	383 „	?
126	423 (XXX)	?
128	33 (XXXI)	?
129	55 „	?
130	56 „	?
131	100 „	?
133*)	137 „	252
134	184 „	?
142	53 (XXXII)	?
143	102 „	?
144	142 „	?
146	216 „	?
148	296 „	?
149	343 „	?
152	19 (XXXIII)	19(XXXIII)?
153	51 „	?
154	51 „	?
157	146 „	?
158	185 „	?
159	217 „	?
162	295 „	?
163	341 „	?
166	457 „	?
179	385 (XXXVI)	?
181	24 (XXXV)	?
186	216 „	?
193	466 „	?
196	57 (XXXVI)	?
201	221 „	?
207	414 „	?
208	462 „	?
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
214	217 „	?
215	260 „	?
219	425 „	?
220	448 „	?
223	94 (XXXVIII)	?
227	57 (XXXIX)	?
235	222 „	?
237	360 (XXXIX)	?
238	409 „	?
239	458 „	?
243	212 (XL)	?
244	266 „	?
245	309 „	?

*) A se vedea şi răspunsurile din Vol. XXXI.

Nr. cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
247	499 (XL)	?
248	553 „	?
250	148 (XLI)	?
251	189 „	?
252	241 „	?
253	292 „	?
254	343 „	?
255	384 „	?
256	485 „	?
257	533 „	?
259	629 „	?
262	251 (XLII)	?
263	307 „	?
264	368 „	?
265	422 „	?
266	530 „	?
267	588 „	?
268	639 „	?
269	34 (XLIII)	?
270	90 „	?
271	138 „	?
273	255 „	?
274	304 „	?
275	423 „	?
276	477 „	?
277	539 „	?
278	586 „	83, 192
279	639 „	?
280	32 (XLIV)	?
281	137 „	588
282	309 „	?
283	368 „	428
284	479 „	?
285	530 „	?
286	647 „	?

G. DIVERSE

Pag.

1. Rezolvitorii problemelor 4542 şi 4554 480
2. Şedinţele Societăţii *«Gazeta Matematică»* 33, 193, 310, 368
3. Sporirea Bibliotecii *«Gazeta Matematică»* 33, 84, 137, 194, 252, 310, 369, 428, 479, 532, 589
4. O Conferinţă a D-lui P. SERGESCU 647

H. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

a) Repartizarea problemelor propuse după materii

Aritmetica şi teoria numerelor . . . . . 4999, 5000, 1, 2, 15, 6, 7, 8, 29, 30, 1, 2, 45, 6, 7, 59, 60, 1, 75, 6, 7, 89, 90, 1, 104, 5, 6, 7, 19, 20, 1, 2, 33, 4, 5, 49, 50, 1, 2, 64, 5, 6, 7.

Geometria . . . . . 5003, 4, 5, 6, 7, 8, 19, 20, 1, 2, 3, 4, 33, 4, 5, 6, 9, 44, 8, 9, 50, 1, 2, 3, 4, 6, 62, 3, 4, 5, 74, 8, 9, 80, 1, 2, 3, 92, 3, 4, 5, 108, 9, 10, 1, 2, 23, 4, 5, 6, 7, 36, 7, 8, 9, 40, 1, 8, 53, 4, 5, 6, 7, 8, 68, 9, 71, 3, 9.

Algebra . . . . . 5009, 10, 1, 25, 6, 8, 37, 8, 57, 8, 70, 1, 2, 87, 96, 7, 114, 5, 28, 9, 30, 1, 43, 4, 59, 74, 8.

Trigonometria . . . 5040, 1, 55, 69, 84, 5, 142, 60, 70, 2.

Geometria analitică şi diferenţială . . . . . 5012, 42, 66, 7, 8, 86, 8, 98, 9, 100, 13, 6, 8, 32, 45, 61, 75, 6, 7.

Analiza şi Calculul Integral . . . . . 5013, 43, 73, 146, 62, 3.
Mecanica . . . . . 5014, 27, 101, 2, 17, 47.
Balistica . . . . . 5103.

b) Repartizarea problemelor propuse pe autori

N. Abramescu 5065
M. Adam 5040, 174
I. Alexiu 5019
M. F. Amărăşteanu 5018
Th. Angheluţă 5010, 26, 57, 71, 115, 32
I. S. Antoniu 5101
C. N. Avram, Locot. . . . 5005, 20
Gh. Basacov 5035
E. Gh. Beiu-Paladi 5018
Gh. Buicliu, G-l 5003, 22, 41, 8, 62, 75, 90, 129, 34, 53, 77
St. Cetăţeanu 5150
N. Ciorănescu 5013, 72
V. Claudian 5087, 131
Th. G. Cocea 5007, 23, 34, 126, 40, 57
G. G. Constantinescu 5073, 123, 46, 62
C. Coşniţă 5116
A. Dobrescu 5064
Gh. I. Dumitrescu . . 5136, 58, 70
V. Florescu 5002
M. I. Focşeneanu, Cpt. . . 5049, 99
Ad. Gheorghiu . . 5027, 94, 111, 56
Gh. Th. Gheorghiu 5012, 42, 56, 86, 130, 45, 69
Şerb. Gheorghiu 5001, 52, 68, 82, 97, 110
M. Ghermănescu 5011, 58, 70, 96, 118, 28, 63, 65
V. Ghiţescu 5015, 84, 159
M. Grumăzescu, S-lt. . . . 5172
I. Ionescu 4999, 5014, 29, 44, 59, 74, 89, 104, 19, 33, 48, 64
C. Ionescu-Bujor 5006, 21, 33, 51, 83, 109
C. Ionescu-Ţiu, Locot. 5009, 38, 55, 69, 85, 144, 71
I. Linteş, Cpt. C-dor 5032, 45, 61, 76, 102, 7, 22, 35, 52, 66
I. V. Măties . . . 5088, 121, 43
D Mavrodin 5004
N. N. Mihăileanu 5008, 36, 50, 67, 80, 98, 113, 25, 37, 54
E. Morţun 5066
P. V. Negoiţă, Locot. . . 5054, 173
M. Nicolau 5100
Al. V. Niculescu . 5025, 63, 79, 138
O. Orănescu 5117
M. I. Popa 5160
Ad. Popescu, S-Locot. 5037, 47, 60, 105, 20
Const. C. Popovici 5095
T. Popoviciu 5028
Oct. Gh. Rădulescu . . 5092, 167
C. Săndulache 5017
M. Sarian 5176
Gh. D. Simionescu 5039, 78, 114, 47, 55, 68
I. Stănculescu 5112
Al. Stoenescu 5103
V. Thébault 5000, 30, 46, 81, 93, 106, 39, 51
O. N. Ţino 5141
I. I. Ţiţeica 5053
N. Vasilescu-Karpen . . 5149, 65
M. Al. Vasilescu-Stabu . . . 5091
Gh. Vasiliu 5142
I. C. Vasiliu 5127, 61, 79
N. N. Velicescu 5024
I. Gh. Zamfirescu, Locot. 5124, 75
Gh. Zapan 5043
Gr. Zapan, Cpt. C-dor . . 5016, 31

c) Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
485	104 (V), 198 (XVI)	NR
585 *)	172 (VI), 238 (XVI)	
676	148 (VII)	
766	124 (VIII), 319 (XVI), 372 (XXX)	NR
887	172 (IX), 358 (XVI)	NR
914	267 (IX)	
1000 **)	220 „, 438 (XVI)	NR
1008	244 (X), 462 (XVI)	NR
1056	100 (XI)	NR
1058 ***)	100 „	429
1092	196 „	
1146	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1180	172 „	
1188	228 „	
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	NR
1271	192 „	310
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1310	352 „, 372 (XXXI)	NR
1342	64 (XIV)	
1367	128 „	NR
1379	160 „	529
1384	191 „	480
1398	224 „	
1399	224 „, 200 (XVI)	NR
1412	256 (XIV)	NR
1424	288 „	
1450	352 „	NR
1497	128 (XV)	
1533	224 (XV)	
1553	288 „	NR
1577	352 (XV)	
1591	39 (XVI)	
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	NR
1656	239 „	
1676	279 „	
1679	280 „	
1690	320 „	
1702	360 „, 399 „	
1711	399 „, 372 (XXXI)	NR
1735	464 (XVI)	
1753	80 (XVII)	
1764	120 „	NR
1790	240 „	
1823	400 „	
1831	439 „	
1835	440 „	
1840	466 „	
1876	119 (XVIII)	
1898	199 „	
1906	200 „	NR
1911	239 „	
1914	239 „, 280 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1934	280 „, 320 „	
1944	319 „	
1945	320 „, 360 „	
1948	358 „	484
1958	359 „	
1959	360 „	NR
1969	399 (XVIII)	
1976	431 „	485
1987	462 „	NR
2004	40 (XIX)	NR
2016	79 „	
2017	80 „	NR

1) Numărul latin din paranteză indică volumul în care problema este propusă. Problemele care au în coloana a doua mai multe numere, au fost publicate sau rectificate de mai multe ori în volumul şi la pagina respectivă.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru celelalte probleme redacţia posedă soluţiuni care nu au fost publicate.

*) Soluţia problemei 585 s'a publicat la pag. 88. Vol. VII. Se mai aşteaptă discuţia la punctele cerute în nota de la finele acelei soluţii.

**) A se vedea lămuriri la pag. 291, Vol. XXXI.

***) O soluţie s'a dat în articolul dela pag. 619, Vol. XLI. A se vedea şi nota dela pag. 248 Vol. XLII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
2018	80 (XIX)	
2024	118 „	
2025	119 „	
2032	120 „	
2038	159 „	
2048	198 „	
2055	200 „	
2056	200 „	
2058	200 „	
2065	239 „	
2070	240 „	NR
	280 „	
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2083	280 „	
2091	319 „	
2106	358 „	
2108	359 „	
2110	359 „	
2112	360 „	
2116	398 „	
2118	399 „	
2129	438 „	
2130*)	460 „	
2133	439 „	
2144	461 „	
2145	462 „	
2147	462 „	
2170	119 (XX)	NR
2176	120 „	
2194	197 „	253
2197	198 „	
2217	239 „	
2222	240 „	
2227	279 „	
2235	280 „	
2240	318 „	
2247	320 „	
2248	320 „	
2249	320 „	
2250	320 „	
2263	359 „	
2264	360 „	
2265	360 „	
2266	360 „	
2274	398 „	
2281	400 „	429
2284	439 „	
2290	439 „	
2295	461 „	312
2298	462 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
2301	462 (XX)	
2302	462 „	
2311	40 (XXI)	
2330	118 „	
2332	119 „	
2337	120 „	486
2338	122 „	NR
	422 (XXXI)	
2343	157 (XXI)	
2344	158 „	
2353	159 „	
2357	199 „	
2365	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2381	278 „	
2394	318 „	
2405	320 „	NR
	423 (XXXI)	
2422	399 (XXI)	
2423	399 „	
2430	439 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2439	440 „	NR
2456	31 (XXII)	487
2461	32 „	
2462	62 „	
2466	63 „	
2477	95 „	NR
2497	144 „	
2500	144 „	
2529	262 „	
2537	287 „	
2539	288 „	
2545	312 „	
2552	47 (XXIII)	430
2553	47 „	
2560	72 „	
2566	120 „	
2569	120 „	
2573	144 „	
2575	168 „	
2577	168 „	NR
2578	168 „	
2585	215 „	
2586	216 „	
2587	216 „	NR
2591	240 „	
2593	264 „	
2599	288 „	

*) Inlocueşte problema 2130 propusă la pag. 430, Vol. XIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2602	318 (XXXI)	
2607	31 (XXIV)	NR
2631	112 „	
2638	127 „	NR
2645	143 „	
2647	143 „	
2655	191 „	NR
2660	191 „	
2661 *)	192 „	94 (XLII)
2664	24 (XXV)	
2665	24 „	NR
2675	63 „	
2682	64 „	33
2684	80 „	NR
2688	80 „	
2689	80 „	532
2692	108 „	
2694	108 „	
2713	143 „	NR
2717	143 „	NR
2727	168 „	
2731	191 „	
2735	192 „	NR
2752	264 „	
2758	56 (XXVI)	
2769	79 „	NR
2778	104 „	
2789	135 „	
2803	160 „	
2814	192 „	NR
2818	216 „	
2820	216 „	
2822	216 „	
2827	247 „	
2828	248 „	
2850	335 „	
2851	335 „	431
2865	70 (XXVII)	NR
2886	104 „	NR
2906	184 „	
2909	221 „	NR
2912	222 „	NR
2920	262 „	
2922	263 „	
2926	264 „	NR
2936	343 „	NR
2947 **)	376 „	NR
2953	416 „	
2955	416 (XXVII)	
2959	448 „	
2960	448 „	
2969	39 (XXVIII)	
2971	39 „	
2983	79 „	
2985	80 „	
2993	119 „	
2996	120 „	
2999	120 „	
3000	120 „	
3003	159 „	
3005	159 „	
3013	199 „	
3019	200 „	
3041	319 „	
3052	359 „	194
3054	360 „	
3069	400 „	NR
3070	400 „	
3071	439 „	
3073	439 „	
3075	439 „	
3081	479 „ / 454 (XXXI)	NR
3085	480 (XXVIII)	
3086	480 „	
3091	39 (XXIX)	
3095	40 „	
3096	40 „	
3108	80 „	
3118	120 „	
3127	159 „	NR
3134 ***)	199 „	
3150	240 „	
3160	280 „	
3161	318 „	NR
3167	320 „	
3173	358 „	
3177	359 „	
3178	360 „	
3180	360 „	
3189	400 „	
3198	440 „	
3208	480 „	NR
3210	480 „	
3220	40 (XXX)	
3227	80 „	

*) Rezolvată la pag. 94, Vol. XLII.

**) Vezi rectificarea pag. 448, Vol. XLIII.

***) A se vedea soluția parțială dela pag. 254 și nota dela pag. 300, Vol. XLII. Se așteaptă completarea soluției.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3228	80 (XXX)	
3230	80 „	
3232	119 „	
3236	119 „	370
3239	120 „	
3245	160 „	
3249	160 „	
3251 *)	198 „	
3253	199 „	
3255	199 „	NR
3260	200 „	
3267	239 „	
3277	280 „	
3287	320 „	
3288	320 „	
3291	358 „	
3296	359 „	
3298	359 „	NR
3300	360 „	
3304	399 „	NR
3308	400 „	
3309	400 „	
3310	400 „	NR
3311	438 „	
3312	439 „	
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR
3320	440 „	
3332	119 (XXXI)	
3340	40 „	
3341	79 „	
3350	80 „	NR
3360	120 „	
3365	159 „	533
3389	240 „	
3396	280 „	
3404	318 „	590
3405	319 „	NR
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	NR
3429	400 „	
3430	400 „	
3439	440 „	
3445	479 „	
3448	479 „	
3456	119 (XXXIII)	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3467 **)	79 „	
3468	80 „	
3472	80 „	
3474	119 „	
3477	119 „	
3488	159 „	
3493	160 „	
3495	199 „	
3497	199 „	
3499	199 „	
3504	200 „	
3506	239 „	
3509	239 „	
3512	240 „	
3513	240 „	
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	NR
3533	320 „	NR
3534	320 „	
3535	359 „	
3536 ***)	438 „	
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3546	399 „	
3547	399 „	
3551	39 (XXXIII)	
3554	400 (XXXII)	313
3562	440 „	84
3565	479 „	593
3572	480 „	NR
3573	480 „	NR
3584	79 (XXXIII)	
3588	80 „	
3589	80 „	
3597	120 „	
3600	120 „	
3607 ****)	159 „	
3608	159 „	NR
3610	160 „	
3620	199 „	
3622 *****)	239 „	
3625	239 „	
3627	278 „	NR
3630	240 „	
3635	279 „	NR

*) Un început de soluție s'a dat la pag. 314, Vol. XXX. Se așteaptă soluția completă.
**) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXII.
***) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIII.
****) Vezi erata pag. 240, Vol. XXXIII.
*****) Vezi erata pag. 280, Vol. XXXIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3639	280 (XXXIII)	
3644	319 „	
3647	320 „	NR
3653	359 „	
3657	359 „	NR
3658	360 „	
3659	360 „	
3660	360 „	
3664	399 „	
3665	399 „	NR
3675	439 „	137
3677	440 „	
3681	478 „	NR
3682	478 „	
3689	480 „	
3693	39 (XXXIV)	
3699	40 „	NR
3700	40 „	NR
3702	79 „	196
3705	79 „	
3706	79 „	
3713	119 „	
3714	119 „	88
3720	120 „	
3725	160 „	
3732	199 „	
3733	119 (XXXV)	NR
3736	200 (XXXIV)	NR
3749	240 „	
3762	319 „	
3763	319 „	
3764	319 „	
3765	320 „	
3768	320 „	
3772	359 „	
3775	360 „	
3776	360 „	
3780	360 „	
3784	399 „	
3787	400 „	
3790	400 „	
3792	439 „	
3793	439 „	NR
3802	479 „	NR
3804	479 „	
3807	480 „	
3808 *)	480 „	
3810	480 „	
3817	40 (XXXV)	
3819	40 (XXXV)	
3820	40 „	
3823	79 „	
3824	79 „	
3829	80 „	NR
3836	120 „	NR
3837 **)	120 „	223 (XL)
3840	120 „	
3844	159 „	NR
3845	159 „	
3849	160 „	
3853	199 „	NR
3863	239 „	
3864	239 „	NR
3867	240 „	
3873	279 „	
3874	38 (XXXVIII)	
3876	279 (XXXV)	
3880	280 „	
3883	319 „	
3896	360 „	NR
3902	398 „	
3909	400 „	NR
3911 ***)	439 „	433
3913	439 „	NR
3915	439 „	
3916	439 „	NR
3920	440 „	NR
3924	479 „	
3933	39 (XXXVI)	NR
3934	39 „	
3939	40 „	
3944	79 „	NR
3945	79 „	
3950	80 „	
3961	159 „	
3965	159 „	
3975	200 „	
3976	200 „	
3983	238 „	NR
3988	240 „	89
3999	280 „	
4000	280 „	
4005	319 „	
4010	320 „	NR
4013	359 „	NR
4022	398 „	
4028	400 „	
4029	400 „	

*) A se vedea completarea enunțului la pag. 288, Vol. XL.

**) A fost rezolvată la pag. 223, Vol. XL.

***) Începutul soluției acestei probleme a fost dat la pag. 458, Vol. XXXVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4030	400 (XXXVI)	NR
4034	439 „	NR
4035	440 „	
4041	38 (XXXVIII)	
4045	479 (XXXVI)	
	142 (XL)	NR
4053 *)	39 (XXXVII)	NR
4055	39 „	
4056	79 „	
4059	40 „	NR
4060	40 „	
4062	79 „	NR
4067	80 „	
4068	80 „	139
4070	80 „	NR
4074	119 „	
4075	120 „	
4080	120 „	
4083	159 „	90
4084	159 „	
4085	159 „	NR
4093	199 „	141
4096	200 „	
4098	200 „	
4102	239 „	NR
4103 **)	239 „	
4104	239 „	
4105	240 „	
4107	240 „	
4111	279 „	NR
4112	279 „	
4118	280 „	
4121	318 „	
4125	319 „	
4126	319 „	
4127	320 „	
4132	359 „	NR
4135	359 „	
4148	400 „	NR
4150	400 „	NR
4151	438 „	NR
4155	439 „	
4163	478 „	NR
4167	479 „	NR
4169	480 „	NR
4172	39 (XXXVIII)	
4175	39 „	
4177	40 „	
4181	78 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4184	79 (XXXVIII)	
4185	79 „	
4192	118 „	
4194	119 „	
4199	120 „	
4203	159 „	648
4206	160 „	NR
4210	160 „	
4214	198 „	
4215	199 „	
4225	239 „	255
4226	240 „	
4230	240 „	256
4232	279 „	198
4234	279 „	
4236	280 „	NR
4240	280 „	315
4243 ***)	319 „	136 (XL)
4244	319 „	
4245	319 „	
4247	320 „	
4249	320 „	NR
4250	383 (XXXIX)	
4251	359 (XXXVIII)	
4252	359 „	NR
4256	359 „	NR
4257	359 „	
4270	400 „	
4274	439 „	
4275	439 „	NR
4277	440 „	NR
4279	118 (XXXIX)	
4280	440 (XXXVIII)	NR
4281	479 „	NR
4283	479 „	NR
4285 ****)	479 „	
4287	480 „	
4289	480 „	NR
4290	383 (XXXIX)	NR
4297	40 „	
4298	40 „	142
4299	40 „	434
4302	78 „	
4303	78 „	NR
4307	79 „	
4308	80 „	
4315	120 „	NR
4316	120 „	
4319	120 „	NR

*) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.
**) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.
***) A fost rezolvată la pag. 136, Vol. XL.
****) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4320	120 (XXXIX)	NR
4326	159 „	
4329	160 „	
4333	198 „	NR
4335	198 „	
4337	200 „	NR
4339	200 „	
4340	200 „	NR
4342	239 „	NR
4350	240 „	
4352	286 „	NR
4356	287 „	NR
4357	288 „	NR
4358	288 „	NR
4360	334 „	NR
4362	334 „	NR
4363	335 „	NR
4368	336 „	
4369	336 „	535
4370	336 „	
4373	383 „	
4376	384 „	
4377	384 „	
4380	384 „	NR
4384	431 „	NR
4389	432 „	NR
4393	478 „	NR
4395 *)	479 „	NR
4396	479 „	NR
4398	480 „	
4399	480 „	NR
4400	480 „	
4402	480 „	
4404	526 „	NR
4405	526 „	
4406	526 „	35
4407	527 „	
4410	527 „	145
4411	528 „	
4412	528 „	NR
4416	46 (XL)	NR
4420	47 „	317
4426	48 „	NR
4432	95 „	
4435	96 „	
4441	143 „	
4442	143 „	202

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4445	143 (XL)	NR
4446	143 „	
4449	144 „	NR
4450	144 „	
4452	190 „	NR
4453	190 „	
4458	191 „	
4464	238 „	NR
4468	239 „	NR
4470	240 „	
4473	240 „	NR
4474	240 „	NR
4478 **)	285 „	
4479	285 „	
4480	286 „	NR
4481	286 „	NR
4484	287 „	
4486 ***)	288 „	NR
4487	334 „	NR
4489	334 „	NR
4490	335 „	NR
4492	335 „	NR
4494	336 „	
4496	336 „	
4498	336 „	320
4507	384 „	204
4509	384 „	
4511	430 „	NR
4513	430 „	NR
4515	431 „	
4516	431 „	NR
4520	432 „	
4525	478 „	
4526	478 „	259
4527	479 „	37
4529	479 „	147
4533	480 „	
4534	480 „	NR
4540	527 „	
4547	573 „	NR
4548	573 „	
4550	574 „	
4553 ****)	574 „	
4556	575 „	40
4557	575 „	
4558	576 „	NR
4559	116 (XLI)	

*) Vezi erata pag. 48, Vol. XL.

**) Vezi erata pag. 384, Vol. XL.

***) Vezi erata pag. 120, Vol. XLI.

****) I s'a dat o soluție la pag. 352, Vol. XLI. A se vedea nota de la pag. 302. Vol. XLII. Se așteaptă completarea soluției.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4560 *) . .	116 (XLI)	
4561 . . .	116 „	NR
4564 **) . .	117 „	
4566 . . .	118 „	
4568 . . .	118 „	
4571 . . .	119 „	
4573 . . .	119 „	
4576 . . .	119 „	
4578 . . .	120 „	
4581 . . .	166 „	
4587 . . .	262 „	NR
4588 . . .	168 „	
4589 . . .	168 „	
4590 . . .	168 „	
4592 . . .	215 „	NR
4593 . . .	215 „	
4595 . . .	215 „	260
4596 . . .	215 „	
4598 ***) . .	216 „	NR
4601 . . .	216 „	NR
4602 . . .	216 „	NR
4603 . . .	262 „	NR
4605 . . .	263 „	NR
4607 ****) .	263 „	
4613 . . .	264 „	
4614 . . .	264 „	
4615 . . .	310 „	NR
4618 . . .	311 „	
4620 . . .	311 „	
4621 . . .	311 „	
4622 . . .	312 „	207
4625 . . .	312 „	
4628 . . .	359 „	
4630 . . .	359 „	NR
4631 . . .	359 „	
4633 . . .	359 „	
4634 . . .	360 „	
4636 . . .	360 „	NR
4637 . . .	360 „	
4638 . . .	360 „	
4639 . . .	406 „	
4640 . . .	406 „	
4641 . . .	407 „	NR
4642 . . .	407 „	
4644 . . .	407 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4647 . . .	408 (XLI)	NR
4648 *****)	408 „	92
4649 . . .	408 „	648
4650 . . .	408 „	NR
4652 . . .	453 „	
4654 . . .	454 „	
4655 . . .	454 „	322
4657 . . .	454 „	NR
4660 . . .	455 „	
4664 . . .	503 „	
4666 . . .	503 „	537
4667 ******)	503 „	NR
4670 . . .	504 „	NR
4671 . . .	504 „	
4672 . . .	504 „	NR
4673 . . .	504 „	
4674 . . .	504 „	
4675 . . .	550 „	NR
4676 . . .	550 „	151
4678 . . .	550 „	93
4680 . . .	550 „	NR
4681 . . .	551 „	41
4683 . .	551 „	
4685*******)	552 „	NR
4686 . . .	552 „	NR
4688 . . .	598 „	
4690 . . .	598 „	NR
4693 . . .	599 „	NR
4695 . . .	600 „	
4696 . . .	600 „	
4697 . . .	600 „	
4698 . . .	600 „	NR
4703 . . .	647 „	
4704 . . .	647 „	
4705 . . .	647 „	
4706 . .	647 „	
4708********)	54 (XLII)	
4710 . . .	648 (XLI)	NR
4717 . . .	55 (XLII)	
4720 . . .	56 „	
4722 . . .	56 „	
4723 . . .	110 „	
4724 . . .	110 „	
4726 . . .	110 „	
4729 . . .	111 „	

*) Vezi erata pag. 160, Vol. XLI.
**) Vezi o soluție la pag. 412, Vol. XLI.
***) Vezi erata pag. 264, Vol. XLI.
****) Vezi „ „ 312, „ „
*****) Vezi „ „ 456, „ „
******) Vezi „ „ 552, „ „
*******) I s'a rectificat numărul de ordine la pag. 600, Vol. XLI.
********) I s'a rectificat enunțul de la pag. 648, Vol. XLI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4730 . . .	111 (XLII)	
4731 *) . .	112 „	
4734 . . .	112 „	NR
4738 . . .	166 „	
4740 . . .	167 „	598
4741 . . .	167 „	
4742 . . .	167 „	NR
4745 . . .	168 „	
4749 . . .	223 „	NR
4753 . . .	223 „	
4755 . . .	224 „	
4758 . . .	224 „	
4761 **) . .	278 „	43
4765 . . .	279 „	
4766 . . .	279 „	435
4768 . . .	280 „	
4770 . . .	280 „	
4772 . . .	334 „	NR
4773 . . .	335 „	326
4774 . . .	335 „	437
4777 . . .	335 „	
4779 . . .	336 „	
4780 . . .	336 „	
4781 . . .	336 „	
4782 . . .	336 „	
4783 . . .	390 „	
3785 . . .	390 „	
4787 . . .	390 „	
4790 . . .	391 „	
4791 . . .	391 „	NR
4793 . . .	392 „	
4794 ***) .	392 „	517
4797 . . .	446 „	152
4798 . . .	446 „	
4801 . . .	447 „	
4803 . . .	447 „	45
4804 . . .	448 „	
4805 . . .	448 „	NR
4806 . . .	448 „	96
4807 ****) .	502 „	612 (XLII)

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4808 *****).	502 (XLII)	540
4809 . . .	502 „	
4810 . . .	502 „	98
4812 . . .	503 „	NR
4814 . . .	503 „	100
4815 . . .	504 „	
4817 . . .	504 „	
4818 . . .	504 „	102
4821 . . .	558 „	
4822 . . .	558 „	371
4825 . . .	559 „	
4826 . . .	559 „	
4829 ******)	165 (XLIII)	
4830*******)	560 (XLII)	659 (XLIII)
4831 . . .	614 „	651
4832 . . .	614 „	
4834********)	614 „	209
4836 . . .	615 „	
4837 . . .	615 „	210
4838*********)	615 „	375
4839**********)	616 „	NR
4840 . . .	616 „	
4842 . . .	616 „	654
4844 . . .	670 „	151
4845 . . .	670 „	212
4846 . . .	670 „	
4847 . . .	671 „	488
4848 . . .	671 „	
4849 . . .	671 „	NR
4851 . . .	671 „	491
4852 . . .	672 „	
4853 . . .	672 „	
4854 . . .	672 „	
4859 . . .	55 (XLIII)	NR
4860 . . .	55 „	47
4863 . . .	56 „	
4866 . . .	56 „	
4870 . . .	110 „	
4871 . . .	111 „	
4872 . . .	111 „	

*) Vezi erata pag. 56, Vol. XLIII.

**) I s'a rectificat enunțul la pag. 616, Vol. XLII.

***) Vezi articolul *N. Abramescu* pag. 514, Vol. XLIV.

****) A fost rezolvată la pag. 612, Vol. XLII.

*****) Trecută din eroare ca rezolvată în Vol. XLII.

******) Problema propusă cu acest număr la pag. 560, Vol. XLII, se anulează. Vezi pag. 165 și pag. 280, Vol. XLIII.

*******) Rezolvată la pag. 659, Vol. XLIII, iar nu la pag. 493 cum s'a trecut din eroare în tabla de materii Vol. XLIII.

********) Din eroare a fost trecută ca rezolvată la pag. 659, Vol. XLIII.

*********) Vezi erata pag. 672, Vol. XLII.

**********) „ „ „ 672, „ „

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]		Rezolvată [2]
4874	112	(XLIII)	155
4876	112	„	656
4879	166	„	NR
4880	166	„	
4881*)	166	„	
4883	166	„	
4884	166	„	261
4885**)	167	„	266
4887	167	„	
4888	167	„	NR
4889	168	„	
4890	168	„	NR
4892	222	„	
4894	222	„	NR
4895	223	„	328
4896	223	„	
4897	223	„	
4898	223	„	
4901	224	„	NR
4902	224	„	541
4904***)	222	(XLIV)	542
4905	278	(XLIII)	NR
4907	279	„	
4908	279	„	376
4909	279	„	
4910	279	„	
4911	279	„	103
4912****)	280	„	347
4913	280	„	NR
4914	280	„	NR
4915	334	„	NR
4917	334	„	
4918	334	„	267
4920	334	„	NR
4921	334	„	378
4922	335	„	
4923	335	„	
4925	335	„	157
4926	336	„	
4927	390	„	NR
4928	390	„	
4929	390	„	NR
4930	390	„	543
4931	391	„	
4932	391	„	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]		Rezolvată [2]
4933	391	(XLIII)	
4934	391	„	
4935	391	„	
4936	392	„	
4937	392	„	NR
4938	392	„	NR
4939*****)	446	„	49
4940	446	„	
4941******)	446	„	214
4942	446	„	
4943	446	„	52
4944	447	„	NR
4945	447	„	105
4946	447	„	
4947	447	„	
4948	447	„	
4949	448	„	NR
4952	502	„	545
4953*******)	614	„	
4954	502	„	
4955	503	„	
4956	503	„	
4957	503	„	600
4958	503	„	
4959	504	„	
4960	504	„	159
4961	504	„	269
4962	504	„	NR
4963	558	„	658
4964	558	„	160
4965	558	„	547
4966	558	„	660
4967	559	„	
4968	559	„	
4969	559	„	
4970	560	„	
4971	560	„	662
4972	560	„	601
4973	560	„	NR
4974	560	„	NR
4975	614	„	162
4976	614	„	272
4977	614	„	
4978	614	„	
4979	615	„	NR

*) Vezi erata pag. 224, Vol. XLIII.
**) „ „ „ 392, Vol. XLIII.
***) Rectificat enunțul la pag. 222, Vol. XLIV.
****) Vezi articolul dela pag. 345.
*****) Vezi erata pag. 504, Vol. XLIII.
******) „ „ „ 504, Vol. XLIII.
*******) I s'a modificat enunțul dela pag. 502, Vol. XLIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4980	615 (XLIII)	216
4981	615 „	NR
4982	615 „	
4983	616 „	274
4984	616 „	
4985	616 „	NR
4986	616 „	NR
4987	670 „	330
4988	670 „	218
4989	670 „	NR
4990	670 „	493
4991	670 „	NR
4992	671 „	NR
4993	671 „	
4994	671 „	548
4995	671 „	
4996	672 „	382
4997	672 „	NR
4998	672 „	220
4999	53 (XLIV)	163
5000	53 „	439
5001	54 „	
5002	54 „	
5003 *)	109 „	
5004	54 „	
5005	54 „	550
5006	55 „	
5007	55 „	663
5008	55 „	
5009	55 „	
5010	56 „	NR
5011	56 „	551
5012	56 „	
5013	56 „	
5014	109 „	601
5015	109 „	665
5016	109 „	
5017	110 „	332
5018 **)	110 „	553
5019	110 „	554
5020	110 „	
5021	110 „	
5022	111 „	NR
5023	111 „	NR
5024	111 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
5025	111 (XLIV)	
5026	112 „	
5027	112 „	
5028	112 „	NR
5029	166 „	602
5030	166 „	
5031	166 „	
5032	166 „	
5033	166 „	
5034	167 „	
5035	167 „	383
5036	167 „	
5037	167 „	NR
5038	167 „	
5039	168 „	
5040	168 „	
5041	168 „	667
5042	168 „	
5043 ***)	168 „	NR
5044	222 „	
5045 ****)	222 „	NR
5046	222 „	
5047	222 „	NR
5048	222 „	556
5049	222 „	NR
5050 *****)	223 „	
5051	223 „	
5052 ******)	223 „	
5053	223 „	NR
5054	223 „	
5055	224 „	
5056	224 „	
5057	224 „	441
5058	224 „	NR
5059	277 „	NR
5060	277 „	
5061 *******)	334 „	
5062	277 „	
5063	277 „	
5064	278 „	
5065	278 „	
5066	278 „	
5067	278 „	
5068	278 „	NR
5069	279 „	

*) Inlocueşte problema 5003 dela pag. 54.
**) Vezi erata pag. 280.
***) Vezi erata pag. 280.
****) Vezi erata pag. 280.
*****) Vezi erata pag. 448.
******) Vezi erata pag. 336.
*******) Inlocueşte problema propusă cu acelaşi număr la pag. 277.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
5070	279 (XLIV)	442
5071 *)	279 „	NR
5072	280 „	NR
5073	280 „	NR
5074	334 „	NR
5075	335 „	
5076	335 „	NR
5077	335 „	
5078	335 „	606
5079	335 „	
5080 **)	335 „	
5081	335 „	
5082	335 „	
5083	336 „	610
5084	336 „	
5085	336 „	
5086	336 „	
5087	336 „	
5088	336 „	611
5089	390 „	610
5090	390 „	
5091	390 „	NR
5092	390 „	
5093	390 „	NR
5094	391 „	NR
5095	391 „	NR
5096	391 „	
5097	391 „	
5098	391 „	
5099	391 „	NR
5100	392 „	
5101	392 „	NR
5102	392 „	NR
5103	392 „	
5104	445 „	NR
5105	445 „	NR
5106	445 „	NR
5107	445 „	
5108	446 „	
5109	446 „	
5110	446 „	
5111	446 „	
5112	447 „	
5113	447 „	NR
5114	447 „	
5115	447 „	
5116	447 „	
5117	448 „	NR
5118	448 „	NR
5119	501 „	NR
5120	501 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
5121	501 (XLIV)	NR
5122	501 „	
5123	501 „	NR
5124	502 „	
5125	502 „	NR
5126	502 „	NR
5127	502 „	NR
5128	503 „	NR
5129	503 „	NR
5130	503 „	NR
5131	504 „	
5132	504 „	
5133	558 „	
5134	558 „	
5135	558 „	
5136	558 „	
5137	558 „	NR
5138	559 „	NR
5139	559 „	NR
5140	559 „	NR
5141	559 „	NR
5142	559 „	
5143	560 „	
5144	560 „	NR
5145	560 „	
5146	560 „	NR
5147	560 „	NR
5148	614 „	NR
5149	614 „	NR
5150	614 „	NR
5151	614 „	NR
5152	614 „	NR
5153	614 „	NR
5154	615 „	NR
5155	615 „	NR
5156	615 „	NR
5157	615 „	NR
5158	615 „	NR
5159	616 „	NR
5160	616 „	NR
5161	616 „	NR
5162 ***)	616 „	NR
5163	616 „	NR
5164	669 „	NR
5165	669 „	NR
5166	669 „	NR
5167	669 „	NR
5168	669 „	NR
5169	670 „	NR
5170	670 „	NR
5171	670 „	NR

*) Vezi erata pag. 504.
**) Vezi erata pag. 448.
***) Vezi erata pag. 672.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]	Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
5172 . . .	670 (XLIV)	NR	5176 . . .	671 (XLIV)	NR
5173 . . .	671 »	NR	5177 . .	672 »	NR
5174 . . .	671 »	NR	5178 . . .	672 »	NR
5175 . . .	671 »	NR	5179 . . .	672 »	NR

I. EXERCIȚII *)

Aritmetica și teoria numerelor . . . . . 6(165), 7(165), 16(444), 25(557).
Geometria . . . . . 8(221), 9(275), 10(275), 11(275), 14(334), 17(444). 23(500), 24(501), 26(557), 27(557), 28(613), 31(668).
Algebra . . . . . 1(53), 2(106), 12(276), 18(498), 19(499), 20(499), 21(500), 22(500), 29(613).
Trigonometria . . . . . 3(106), 4(107), 5(108), 13(276), 30(668).
Geometria analitică . . 15(389).

J. TABLOUL NUMELOR

Abason E., 6, 454, 476, 477, 479, 485, 528.
Abel, 366, 425, 586.
Abramescu N., 6, 31, 70, 278, 321, 347, 348, 368, 428, 429, 517, 529, 587.
Adam I. M., 87, 168, 196, 276, 671.
Adreian Th. I. 426.
Aigner A., 301.
Alaci V., 6, 119, 251, 308, 367, 426, 428, 476, 478, 529, 587, 643.
Alasia C., 137, 369, 479, 589.
Albeață E., 315.
Albert A. A., 80.
Aldea G., 312.
Aldea V. M., 298.
Aldea N. N., 7, 43, 45, 88, 141, 197, 261, 266, 535.
Aldea V. V., 297, 333.
Alessi M. J., 528.
Alexandrescu ?, 226.
Alexandrescu C. M., 377, 553.
Alexe N., 485.
Alexiu I., 5, 6, 7, 107, 108, 110, 341, 554, 555, 668.
Aliman N. I., 88, 197, 597.
Alinescu C., 485.
Almăjan P., 88.
Alsted Iacob, 344.
Alsted H. Iohann, 342, 344, 345, 398, 399, 400, 401, 402.
Alstedius **), 344, 345.
Alty N. J., 287.
Amărăşteanu F. M., 41, 100, 110, 147, 165, 207, 357, 480, 533, 600, 602, 657.
Ampère, 450, 523.
Anagnoste A., 484.
Anastasie V., 312.
Anastasiu A., 312.
Anastasiu M. D., 657.
Anastasiu M. M., 657.
Andoyer H. M., 454.
Andrė C., 619.
Andreescu Gh. I., 297.
Andronache V., 377.
Angelescu A., 18, 341, 431, 455, 456, 476.
Angelescu I. N., 227.
Angheluță Th., 5, 7, 33, 56, 100, 103, 112, 157, 220, 224, 234, 238, 280, 441, 442, 447, 449, 450, 469, 476, 504, 505.
Antonescu M. M., 297.
Antoniu Abt., 20.
Antoniu Corn., 7, 485.
Antoniu S. I., 6, 7, 392, 586.
Apollonius, 57, 565, 566, 622.
Apostol G. N., 657.
Apostol V. R.. 39, 40, 100, 103, 210, 259, 260, 439.
Appell, 454, 621, 645.
Arago, 471.
Arapu I., 170.
Archimede, 565, 566, 622, 623.
Arendt R. E., 297, 333, 428, 456.
Arghiriade Em., 5, 6, 7, 31, 132.
Aristotel 624.
Armeanca I., 7.
Arnold A., 312.
Arşavschi Al., 147.
Artazo Ev., 308.
Atanasiu C. V., 298, 333, 550.

*) Numerele din paranteză indică pagina la care a fost propus exercițiul al cărui număr precede paranteza.

**) Același cu precedentul.

Aubert, 308, 455.
Auerbach F., 428.
Avram N. C., Lt., 54, 110, 144, 193, 275, 341, 550.
Avramescu C., 7, 485.

Babini J., 32.
Bacaloglu E., 393, 395, 396, 398, 462, 463, 465, 466, 467, 468, 479, 643.
Bachelier L., 309, 645, 646.
Baciu I. Margareta, 377.
Baciu G. T., 313, 597.
Bădescu Fl. C., 298.
Bădescu Fl., 297.
Bădescu A. L., 7, 485.
Bădescu R., 7 577.
Bădulescu Dan, 607.
Bădulescu P. N., 333.
Baidaff Ig. B., 7, 307, 528, 586, 643.
Baillaud B., 619, 620, 621.
Baire, 529.
Bal S. L., 93, 208, 368.
Balaban I. Gh., 314, 315.
Bălan E., 532.
Banciu I., 7.
Bănescu A. M., 297.
Bănulescu M. Căp., 27.
Barbilian D., 5, 7, 130, 287, 306.
Bârlea G. V., 376.
Bârlea-Suhăţeanu G. V., 298, 333.
Bartic Gh. Gh., 377.
Bârzu G. V., 53, 298, 333, 550, 667.
Basacov Gh., 167.
Bathory S., 343.
Bathyan G. J. C. de, 530, 531.
Bazacov Gh. *), 383, 542.
Beckenbach F. E., 192.
Bedreag C. M., 333, 551, 609, 611.
Bèghin, 368.
Beiu-Paladi G. E., 328, 446.
Belian R., 312, 485.
Bell E. T., 135.
Beltrami, 191, 619.
Bénard, 81.
Beneş P., 308.
Bergmann S., 477.
Bernouilli, 464, 477.
Bertrand J., 194, 476, 620.
Beşleagă Fl., 587.
Bethlen G., 343, 344, 399.
Betti E., 229.
Bezdechi S., 643, 646, 647.
Bèzout, 156, 397.
Bidoianu Ad., 88.
Biernacki M., 233, 238.
Biernaki, 312.
Biggeri C., 32.
Bilo J., 31.
Binet, 471, 475.
Birkhoff G. D., 135.
Bisterfeld H., 344.
Blaga E., 207.
Blaschke, 130, 132.
Boas P. R., 80.
Bodnărescu M. H., 96, 105, 159, 213, 218, 267, 274, 298, 328, 333, 377, 381, 385, 456, 497, 553, 556, 600, 607, 609, 611, 667.
Boerescu P. Gh., 88, 197.
Bogdan Gr. Gh., 297.
Bogdan Gr. I., 207.
Bogza I., 138.
Boian D. Em., 106, 212, 272, 377.
Boian C. I., 88, 197.
Boiangiu D. D., 333, 441, 444.
Bojin C. D., 333.
Boldescu P., 156, 219, 273, 478, 496, 549, 637, 638.
Bolgar S. D., 88.
Bombelli, 398.
Bompiani E., 506.
Boncea N. N., 377.
Bonnet O., 467, 516.
Boole, 283, 285, 471.
Booth, 471.
Borel E., 82, 367, 561, 643, 644.
Borneanu G., 7.
Borneas M., 426.
Boross I., 624.
Borş C., 192.
Bosinceanu D. G., 377.
Botea Gh. Prof., 341.
Botea G. N., 18, 37, 82, 260, 364, 535.
Botea G. E. P., 7, 454.
Botesŭ St. N., 475.
Botez St. M., 7, 136, 529, 617.
Botez D. Tr., 377.
Bourion G., 426.
Brabant H., 426.
Braester I. O., 535.
Brassai S., 20, 21, 57.
Brassat R., 88.
Brătilă M., 193.
Bratu Gh., 8, 449, 528.
Brener M. A., 8, 312.
Brianchon, 74, 471.
Briggs, 464.
Brioschi Fr., 229, 471.
Brocard, 31, 265, 301, 516, 587, 619.
Brotea T. Gh., 377.
Brukner V., 8.
Brumărescu C., 312.
Bucur A., 312, 485.
Bucur N. V., 207.
Bucurenciu J. V., 328.
Bucurescu I. Lt., 8.
Budeanu I. C., 8.
Buhl A. M., 82.
Buicliu Gh. G-l., 5, 6, 8, 30, 33, 49, 54, 77, 84, 93, 96, 109, 111, 129, 138, 162, 168, 193, 201, 218, 222, 243, 255, 268, 269, 277, 300, 311, 313, 328, 335, 358, 361, 375, 376, 389, 390, 412, 414, 429, 434, 441, 453, 461, 472, 474, 475, 485, 492, 493, 498, 503, 524, 535, 540, 541, 556, 558, 597, 614, 638, 646, 648, 667, 672.
Bujoreanu, N., 8.
Bulgăreanu C., 312, 487.
Bunescu D. A., 5, 8, 33, 342, 485, 522, 578.
Bungescu I. Maior, 8.
Bungeţeanu Preduţa, 8, 341, 453.
Buradescu T., 8.
Burghelea S. C., 298.
Burichovici A., 88.
Buşilă Ad., 8.
Buşilă D. C., 8, 170.
Buşilă I., 8.
Butan M. A., 89.
Butu N., 312.
Buzincu I. I., 41, 145, 207, 208, 437.
Buznea D. D., 267, 298, 333, 656.

*) Acelaşi cu *Basacov Gh.*

Calderon A., 587.
Călin M. Gh., 35, 313, 597.
Călin P. I., 298.
Călinescu A., 41, 93, 208, 261, 328.
Calmuschi C., 312.
Călugăreanu G., 450, 454, 477, 505, 528.
Cambureanu V. D., 8, 485.
Cambureanu V. V., 8.
Câmpan Florica, 398, 468, 643.
Canari A. Vlad, 608.
Cantacuzène, 620, 621.
Cantacuzino G., 620.
Cantelli, 32.
Capriel I., 8.
Caracudovici Margareta, 207.
Carafoli E., 8.
Caraman E., 9.
Carâp V., 485.
Cardanus, 398.
Cardara Gh. Gh., 154, 210, 214.
Cârdeiu D. Gh., 53, 218, 328, 376, 609, 611.
Carmichael R., 638.
Carnabel I., 312.
Carnabel S., 485.
Carol I, 193.
Caronnet Th., 455.
Cartianu Gh., 9.
Cassian Gh. Col, 9.
Catalan E., 471, 475.
Caţichi M. E., 138, 313.
Cauchy A., 82 471.
Cavallaro G. V., 31, 308, 476, 587.
Cayley, 283, 471.
Cazacu N. C., 9.
Ceauşescu I. V., 92, 144, 145, 201, 480.
Cerchez M., 157, 220, 554. 609, 611, 612.
Cerf H., 588.
Cernat V., 312.
Cernavodeanu I. I., 298.
Cesaro, 82.
Cetăţeanu St., 51, 105, 213, 243, 298, 301, 328, 332, 333, 376, 414, 472, 513, 525, 553, 557, 614.
Ceva, 74, 387, 476.
Charus M., 312.
Charves, 621.
Chasles, 228, 620.
Chemale A., 485.
Cherţman S. M., 333, 587. 602, 606, 609.
Chevrel, 219.
Chiriac I. C., 89, 92, 147.
Chiricescu V., 9.
Chiricuţă A., 9.
Chiriţă M. M. 89, 145, 147, 208, 480.
Chiru N. *), 227.
Chisini O., 454.
Chiţulescu I. I., 5, 9, 453.
Chiţulescu I. Tr. 609.
Christea S. E., 602.
Ciobanu V. I., 297.
Cioc I. D., 210, 212, 654, 655.
Cioc M., 9.
Ciocanu H., 312.
Ciocoiu A. Gh., 89.
Ciorănescu I. N., 5, 6, 9, 56, 92, 207, 255, 280, 476, 478, 532, 535.
Cirodde L. P., 466, 467, 468.
Cisotti, 81.
Ciupag St. H. Şt., 298, 657.
Claudian V. **), 336, 504, 643.
Cleoveanu C. M., 333, 441.
Climescu C., 228.
Cocea Gh. Th., 35, 36, 37, 55, 111, 167, 259, 502, 537, 559, 597, 615, 660, 663.
Cockle, 471.
Coenen R., 251.
Cohn F., 312.
Cohn Ph., 485.
Cojocaru V. I., 89.
Cojocaru P. P., 40, 41, 43, 155, 207.
Comberousse Ch. de, 455.
Comenius, 344.
Constantin I· Cr., 333.
Constantin V. P., 103, 106.
Constantinescu V. C.-Olt, 212.
Constantinescu I. E., 297, 456.
Constantinescu Gh. Ing., 9.
Constantinescu Gh. Prof. 268.
Constantinescu Gh. Gh., 9, 33, 35, 100, 102, 130, 138, 201, 204, 212, 280, 308, 312, 313, 314, 335, 341, 370, 418, 419, 426, 429, 431, 453, 483, 501, 539, 560, 616, 630, 648, 651, 655.
Constantinescu N. I., 499, 597.
Constantinescu N. M., 89, 597.
Constantinescu T., 9.
Constantinescu C. V., 609.
Constantinescu Z., 9.
Coral M., 80.
Cornăţeanu I. A., 43, 100, 103, 106, 157, 160, 207, 209, 213, 272, 329, 333, 376, 381, 480, 662.
Corozel Tr., 485.
Coşereanu I., 9, 532.
Coşniţă C., 192, 308, 313, 315, 426, 434, 447, 478, 498, 500.
Coşniţă V. ***), 370.
Costache N., 88.
Costăchel A., 477.
Costăchescu V. C. Lt., 313.
Costachi N. N., 597.
Costescu Gh. I., 298, 333, 455, 550.
Costinescu P. Ad. 377.
Costinescu D., 9.
Cotescu C., 207.
Cozloschi V. M., 297.
Crăciun I. I., 209.
Crăciunescu I. Marcel, 297, 333.
Crăciunescu I. Mioara, 53, 103, 377, 545, 656.
Crelle 470, 522.
Cristea I. C., 297, 333, 606.
Cristea D. Eftimie, 298, 333, 550, 553.
Cristescu V., 28, 263, 264, 340, 403, 563.
Cristescu-Potlogi I. C., 597.
Crivăţ I. Vl., 88, 197, 434,
Crivetz Th., 252.
Cross, 137.

*) Acelaşi cu *Kirilov N.*
**) Acelaşi cu *Coşniţă V.*
***) Acelaşi cu *Claudian V.*

Csecke V. V., 145, 434. 480, 537.
Culianu N., 228.
Curcă C., 377.
Curchi I., 141, 656.
Cuşută H., 312.
Cyrillon*), 620.

Dâmboianu I. Gh., 49.
Dănciulescu Gr. V., 87, 315.
Darboux G., 70, 321, 450, 506, 507, 508, 561, 619.
Darmois G., 644.
Dăscălescu Hr., 9, 313.
Davidescu M. 312.
Davidsohn I., 312, 485.
Dawson R. T., 31.
Deac I., 89, 90.
Deaux R., 308, 425, 477.
Decerf M., 367.
Deciulescu G., 657.
Defrise P., 587.
Deheleanu Gh., 298.
Demetrescu I. G-l, 339.
Denjoy A., 477.
Depau R., 587.
Descartes, 155, 205, 564, 565, 624.
Destouches L. J., 476.
Deutsch M. A., 328, 375, 654, 655.
Devisme J., 82.
Diaconescu V. C., 333, 608.
Diaconescu D. I., 103, 213, 274, 328, 376, 385, 557, 602, 656.
Diaconescu I. I., 333.
Diaconescu M., 156, 333, 602, 657.
Diaconescu N., 568, 589.
Diaconescu V. T., 313, 535, 591.
Dieudonné, 233.
Dieulefait E. C., 528.
Dimitriu C. I. C., 612, 656.
Dimitriu I. Călin, 207.
Dimitriu C. I., 333.
Dincă Al. St., 298.
Dinculeanu N. 297.
Dinulescu I. N., 314.
Dinulescu Tr., 312.
Diocles, 138, 243.
Dirichlet, 32, 135, 191, 308, 309, 471, 523, 528.
Dobrescu A., 278, 368.
Dobrescu D. P., 39, 41, 93, 208, 210, 261, 328.
Dobrescu-Băbici I., 485.
Dobrovici I., 524.
Dogaru D. S., 92.
Donciu N., 40.
Dospinescu M. I., 228.
Dovgan V. Gh., 213, 333.
Drăghicescu P. P., 162, 297, 455, 550, 557, 610, 613.
Drăghiţescu P. P., 51.
Dragomirescu-Buzne Ed., 27.
Drăguţ G. V., 197.
Drăniceanu V. E., 333.
Drobisch, 467.
Drosescu Gh. I., 9.
Duhamel, 471.
Dumitrescu C., 83, 193.
Dumitrescu A. D., 10.
Dumitrescu I. Eug., 88
Dumitrescu Gh., 553.
Dumitrescu I. Gh., 5, 6, 10, 33, 89, 312, 413, 453, 485, 558, 615, 670.
Dumitrescu M. G., 103, 106, 159, 160, 267, 272, 377, 657.
Dumitrescu C. I., 10.
Dumitrescu V., 485.
Dumitriu A., 312.
Dupin Ch., 506.
Duranova-Vedia A., 586.
Duschek Fr., 193.
Dutchevici M. I., 49.

Eckstein V., 191, 260, 261, 263, 324, 328, 379, 380, 381, 438.
Eftimie D. C., 609, 611.
Ehrenfels C. von, 60.
Einstein A., 137, 477.
Eliade, 468.
Ellis Leslie R., 470.
Emmanuel D., 58, 562, 621.
Enache D. I., 207.
Enăşescu D. V., 480.
Ene G. Elisabeta, 298.
Enescu B. C., 428.
Enescu D. D., 333, 609, 611, 612.
Enriques Fr., 454.
Erbiceanu C., 368.
Erdöss P., 80.
Estève R., 427.
Euclide, 21, 228, 229, 230, 252, 454, 456, 565, 566, 622, 623, 624.
Euler, 55, 136, 141, 197, 259, 264, 267, 273, 275, 373, 375, 397, 455, 475, 486, 548, 549, 664, 672.
Evans G. C., 135.
Ewing M. G, 476.

Faye H., 369.
Fayet J., 32.
Fejér L., 233.
Feld M. J., 80.
Felix C. G-l, 10.
Fermat, 33, 137, 141, 471.
Ferrari, 398.
Ferrei, 398.
Ferrers M. N., 470.
Férrusac, baronul, 619.
Feuerbach, 87, 476, 521.
Fibonacci, 375, 376, 590.
Filip I., 197.
Filipescu Em. Gh., 18, 137.
Fischer**), 344.
Fistié G., 308.
Floareş I. Ad., 377.
Floareş I. M., 597.
Florea V. V., 297.
Florescu Al., 485.
Florescu I., 532.
Florescu B. I., 198.
Florescu M. U., 5, 6, 10, 313, 591.
Florescu L. V., 28, 41, 45, 51, 52, 54, 92, 100, 153, 159, 162, 207, 209, 212, 260, 263, 266, 274, 298, 306, 328, 375, 377, 454, 521, 540, 660.
Floreşteanu D. Al., 297, 333, 456.
Florian Z., 341.
Focşeneanu I. M. Căp., 5, 6, 10, 73, 191, 222, 320, 322, 334, 391.
Fontenè G., 532.
Forder G. H., 252.

*) Acelaşi cu *Kirilov*.
**) Acelaşi cu *Piscator*.

Franckx E., 31.
Frank I., 312.
Fréchet, 82.
Fresnel, 82.
Friedman I. B, 609.
Frink A. Aline, 80.
Frink O., 80.
Fritz-Patric, 219.
Froda Al., 529.
Fundăţeanu C. I., 10.
F. G. M., 87, 98, 328, 383, 432, 455, 670.

Gabrielescu R., 10.
Gadidov V., 207.
Gaiu Gh. Em, 593.
Gâlcă I. T., 10.
Ganea N. M. D., 297.
Garnier R, 389.
Garrik, 57, 58.
Gataianţu V. B., 313, 591, 597,
Gauss 168, 288, 471, 522, 523.
Gavrilescu N. C., 93, 147, 207, 208, 261, 480.
Georgescu I. C., 196, 485.
Georgescu E., 312.
Georgescu S. G., 312, 485,
Georgescu I. N., 10.
Georgescu N. N., 10.
Georgescu-Racoviţă I. I. 252.
Georgescu-Roegen N., 10.
Georgescu-Val N. I., 10.
Gereanu C. Ana, 53, 103, 156, 333, 377, 545, 656.
Gergonne, 259, 265, 397.
Germani G. D., 476.
Germay H. R., 31.
Gheorghe I. M., 297, 608.
Gheorghieş Al. G-l, 10, 33, 216, 341.
Gheorghiu C. Ad., 5, 6, 10, 112, 378, 382, 391, 446, 453, 487, 529, 539, 548, 578, 601, 615, 640.
Gheorghiu A. Al., 313, 333, 551.
Gheorghiu I. C., 312.
Gheorghiu Th. Gh., 5, 6, 10, 28, 33, 56, 81, 92, 126, 145, 147, 168, 224, 313, 336, 340, 430, 431, 432, 435, 437, 453, 456, 470, 476, 504, 522, 532, 560, 571, 589, 591, 670.
Gheorghiu S. I., 10.
Gheorghiu A. M., 11.
Gheorghiu A. Şerban, 11, 54, 223, 279, 335, 391, 446.
Ghermănescu M. 5, 6, 11, 56, 82, 224, 279, 312, 357, 376, 391, 402, 403, 404, 448, 454, 457, 476, 485, 503, 545, 547, 551, 616, 641, 672.
Ghibaldan I., 524.
Ghibu O., 343.
Ghimuş D. A. Lt.-Col., 11, 454.
Ghiolu D. A., 485.
Ghiolu Şt., 312, 429.
Ghircoiaşu N., 368.
Ghişoiu I. C., 41, 138, 207.
Ghişoiu I. P., 11, 88, 197, 313, 597.
Ghiţescu Ad., 88.
Ghiţescu V. 5, 6, 11, 84, 109, 192, 245, 252, 269, 272, 336, 444, 616, 665, 666.
Glaisher L. W. J., 470.
Gligor N. I., 298, 333, 455,
Gloden A., 31, 81, 136, 192, 245, 297, 426, 529, 579.
Godeanu Ig. V., 89.
Gogu C., 58, 621.
Goldberg I., 48, 103, 156, 655, 657.
Goldenberg I., 376.
Gonzales D. A., 32, 643.
Gonzales O. M., 192, 476.
Goormaghtigh R., 31, 251, 308, 426, 477, 587.
Gorgen P., 84.
Goursat E., 426, 509, 561, 568, 570, 571, 573, 574, 575, 576.
Grătianu I. R., 297.
Grecu M. Cr., 89, 597.
Green G., 471, 522, 523
Green W. J., 80.
Gregoras N., 643, 647.
Gregory F. D., 470.
Grignon A., 454.
Grigorescu C., 11.
Grigorescu E., 312.
Grigorescu A. V., 485.
Grigoriu C., 297.
Grossu I. M., 88.
Gruberman G., 315.
Grubermann I. Gr., 597.
Grumăzescu M. S-Lt., 41, 43, 96, 103, 105, 154, 156, 160, 210, 260, 263, 267, 357, 376, 545, 600, 609, 656, 666, 667, 671.
Grünberg S., 312, 485.
Grünwald G., 80, 130, 132.
Gudermann, 471.
Guichard Cl., 506.
Guldin, 528.
Guţu I. Al., 11, 221, 477.
Gutzu V., 11.
Gviazdomorschi E. R., 103, 213, 298, 333, 377, 497, 557.

Hadamard, 561.
Hadwiger H., 529.
Haim B., 89.
Halsted B. G, 589.
Hamilton J. N., 471.
Hanganu D. M., 11.
Hankel, 82.
Haret C. Sp., 58, 621, 635.
Harlat A., 485.
Heller A., 565.
Herbay E. de, 207.
Herman V., 589.
Hermann M., 485.
Hermite Ch., 82, 620.
Heurtley de la Riesta A., 307.
Heytmanek C., 197.
Hilbert, 523.
Hoborski A., 476, 528.
Hortopan Gh. Gr., 377.
Hospital L', 465, 645.
Houël J., 619.
Hristescu A., 485.
Hristescu I. I., 297.
Huggens, 516.
Hulubei V. T., 84.
Humbert P., 82.

Iacob Caius, 308, 309, 528.
Iacob St. E, 314.
Iancu I. S., 160.
Ianculescu I. A., 333.
Ianculescu S. O., 40 41, 207, 314.
Ianculescu T. R., 11.
Iisus Hristos, 445.
Ilie I. N. 298.
Iliescu Gh. 5, 11, 454.
Iliescu I. V., 103.

Iliuţă-Dăbuleni I. I., 252, 597.
Imbert, 471.
Ioachimescu Gh. A., 11, 28, 172, 225, 227, 276, 340, 477, 563.
Ioachimescu A. Gh., 11.
Ioan A. I., 275, 298, 328.
Ioanovici A., 11, 193, 340.
Ionescu D. Al., 611.
Ionescu G. B., 191.
Ionescu D. C., 92.
Ionescu M. C., 298.
Ionescu Cicerone, 333.
Ionescu V. D., 5, 11, 505, 528, 529.
Ionescu Gh., 214.
Ionescu B. N. Gh., 160, 209, 377, 385, 551, 553,
Ionescu P. H., 6, 11, 88, 89, 197, 597.
Ionescu Ion, 5, 12, 32, 33, 49, 51, 53, 84, 109, 137, 162, 163, 166, 169, 170, 171, 172, 193, 194, 222, 227, 230, 232, 252, 277, 280, 309, 310, 330, 334, 339, 341, 358, 368, 369, 390, 428, 445, 454, 455, 456, 470, 478, 479, 501, 510, 531, 532, 558, 563, 587, 588, 589, 601, 602, 604, 610, 614, 620, 621, 644, 647, 648, 651, 654, 658, 669.
Ionescu C. M., 297.
Ionescu I. P., 312.
Ionescu D. Stelian, 213, 298, 333, 455, 557, 657.
Ionescu Tib., 368.
Ionescu-Bis*) P. H., 35, 141, 315, 535.
Ionescu-Bujor C., 5, 6, 12, 28, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 46, 52, 53, 55, 80, 83, 98, 100, 106, 110, 150, 166, 223, 240, 260, 261, 266, 267, 274, 336, 340, 365, 375, 389, 427, 446, 453, 541, 542, 557, 558, 578, 598, 600, 610, 611, 613, 645, 654, 655, 657, 662, 664, 668.
Ionescu-Ţiu D. C. Lt., 5, 6, 12, 55, 88, 89, 152, 154, 159, 160, 167, 194, 197, 224, 279, 336, 454, 554, 560, 670.
Ionescu-Zane Gh., 12.
Iordănescu Gh. P., 297.
Iorga N., 619.
Iorga N. M., 308.
Iorgulescu N. Fl., 333.
Iovănescu D., 313.
Iovănescu F. 313, 315.
Irimescu P. 333.
Iscu I. S., 197.
Istinie-Brezuica I. C., 138, 314, 597.
Istrate E., 312.
Istrate C. Dv., 393.
Istrate C. Lt.-C-dor, 12, 485.
Isworan, 620.
Ivănescu C., 90, 252,
Ivanovici T. N., 597.

Jacobi, 471.
Jareghie V. C., 328.
Jareghie V. I., 106, 163, 209, 274, 375, 385, 497, 550, 609, 656, 667.
Jijie A., 12.
Jipa C. A., 207.
Jipa C. N., 377.
Jordan, 307.
Joukowsky, 81.
Julia G. 426, 427.
Juster A., 312.

Kamke E., 529.
Karamata J., 528.
Kariya, 478.
Kármán, 81.
Kaufmann S. E., 312.
Kaufmann N., 12, 533, 535, 590, 593.
Kaufmann Seb., 312.
Kempe A., 33.
Kerciu S., 377.
Keynes, 644.
Kiépert, 391.
Kirilov Al., 227.
Kirilov Gh., 225, 226, 227, 620, 621.
Kirilov N., 225.
Kirilov N.**, 227.
Kivovicz I., 485.
Kivovitz A., 485.
Klein F., 619.
Koehler W., 113, 114.
Koffka, 114.
Königs, 508, 509.
Kraitchik, 31, 308, 426.
Kubotta, 564.
Kummer, 471.
Kutta, 81.

La Menza, 31, 80.
Lagrange, 267, 465.
Laisant A. C., 619.
Lalescu Tr., 79, 100, 264, 486, 492, 587, 588, 664.
Lambert G., 308.
Lamé G., 75, 280, 471.
Lamoth P., 12.
Lampe, 619.
Landau E, 233, 235.
Laplace, 80, 82, 308, 505, 506, 507, 508, 509, 523, 643, 646.
Laurent, 82.
Lazăr Gh., 624.
Lazăr L., 622.
Lăzărescu D., 312.
Lăzărescu M. I., 312.
Lazu C., 12.
Le Verrier 471.
Lear, 58.
Lebădă D., 259, 275, 480.
Lebesgue H., 80, 427.
Leemans J., 31, 477.
Lefébure de Fourcy, 252.
Legendre, 228, 229, 624, 637.
Lehmer Emma, 426.
Leibovici S., 298, 557, 606, 663.
Leibovitz S., 485.
Leibnitz, 464, 465.
Lemoine E. 265, 422.
Leonida D., 12.
Leuco I., 89, 437.
Leysenne P., 428.
Libri G., 471.
Lie S., 619.
Linteş G. I. Cpt. C-dor, 5, 6, 12, 81, 82, 137, 139, 141, 166, 174, 191, 192, 214, 216, 218, 219, 222, 252, 256, 258, 27

*) Acelaşi cu *Ionescu H. P.*
**) Acelaşi cu *Chiru N.*

312, 315, 316, 334, 335, 364, 392, 417, 446, 454, 477, 485, 501, 527, 529, 542, 543, 547, 548, 558, 582, 614, 618, 635, 642, 643, 669.
Liouville J., 82, 189, 471, 522.
Liteanu A., 312.
Liteanu D., 312, 485.
Liteanu I. Gh. G-l, 5, 6, 12, 35, 87, 90, 244, 315, 454.
Livada F. Gr., 12.
Loeffler E., 647.
Loria G., 477.
Lovin C., 485.
Lozano N., 31.
Lubeski S., 528.
Luca L. N., 312.
Lucas Ed., 219, 235, 419, 642.
Lucescu I. G., 228.
Luchterhand. 299.
Lupescu G. C., 89.
Lupu I. Gruia, 298, 657.
Lupulescu I. A, 377.
Lurquin C., 425.

Mac-Laurin, 465.
Mackey S. J., 479.
Maillard, 620.
Maiorescu T., 58.
Malaxa Elena, 12.
Malaxa N., 12.
Malcoci C., 12.
Mamut I. P., 328.
Manafu V., 12.
Mănescu Gh. I., 297.
Mănescu M., 92, 141.
Mangeron I. D., 471, 477, 523.
Manoilescu M., 13, 170, 192.
Mărăcine B., 13.
Marcelino I., 485.
Marcinkiewicz J., 477.
Marcovici E., 43, 492, 655, 656.
Mărculescu Origen, 103, 156, 157, 274, 383, 386, 494, 542, 545, 548, 553, 656.
Mărculescu I. Th., 89.
Mareş I. Em., 89.
Mareş Gr., 315.
Mareş T., 13,
Mărgărit I. N., 298, 456.
Margulius M., 89, 313, 483, 597.
Marian V. 22, 59, 345, 402, 454, 456, 567, 624, 647.
Marin Şt., 196.
Marinaş B. M., 597.
Marinescu Gr., 485.
Marinescu M., 477.
Marinescu P., 49.
Markovici D. S., 528.
Martac V. R, 328.
Marteş V. Gr. S-Lt., 41, 100, 145, 156, 157, 208, 261, 480, 542, 612, 657.
Marteş V. I., 138.
Martin L., 57.
Martinian B., 195.
Martonfi A., 530.
Mateescu G. M. A., 297.
Mateescu Cr. 5, 13, 37, 136, 193, 312.
Matei D. D., 540
Mătieş V. I., 336, 479, 501, 560, 611.
Mavrodin D. D., 40, 41, 42, 54, 141, 147, 150, 201, 206, 256, 260, 261, 369, 522, 537, 542, 654, 655, 656.
Maxim N., 312.
Maxwell A. E., 82, 471.
Mayer, 477.
Mayer O, 485.
Mazilu C. Gh. 377.
Mazilu C. P., 147, 150, 535.
Mc Shane E. J., 135.
Melas P., 312, 485,
Melik I., 228.
Menelaus, 36, 74, 209, 476, 662.
Mereuţă E., 89, 92.
Mereuţă V., 13.
Mersman A. W., 192.
Mézières P. de, 619.
Michel C., 366.
Micu V. P., 298
Mihăileanu N. N., 5, 6, 13, 55, 80, 89, 92, 105, 136, 141, 167, 223, 278, 305, 322, 335, 391, 417, 426, 432, 437, 447, 453, 479, 487, 500, 501, 502, 529, 532, 558, 578, 615.
Mihăilescu D. D., 333, 606, 611.
Mihăilescu G. E., 528.
Mihăilescu P. T., 13.
Mihalcea St. D., 207.
Mihalcea I. Em., 89.
Mihalcea N., 43.
Mihalopol C., 13.
Mihoc Gh., 477.
Milu I. N., 651.
Minding, 471.
Minea V. A., 333.
Mineur Ad., 31, 251, 307, 587.
Miquel, 74, 366, 426, 432, 487, 514.
Mircea M. E., 13.
Mirea N. St., 18, 253.
Mirescu A., 312.
Mirescu P., 13.
Mironescu C., 620, 621.
Mironescu I. D., 611.
Mironescu Tr. D., 209, 656.
Miroslav St. T., 51, 53, 297, 333, 376.
Misès, 645.
Mitault H, 427.
Mitescu C., 13, 312, 485.
Mititelu C. Cl. 13.
Mititelu C. I., 13.
Mittag-Leffler, 82.
Modâlcă Ana, 333.
Modâlcă S. Maria Ana, 609.
Modâlcă S. Em., 105, 162, 212, 219, 274, 328, 333, 547, 548, 550, 609, 656.
Modâlcă S. Maria, 382.
Moessner A., 76, 190, 244, 294, 295, 476, 529, 579, 581.
Moise D., 89.
Moivre, 646.
Monge, 287, 430, 450.
Montel P., 233, 235, 236, 238, 454, 476, 478.
Montucla, 622.
Morgan de, 471.
Morţun E, 278.
Morţun Gh. Em., 368.
Motaş Camil, 333, 553.
Moţoc D. M., 197.
Moţoc R., 329.
Movanu I. P., 297.
Munteanu I. I., 297.
Murăroiu I., 89.
Murgea N. M., 103.
Myller A., 467, 468, 475.

Nagel, 264, 265.
Napier J., 464, 532.
Napoleon, 563.
Napoleon III, 618.
Navier, 602.
Neamţu P., 13.
Necşescu I. A., 377.
Nedelcu V. N., 156, 657.
Nedelcu Fl. I., 297.
Negoescu St., 312.
Negoiţă C., 144.
Negoiţă V. P. Lt., 160, 214, 224, 328, 671.
Negrea A. L. M., 40, 43, 48, 53, 90, 92, 93, 138, 141, 144, 145, 207, 208, 260, 267, 429, 434, 480, 542, 612, 651, 655, 656.
Negrescu Şt. Cpt., 428.
Negulescu A. Vl. 312, 485.
Negură St., 13.
Neicu V., 312.
Nestor G. D., 13.
Nestorescu V, 428.
Neuberg J., 194.
Nevanlinna, 119.
Nevanlinna F., 66.
Nevanlinna R., 66.
Newton, 394, 455, 462, 464, 465, 466, 565.
Nichifor A. G., 13, 429.
Nichifor Sc. M., 143.
Nicod, 644.
Nicolaescu I. D., 312.
Nicolaescu S. V., 607.
Nicolau Al., 13, 532.
Nicolau C., 298, 312, 485.
Nicolau H. C., 13.
Nicolau V. D., 89.
Nicolau T. M., 14, 137, 392, 485, 648.
Nicolau-Dobridor C. I., 315.
Nicolescu St. I., 480.
Nicolescu I. R., 14.
Niculescu V. Al., 6, 14, 111, 212, 214, 277, 328, 330, 335, 382, 383, 454, 532, 543, 559.
Niculescu V. Corn., 377.
Niculescu Cr., 14.
Niculescu D., 255.
Niculescu V. Gh., 142, 312, 433, 485.
Niculescu Miron, 6, 14, 33, 70, 321, 477, 522, 529.
Niculescu St., 312, 485.
Niculescu-Mitreni I. G., 89.
Niewenglowski B., 205, 206.
Nifon Mitropolitul, 445.
Noguerra de Paula L., 529.
Novoa Gutierrez L., 307.

Obrechkoff N., 476, 529.
Obreja D., 377, 657.
Ocagne M. d', 70, 321.
Olivier, 471.
Olteanu G., 312, 485.
Olteanu E. St., 89, 92.
Onicescu O., 5, 14, 126, 470, 477.
Onişoru V., 333.
Opitz M., 344.
Oprea D. Gh., 297.
Orănescu O., 6, 14, 448.
Orăşanu D. C., 5, 14, 33, 454, 636.
Orăşeanu Gr., 14.
Ordeanu P. M., 297.
Ory H., 251.
Oseen, 82.
Ostrogradsky, 471.

Pacioglu C. C., 297.
Pădure M., 297.
Pădurel V., 213.
Pădureţ A. V., 377.
Painlevé P., 647.
Painvin, 619.
Paladi V., 228.
Pamfil G. M., 196.
Pană C. Al. Lt-Col., 454.
Panaite Gh., 138.
Panaite N. Th., 487.
Panaitescu Sc., 18, 341, 617, 618.
Pănoiu Em., 92.
Pantazi Al., 6, 14, 312, 454, 476, 483, 485.
Pantazi Gh., 169, 170.
Pântea P. T., 297.
Pantelimon C., 156, 550, 557.
Pantelimon V. C., 40, 43, 53, 100, 209, 274, 298, 328, 329, 333, 375, 376, 385, 609, 611, 656.
Pântescu C. C., 298, 609, 611.
Pantoleon I., 312.
Panţu Z. I., 313, 597.
Papadopol D. Elena, 298, 333.
Papafil E., 312.
Paparizu I. G., 298.
Papelier G., 365, 455, 456.
Pappus, 306, 307, 528.
Paraipan N. C., 213.
Paraschiv H. N., 89.
Pardies G. I., 564, 565, 566, 567, 621, 622, 623, 624.
Parepeanu C. I. S-Lt., 39, 41, 89, 92, 141, 259, 328.
Paris G., 528.
Pârvu A., 6, 14, 138, 197.
Pârvulescu Al. Vl., 376.
Păsăricâ I., 485.
Pascal, 74, 394, 463.
Pascaru C., 163, 214, 657.
Pascaru C. C., 106.
Pascaru I. C., 274, 609.
Pascaru I. I., 298, 333, 550, 657, 667.
Pascu V. H., 298.
Pastor Rey J., 32, 643.
Patraulea N., 141.
Patriciu G. T., 18.
Paulini R. R., 298.
Păun A., 485.
Păun M. Gh., 89, 312, 597.
Păun I., 255.
Pavel D., 477.
Pavel-Onizaba N., 89.
Peano, 80.
Pell, 267.
Pellet A., 235.
Pérau J. M., 426.
Perazzo, 477.
Perieţeanu D., 430.
Perrin F., 455.
Petcu Gh. V., 298.
Petrescu V. Achile, 106, 214, 298, 328, 332, 333, 375, 376, 381, 385.
Petrescu Iulian, 298, 333, 441, 556.
Petrescu C. I., 39.
Petrescu V. M., 103, 298, 333, 377, 385.
Petrescu C. O., 147.
Petrescu I. Şt., 297.
Philipide M., 14.
Picard E., 233, 561, 619.
Pintilescu V., 312.
Pipoş P., 19, 20, 21, 22, 57, 58, 59.
Pirtea T., 312.

Piscator *), 344.
Pitagora, 74, 213, 229, 308, 640, 647.
Pleşu I. L., 297.
Plücker, 284.
Poenaru P., 624.
Poincaré H., 191, 523, 561.
Poinsot, 477.
Poisson, 523, 646.
Pompeiu D., 83, 470, 476, 477.
Pongracz S., 565, 624.
Pop Gr. I., 298, 609.
Popa N. A., 297, 557.
Popa C. B., 377.
Popa Gh. I., 89.
Popa I. I., 479, 485.
Popa D. M., 40, 43, 53, 100, 103, 106, 163, 209, 212, 267, 274, 298, 328, 329, 333, 375, 376, 386, 456, 497, 541, 550, 609, 611, 612, 649, 650, 656, 663, 667.
Popa I. M., 333, 616.
Popa T., 297, 455.
Popea G. O., 196.
Popescu A., 485.
Popescu Adr. S-Lt., 167, 222, 277, 445, 499, 500, 501.
Popescu T. A., 477.
Popescu F. C., 333.
Popescu N. Corn , 14, 197, 485.
Popescu M. D., 597.
Popescu Gh., 532.
Popescu Gh. Gh., 89.
Popescu I. Gh. G-l , 429.
Popescu I., 18.
Popescu F. M., 333, 550.
Popescu O., 297.
Popescu D. Stelian, 313, 597, 602.
Popescu Victor, 15, 170.
Popescu C. V., 313, 597.
Popescu-Botoşani G., 15, 326.
Popescu-Stăneşti I. M , 89, 90.
Popescu-Zorica N. Al., 39, 41, 100, 103, 154, 157, 210, 214, 272, 324, 329, 376, 437, 545, 657.
Popişca V. M., 298, 609.
Popovici C. C., 391.
Popoviciu I. Gavril, 96.
Popoviciu Tib., 6, 15, 70, 97, 98, 102, 112, 202, 204, 301, 317, 320, 321, 364, 429, 477.
Popp N., 15, 312.
Popp T., 15, 454.
Portocală M., 15.
Postelnicescu C. M., 37, 40, 210, 374, 476, 521.
Potopeanu Gh. G-l., 15.
Poulet P., 81.
Praja V. I., 228.
Prandtl, 81, 82.
Praporgescu N., 15.
Preciado I. T., 376.
Predescu I. M., 201.
Predoiescu-Ţânţăreni Tr., 41, 43, 103, 147, 154, 156, 210, 267, 434, 651, 656.
Predoiescu - Ţânţăreni M. Tr., 96.
Prodan Gh. C., 40, 207.
Profiri N., 480.
Prompt Dr., 33.
Protopopescu Gr. G-l, 15.
Ptolomeu, 74, 99, 536.
Puiseux, 620.
Puşcariu I. Ritter von, 137, 588.

Raabe, 431.
Racliş R., 15, 369.
Rădoiu T., 485.
Radoveanu N. N., 89.
Radu Elie, 174.
Radu Fl., 89.
Rădulescu M., 587.
Rădulescu C. M., 313.
Rădulescu Gh. Oct., 53, 298, 328, 390, 454, 657, 669.
Răduleţ R., 477.
Raicu C. Al., 89, 197.
Ralet D. I., 228.
Ramée P. de la**), 343, 566.
Râmniceanu I. Cr., 89.
Ramus P. ***), 343, 471.
Ranucci N. D., 137.
Ratib I., 81.
Rees K. P., 80.
Rein W., 58.
Reischer H., 332, 666.
Reischer D. H , 298.
Reischer L. H., 103, 106, 156, 162, 163, 333, 540, 602, 609.
Revici T., 15.
Rheti M., 20.
Richardson G. R., 230.
Riemann, 191.
Rignaux M., 367.
Rios S., 32, 643.
Ripianu D., 100, 156, 210, 218, 220, 492, 542, 600, 609, 611, 612, 655, 667.
Ritt J. F., 135.
Robescu Gh., 485.
Robinson T. R., 252.
Rohr I. A., 40, 48, 106, 162, 209, 210, 218, 220, 274, 298, 550, 609, 611, 663, 667.
Rolle, 536.
Rollea C. V., 337.
Romaşcan G. Georgeta, 103, 147, 377, 656.
Roşca St. G., 89, 90, 441, 493, 550.
Roşculeţ Al., 314.
Roşculeţ N. M., 53, 218, 272, 274, 376, 550, 663.
Roşculeţ N., 103.
Rosenbaum B., 80.
Rosenberg G., 312, 485.
Rosenblatt B. E., 196.
Rosenblatt S. M., 551.
Rosenblatt-Roth M., 157.
Rosenrauch, 606.
Rosiu I. G., 228, 229.
Roşu Al., 402.
Roşu Al. Al. 5, 6, 15, 33, 315, 341, 413, 454.
Roşu T., 312.
Roşu V., 15, 228.
Rouché E., 455.
Rusu D. C., 89.
Rusu I. E., 377.
Russel A., 287.

Sacter O., 98, 491, 492, 549, 654.
Sagastume Berra E. A., 586.
Sager N. I., 145.

*) Acelaşi cu *Fischer.*
**) Acelaşi cu *Ramus.*
***) Acelaşi cu *Ramée.*

Şaichin O. A., 48, 51, 53, 100, 152, 156, 209, 219, 267, 274, 298, 329, 385, 386, 437, 441, 491, 550, 553, 609, 609, 655, 657, 667.
Saint-Germain A. de, 620, 621.
Sainte-Laguë A., 31.
Sălăgeanu A., 15.
Saligny M., 15.
Salmon G., 155, 156, 600.
Samarian G., 485.
Săndulache C., 96, 110, 332, 655.
Săndulescu C., 612.
Sanielevici S., 662.
Şapira H., 312.
Săpunaru S. Gh., 15.
Sarian M., 6, 15, 191, 532, 672.
Săruleşteanu I. Em., 556.
Sava V. D., 298.
Savin C. I. Lt., 15, 33, 88, 89, 92, 106, 138, 341.
Savin I. I., 376.
Sbârnea D. Gh., 298.
Sburlan D., 312.
Schaewen, 638.
Schileru-Dili C. I., 16.
Schmid A., 20.
Schmidt, 567, 621.
Schmierer M., 310.
Schoenberg I., 80.
Schoenfliess A., 310.
Schönemann, 471.
Schrödinger, 82.
Schultz W., 294, 295.
Schwartz, 81, 192.
Şcodrano Al., 491.
Secu V. D., 377.
Segal J., 100, 272, 274, 377, 651.
Ségre, 70, 321, 477.
Şerban C. C., 298.
Şerban V. D., 89.
Şerban N. P., 297.
Şerban A. T., 550.
Şerban-Ulmeni D., 89, 197, 597.
Şerbănescu O., 312.
Şerbănescu N. St., 103, 329 376.
Şerbănescu Gh. V., 16.
Sergescu B., 16.
Sergescu P., 5, 6, 16, 33, 126, 267, 272, 469, 621, 647.
Serret P., 310, 620.
Sfinţescu I. C., 16.
Sierpinsky W., 477, 478, 529.
Sigismund I, 343.
Silaş G., 434.
Silvester J. J., 470.
Simionescu D. Gh., 5, 6, 16, 168, 209, 210, 335, 447, 454, 517, 520, 551, 560, 606, 609, 615, 662, 670.
Simonoff M., 81.
Simpson, 22
Simson T., 122, 229, 238, 239, 240, 417, 488, 611, 644, 672.
Sispanov S., 192, 307, 528.
Smântânescu A., 16.
Smith A. P., 80.
Solomon I. I., 103, 106, 156, 212, 274, 333, 377, 609, 611.
Solomon I. W., 196.
Sonnenreich Dora, 370.
Sonnet H., 479.
Souto B. J., 137, 529.
Şova I. C., 92.
Şova C. I. Lt., 193, 341.
Speckel C., 310.
Spottiswoode, 471.
Sprinceana C. Gh., 138.
Stabner, 31.
Stamate I. I., 333, 606, 610, 656, 667.
Stamatescu I. G., 16, 454.
Stamatescu I., 16.
Stan I. A. Lt., 16, 314, 315, 341, 358.
Stan A. D., 5, 16, 28, 33, 193, 337, 342, 368, 453, 469, 636.
Stănculescu I., 447.
Stănculescu M., 298, 609.
Ştefan C. Tilică, 102, 103, 214, 376, 492, 651, 657.
Ştefănescu A., 485.
Ştefănescu I. Cr., 89, 141.
Ştefănescu E., 41, 313.
Ştefănescu Eug. Prof., 169, 170.
Ştefănescu C. M., 297.
Ştefănescu D. N., 27, 41, 48, 152, 160, 209, 210, 259, 260, 269, 328, 330, 358, 369, 378, 413, 438, 469, 537, 542, 600, 606, 608, 655, 657.
Ştefănescu Radu, 170.
Ştefănescu S., 447.
Steiner, 223, 306, 323, 391.
Stewart, 47, 48, 74, 299.
Stieltjes J. Ph., 80.
Stihi E., 312.
Stirbei Barbu, 393.
Stirling, 82, 465.
Stoenescu I. Al., 31, 368, 392, 415, 416, 417.
Stoenescu D. M., 40, 46, 105, 274, 298, 657.
Stoianovici I. Ş., 297, 456.
Stoica D. Al., 39, 147.
Stoica V. D., 16, 28, 368, 453, 454, 469.
Stoicescu T. T., 16, 40, 41, 147, 204, 480.
Stoilov S., 362.
Stokes, 471.
Stoltz, 82, 366, 425, 586.
Stratilescu Gr., 477.
Streder G. I., 103, 156, 209, 210, 263, 328, 376, 381, 491, 656, 657, 658.
Strubecker K., 528.
Sturm, 189, 471.
Sturza D., 620.
Suhăţeanu C., 333.
Sylvester, 600.
Synge J. L., 135.
Szilvasi G., 624.

Tailer G., 591.
Takahaschi S., 529.
Tănăsescu Ar. G-l, 16.
Tănăsescu A. T., 16, 292.
Tănăsescu V. Venera, 48, 156, 656.
Tannery J., 619.
Tarasiuc S., 480.
Tarasiuc I. S., 207.
Tartalea, 398.
Tătaru N. N., 263, 298, 329, 377.
Tauber A., 194, 196.
Taylor, 82, 98, 129, 260, 394, 465, 466, 522, 572, 574, 577.
Teixera G., 516.
Teodoreanu V., 17, 617.
Teodorescu C. C., 17, 454.
Teodorescu N., 370.

Teodorescu V. N., 17.
Teodoriu L., 33.
Terquem, 471.
Thales, 324.
Thébault V., 31, 47, 53, 81, 120, 122, 160, 162, 166, 192, 222, 251, 255, 267, 299, 306, 308, 335, 390, 426, 439, 445, 476, 521, 524, 529, 540, 559, 587, 597, 614.
Theodorescu N. Dorin, 147, 153, 298, 491, 657.
Theodorescu N., 83.
Theodoru H., 17.
Thierrin H G., 17, 454.
Third A., 122.
Thomas J , 135.
Thomson W., 470.
Timotin A., 485.
Ţino N. O., 5, 6, 17, 28, 188, 340, 348, 351, 356, 402, 403, 454, 483, 486, 487, 488, 491, 559.
Tisserand F., 71, 321, 620.
Ţiţeica Gabriela, 17.
Ţiţeica Gh., 5, 17, 33, 79, 122, 123, 124, 126, 193, 259, 281, 282, 310, 337, 339, 340, 367, 368, 426, 429, 449, 450, 451, 452, 454, 455, 456, 469, 470, 476 479, 488, 505, 506, 508, 509, 561, 562, 563, 564, 664.
Ţiţeica I. I., 207, 210, 223, 259, 260, 274, 307, 308, 320, 321, 323, 366, 426, 429, 438, 521, 601, 651, 656.
Ţiţeica R., 454, 470.
Tolloti C., 477.
Toma N. N., 103.
Toma I. V., 298.
Tomescu A., 485.
Tomescu St. I., 17, 170.
Topalescu S. Gh., 332, 333, 377.
Topârceanu I. Gh., 297, 333.
Traian, Împăratul, 455.
Transon, 70, 321.
Trestian L., 312.
Trestian N., 312.
Triandafil A , 312, 485.
Trofimov P., 370.
Trufin T., 328.
Truia M. P., 89.
Tucker, 426.
Tudoran M. Lydia, 165, 332, 606.
Tudoran M. Sonia, 162, 377, 437, 441, 541, 543.
Tuduri Ş. dr., 83.
Tukey W. J., 80.
Tulea C. G., 485.
Turcu R. S., 41, 43, 53, 96, 156, 209, 274, 298, 328, 329, 375, 376, 381, 491, 656.
Turrière E., 477.
Turtoiu I. F., 298.
Tutoveanu R. A., 333.

Ulescu A., 17.
Ungheanu M., 89, 597.
Urechia A. V., 393.

Văduva Fl. M., 298.
Vâlceanu I. J., 89.
Vâlceanu N. J 314.
Vâlcovici V., 17, 33, 82, 281, 309, 417, 470, 477.
Valeiras A., 528.
Valiron G., 645.
Van Vleck, 233.
Vandermonde, 424.
Vardala I., 17.
Varlam M. P., 92, 141.
Vasilache I., 17.
Vasilescu A. Alexandra, 208, 358,
Vasilescu Aug., 311.
Vasilescu C. Gr., 17, 528.
Vasilescu C. I., 17.
Vasilescu T., 485.
Vasilescu-Karpen N., 170, 367, 614, 669.
Vasilescu Ştabu A. M., 43, 48, 96, 103, 105, 162, 165, 208, 209, 213, 218, 263, 269, 328, 332, 357, 358, 364, 369, 375, 377, 379, 380, 381, 385, 390, 441, 497, 542, 543, 545, 550, 556, 578, 600, 606, 610, 666, 667.
Vasiliu C. D., 103, 297, 609.
Vasiliu G. D., 17.
Vasiliu Gh. 17, 151, 376, 377, 454, 559.
Vasiliu C. I. 138, 370, 485, 487, 502, 535, 592, 616, 672.
Vasiliu Margareta, 298.
Vasiliu Mihai, 18, 454.
Vasiliu-Belmont G., 428.
Vaughan E. H., 80.
Velea M., 276.
Velescu I., 312.
Velicescu N. N., 89, 111.
Verdeanu N., 226.
Veress A., 52.
Vergulescu M., 312.
Vesa R. V., 333.
Vescan T., 18, 26, 31, 341, 476.
Vessiot E., 454.
Viciu A. A., 18.
Vickers, 81.
Vigarié E., 84, 589.
Vignaux C. J., 31, 80, 191, 366, 425, 586.
Vijelie Gh. E., 298, 376,
Vijelie-Muscel, Gh. E., 333.
Villat H. 81.
Ville J., 367, 645.
Viocelli A., 485.
Vişa E., 192, 520, 612.
Visarion C. I. V., 89, 92, 480.
Vişoianu C. 312.
Vlad A. M., 377.
Vlad I. C. M. Lt., 53, 100, 102, 103, 328, 332, 377.
Vlădescu A. 312.
Vlădescu I. Gh., 333.
Vlădescu R., 429.
Vlădoianu T. S. R., 297.
Voicu C. I. 89, 597.
Voicu Gh N., 89, 597.
Vonica I. I., 297.
Vuibert H., 136, 192, 251, 308, 367, 425, 587, 643.

Wald, 645.
Walker, 471.
Wallace 238, 611.
Wallis, 82, 516.
Wallon, 226.
Walsh L. J., 80.
Weierstrass J, 283, 477, 523.
Weingarten, 509.
Weiss A. E., 370, 477.
Weissberger Gavril, 333, 441, 602, 606.
Wertheimer, 114.
Wetzig, 467.

White S. H., 80.
Widder V. D., 80.
Wiener N., 80, 135.
Wilder R. L., 135.
Wilson, 33, 305, 427.
Woinaroski R., 18.
Wolf Ch., 567, 624.
Wood J. F. 252.

Yano K., 477.
Yvon M., 507.

Zaharia Fl. 18.
Zaharia Gh. 297.
Zaharia V. Gh., 611.
Zaharia O I. 89, 313.
Zaharia O. N., 69, 119, 593, 597.
Zaharia Gh. S. 297.
Zaidman J, 532.
Zamfirescu C. Gr. 18, 485.
Zamfirescu O. Gh., 89.
Zamfirescu G. I. S-Lt, 92, 252, 315, 371, 502, 671.
Zancu C. A., 298.
Zănescu A., 485.
Zapan Gh, 5, 18, 66, 166, 168.
Zapan Gr. Cpt. C-dor, 5, 6, 18, 33, 109, 126, 141, 166, 194, 342, 358, 413, 454, 485.
Zarifopol G. 228.
Zeuthen, 619.
Zitti A. C., 138.
Zlatcu St. C., 18.
Zotta C., 312.
Zotta G. I., 368.
Zygmund A., 477.

K. LUCRĂRI CITATE *)

1. Cărți, lucrări, extrase, teze

		Pag.
N. Abramescu	Algebra financiară	428
N. Abramescu	Lecțiuni de geometrie analitică	347
I. H. Alsted	Methodus Admirandorum	398, 399, 402
I. H. Alsted	Scientiarium omnium Encyclopaedia septem Tomis distincta	399
M. H. Andoyer	Cours de mécanique céleste	454
A. Angelescu	Lecțiuni de calcul diferențial	455, 456
N. I. Angelescu	Negustorii de odinioară	227
Th. Angheluță	Curs litografiat de teoria funcțiilor	234
P. Appel	Cours de mécanique	454
P. Aubert & G. Papelier.	Exercices et épures de géométrie descriptive .	455
E. Bacaloglu	Algebra	393, 462
E. Bacaloglu	Elemente de algebră	393
Cpt. Bănulescu și *Dragomirescu-Buzne* . .	Construcții de guri de foc	27
D. Barbilian	Curs de geometria mișcării	130
D. Barbilian	Curs de geometrie proiectivă	306
R. Carmichael	Théorie des nombres	638
Th. Caronnet	Exercices de géométrie	455
P. L. Cirodde	Leçons d'algèbre	466
V. Cristescu	Culegere de probleme de trigonometrie (goniometrie)	314, 436
V. Cristescu	Culegere de probleme de trigonometrie partea II (trigonometrie plană)	28, 340
Gh. I. Dâmboieanu, I. M. Dutchevici și *P. Marinescu*	Aritmetica și contabilitatea	49

*) In acest capitol nu sunt trecute lucrările citate în *Bibliografii* și în *Diverse*: Sporirea bibliotecei *Gazeta Matematică*.

		Pag.
Chr. von Ehrenfels . .	Das Primzahlengesetz entwickelt und dargestellt auf Grund der Gestalttheorie	60
C. B. Enescu şi *G. Vasilescu-Bélmont*	Rigla de calcul	428
Fr. Enriques et *O. Chisini*	Courbes et fonctions algébriques d'une variable.	454
Euclide	Elemente Vol. I. Traducere de V. MARIAN	454, 456
Euclide	Elemente 228, 229, 230, 566, 623,	624
Fitz-Patrick et *Chevrel*.	Exercices d'Arithmétique	219
F. G. M.	Cours de Géométrie élémentaire	670
F. G. M.	Exercices de Géométrie 98, 328,	432
F. G. M.	Exercices de Mécanique	87
F. G. M.	Exercices de Trigonométrie	383
F. G. M.	Manuel de Mécanique	455
F. G. M.	Manuel de Trigonométrie	455
R. Garnier	Leçons d'Algèbre et de Géométrie	389
Gauss	Teoreme generale asupra forţelor atractive şi repulsive care acţionează în un raport invers cu patratul distanţelor 471,	522
O. Ghibu	Universitatea Daciei superioare	343
Goursat	Cours d'Analyse Mathématique 568,	573
G. Green	Cercetări asupra aplicaţiunilor analizei matematice la teoria electricităţii şi magnetismului . . .	522
A. Grignon	Traité de cosmographie	454
A. Heller	Geschichte der Physik	565
A. G. Ioachimescu . . .	Culegere de probleme de algebră . . . 28, 276,	340
I. Ionescu	Beton armat	456
I. Ionescu	Geometrografia	455
I. Ionescu	ISAC NEWTON	455
I. Ionescu	Istoricul învăţământului ingineresc în România.	454
I. Ionescu	Lucrările publice la Romani sub Impăratul TRAIAN	455
I. Ionescu	Nomográfia	455
I. Ionescu	Reforma calendarului	455
I. Ionescu	Viaţa lui EULER	455
C. I. Istrati, Dr. . . .	Biografia şi lucrările lui E. BACALOGLU . . .	393
Keynes	A treatise on Probability	644
W. Koehler	Die physischen Gestalten	114
Tr. Lalescu	Curs de Geometrie Analitică	492
Tr. Lalescu	La géométrie du triangle 79, 100, 264,	664
Legendre	Elemente de Geometrie	624
Lucas	Théorie des nombres 219, 419,	642
A. Martonfi	Initia astronomica	530
Cpt. St. Negrescu şi *Val. Nestorescu*.	Algebra elementară şi superioară	428
Cpt. Val. Nestorescu . .	Monografie artileristică	428

		Pag.
Niewenglowski	Cours d'Algèbre	205, 206
Nifon, Mitropolitul . .	Ceaslov	445
G. Papelier	Exercices de géométrie moderne	365, 455
G. Papelier	Formulaire	455, 456
I. G. Pardies	Discours du mouvement local	565
I. G. Pardies	Dissertatio de motu et natura cometarum . . .	565
I. G. Pardies	Elementa geometriae 564, 565, 566, 567, 621, 622,	624
I G. Pardies	La Statique ou la Sciences des forces mouvantes	565
I. G. Pardies	Oeuvres	566
I. G. Pardies	Tabulae uranographicae	565
F. Perrin	Mécanique statique quantique	455
P. Pipoş	Apollonius Kérdése	57
P. Pipoş	Didactica	58
P. Pipoş	Istoria pedagogiei	58
P. Pipoş	Metodica şcoalei poporale	58
P. Pipoş	Pedagogia	58
P. Pipoş	Psichologia	58
I. Ritter von Puşcariu .	Das Stereometer	137
I. Cavaler de Puşcariu .	Stereometru	588
J. Renouard	Histoire des sciences mathématiques en Italie	471
E. Rouché & Comberousse	Traité de géométrie	455
G. Salmon	Leçons d'algèbre supérieure	155, 156, 600
S. Sanielevici	Mecanica raţională	662
Taylor	Scientific memoirs	522
G. Texeira	Traité des courbes spéciales remarquables . . .	516
F. Tisserand	Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal	70, 321
G. Ţiţeica	Culegere de probleme de geometrie .	79, 259, 488, 664
G. Ţiţeica	Culegere de probleme de geometrie analitică	340, 454, 455
G. Ţiţeica	Géométrie différentielle projective des réseaux	123, 124, 126, 506, 561
V. A. Urechia	Istoria şcoalelor	393
V. Vâlcovici	Asupra podarei unei curbe plane	417
E. Vessiot et *P. Montel*	Cours de mathématiques générales	454
T. Vescan	Axiomatica numerelor întregi	26
Chr. Wolff	Compendiul	624
M. Yvon	Exercices méthodiques de mathématiques générales	204
Une reunion de professeurs	Cours d'algèbre élémentaire	455
Une reunion de professeurs	Cours de trigonométrie	456
Une reunion de professeurs	Exercices d'arithmétique	455

2. Periodice

Pag.

Acta Reg. Scient. 21, 22
Analele Academiei Române 450
Annales de l'école normale supérieure 223
Annales scientifiques de l'Université de Iassy 467
Annales de Toulouse 571
Boabe de grâu 32
Buletinul Ştiinţific al Şcoalei Politechnice din Timişoara 119
Buletinul Societăţei Politechnice 172
Bulletin de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres 233
Bulletin de la Société mathématique de France 233
Bulletin des sciences mathématiques 235, 619
Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 619
Cambridge and Dublin mathematical journal 470
Cambridge mathematical journal 283, 470, 522
Comptes rendus de l'Académie de Sciences de Paris 429, 470, 475
Crelle's Journal 522
Elementa Matheseos Universae 567
Foaia Matematică 79
Gazeta Matematică . 5, 9, 18, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 37, 41, 70, 73, 77, 78, 91, 109, 112, 116, 127, 129, 169, 172, 173, 189, 190, 191, 195, 211, 225, 228, 230, 232, 241, 255, 261, 263, 264, 267, 276, 281, 282, 284, 297, 300, 301, 305, 306, 310, 313, 321, 325, 334, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 343, 347, 348, 358, 364, 368, 376, 402, 403, 404, 413, 414, 418, 419, 429, 433, 434, 436, 448, 452, 453, 456, 467, 468, 469, 472, 473, 474, 475, 478, 485, 487, 504, 510, 517, 521, 522, 524, 525, 563, 577, 578, 590, 596, 611, 617, 618, 624, 635, 636, 637, 638, 641, 648.
Gazeta Matematică, Supliment cu exerciţii 6, 24, 517, 578
Gazeta Matematică, Volum Jubilar 455, 456
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 619
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 618
Journal de l'Ecole Royale Politechnique, Paris 470
Journal de Liouville 522
Journal de Mathématiques 70, 75, 189
Journal de Mathématiques appliquées 321
Journal de Mathématiques élémentaires 524
Journal de Mathématiques pures et appliquées 470, 506
Journal für die reine und angewandte Mathématik 470
Mathematica 70, 321, 478
Mathematische Annalen 233
Mathematische Zeitschrift 294, 295
Mathesis 120, 162, 516, 597
Mercure de France 644
Nouvelles Annales de Mathématiques 70, 321, 516
Nouvelles correspondances Mathématiques 516

Pag.

Philosophical Magazine 287
Philosophical Transactions 565
Procedings of the Edinburg Mathematical Society 122
Recreaţii Ştiinţifice 228, 229
Revista de Filozofie 116
Revista Matematică din Timişoara 37, 201, 268, 431, 500, 540, 541
Revista ştiinţifică „V. Adamachi". 617
Ştiinţă şi Progres 359, 361
The Mathematics Student 579
The Quaterly Journal of pure and applied mathematics 470
Zeitschrift für Arbeitspsychologie und praktische Psychologie im allgemeinen 116
Zentralblatt für Mathematik 619

L. ERATA

Pagina şi Volumul sau Problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea de făcut*
Pag. 25, 27	112
Problema 4904	222
Pag. 170, 171	280
Problemele 5018, 5045	280
Problema 5052	336
Problema 5075	392
Problema 4838, 5050, 5073, 5080	448
Pag. 223, 386, 388, 389	448
Problema 5000	504
Pag. 434, 442	504
Problema 5162	672
Problema 5082	672

M. SUPLIMENTE

Burse şi premii din fondurile Soc. *Gazeta Matematică*. Supliment la No. 1 . . . . . 11 pagini
Recreaţiuni Matematice Supliment la No. 2 . . . . . 4 „
Recreaţiuni Matematice Supliment la No. 5 . . . . . 4 „
Recreaţiuni Matematice Supliment la No. 8 . . . . . 4 „
Recreaţiuni Matematice Supliment la No. 11 . . . . . 4 „
Darea de seamă asupra mesei comune dela Concursul *Gazeta Matematică* din 1939 Supliment la No. 10 . . . . . 10 „

N. FOTOGRAFII ŞI PLANŞE IN AFARĂ DE TEXT

Fotografia lui GH ŢIŢEICA . . . . . între pag. 280 şi 281

O. PUBLICAȚIUNI IN AFARĂ DE „GAZETA MATEMATICĂ“

Elementele lui EUCLIDE. — Cărțile I—IV de geometrie plană traduse din limba greacă de V. MARIAN . . . . . .

A. G. Ioachimescu. — Culegere de probleme de algebră. Partea II-a. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . .

Gazeta Matematică. — Supliment cu exerciții. Vol. V, 9 numere . 252 pagini

G. Țițeica — Culegere de probleme de geometrie analitică. Partea I-a, Ediția II-a revăzută de N. G. BOTEA . . . . . .

Până la sfârşitul lunei precedente, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bodnărescu M. Horia (5039, 58, 108, 10, 18, 24, 36, 43, 54, 59, 60, P); *Buznea D. Dinu* (4989, 5025, 78, 134); *Cazanacli V. Petre* (5122, 34, 36, 52, 59, 60); *Cetăţeanu Stelian* (4927, 52, 5002, N); *Cherţman S. Mozes* (5074, 131, 48); *Coşereanu Ion* (P); *Eftimie D. C.* (4829, 928, 68, 89, 5120, 36); *Friedman I. Barbu* (5039, 154); *Mărculescu Origen* (5132, 36, 45, 56, 57, 59); *Modâlcă S. Emil* (5134, 42); *Niculescu C. Mircea* (5004, 87, 115, 20, 31); *Petrescu Iulian* (N, P); *Popescu D. Simion* (5071, 73, 91, 145, 59, 62, 63); *Ripianu D-tru* (5052, 111, 42, 61); *Trefilow I. Mihail* (5006, 78); *Zamfirescu Ion* Locot. (P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică* Ediţia VI-a . . . . . Lei 120

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240.

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — IV de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon : 3-9803).

C. 57.710.